Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

Кафедра общей физики
Лаборатория механики

Лабораторная работа № 7

Экспериментальное определение ускорения силы тяжести и характеристик затухающих колебаний с помощью маятника

Ярославль
2009

Оглавление

Лабораторная работа № 7

Экспериментальное определение ускорения силы тяжести и характеристик затухающих колебаний с помощью маятника

Приборы и принадлежности: небольшой массивный шарик на специальном подвесе, секундомер, сосуд с жидкостью, рулетка, измерительная линейка с миллиметровыми делениями.

Цель работы: экспериментальное определение ускорения силы тяжести на основании теоретического выражения для периода собственных колебаний математического маятника; расчет логарифмического декремента затухания колебаний маятника в воде.

1. Краткая теория

К механическим колебаниям относятся движения, обладающие той или иной степенью повторяемости. Положительная величина, соответствующая максимальному отклонению от положения равновесия, называется амплитудой A; продолжительность одного полного колебания — периодом T; число колебаний в единицу времени — частотой ν; величина, равная $2\pi\nu$ — круговой или циклической частотой ω.

Среди многообразия колебаний особое место занимают *гармонические*, отличительным признаком которых является постоянство амплитуды и периода (частоты) колебаний. Такие колебания возникают под действием упругих или квазиупругих сил, прямопропорциональных смещению тел от положения равновесия и направленных противоположно смещению. Примерами колебательных систем в механике являются пружинный, математический и физический маятники.

Математический маятник — идеализированная система, состоящая из небольшого массивного шарика, прикрепленного к длинной невесомой нерастяжимой нити, длина которой значительно больше диаметра шарика. Для динамического описания движения такой системы применяется II закон Ньютона.

На рисунке 1.1 схематически показано, что при вертикальном положении нити сила тяжести шарика уравновешивается силой натяжения нити: $\vec{F} = -\vec{N}$, равнодействующая сила равна нулю: $\vec{F} + \vec{N} = 0$.

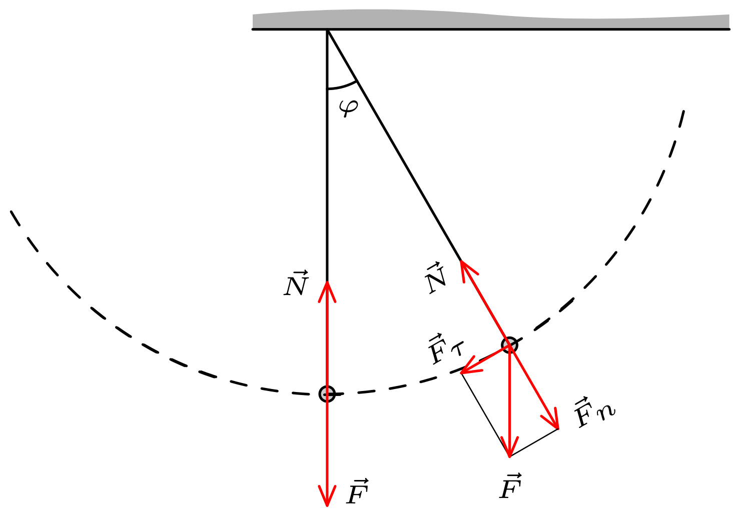

Рис. 1.1

При отклонении маятника на некоторый угол φ нормальная составляющая силы тяжести $\vec{F}_n$ уравновешивается силой натяжения нити, а касательная составляющая $\vec{F}_\tau$ направленная к положению равновесия, приводит маятник в колебательное движение (смотри анимацию).

Силой сопротивления воздуха при небольших скоростях движения можно пренебречь по сравнению с силой тяжести шарика.

В этом случае II закон Ньютона в проекциях на направление касательной к траектории движения имеет вид:

$$ma_\tau = -mg\sin\varphi\,. \tag{1.1}$$

При малых углах отклонения дуговое смещение S можно заменить прямолинейным отрезком x, тогда

$$\sin\varphi = \frac{x}{\ell},$$

проекция силы тяжести, равная

$$-\frac{mg}{\ell}x$$

действует подобно упругой силе ($F_x = -kx$) и является квазиупругой. Возникающие гармонические колебания называются в этом случае *свободными собственными колебаниями*.

Преобразуем уравнение (1.1), обозначив проекцию ускорения a_τ (2-ю производную координаты по времени) символом x'':

$$mx'' = -\frac{mg}{\ell}x\,, \qquad x'' = -\frac{g}{\ell}x\,, \qquad x'' + \frac{g}{\ell}x = 0\,,$$

введем обозначение:

$$\frac{g}{\ell} = \omega_o^2$$

и получим общую форму дифференциального уравнения гармонических колебаний:

$$x'' + \omega_o^2 x = 0\,, \tag{1.2}$$

где ω_o — собственная круговая частота колебаний, однозначно определяемая длиной нити ℓ и ускорением силы тяжести g.

Решениями таких уравнений являются функции:

$$x = A\cos(\omega_o t + \varphi_o) \qquad \text{или} \qquad x = A\sin(\omega_o t + \varphi_o)\,, \tag{1.3}$$

где x — смещение маятника от положения равновесия в момент времени t, A — амплитуда колебаний, $(\omega_o t + \varphi_o)$ — фаза, φ_o — начальная фаза. A и φ_o определяются начальными условиями, смещение в любой момент времени однозначно определяется фазой колебаний.

По гармоническому закону меняются со временем в этом случае проекции скорости v_x, ускорения a_x и силы F_x.

Период собственных колебаний математического маятника зависит только от длины нити и ускорения силы тяжести в данном месте Земли:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,. \tag{1.4}$$

Из этого выражения определяется на опыте (задание 1) ускорение g по измерениям длины нити ℓ и времени t некоторого числа колебаний N.

Надо отметить, что сама по себе физическая величина — ускорение силы тяжести — однозначно определяется широтой места и его высотой над уровнем моря. На широте Москвы на уровне моря $g = 9,82\,\text{м}/c^2$. Такое ускорение имел бы центр тяжести любого тела независимо от его массы при падении на Землю с небольшой высоты в безвоздушном пространстве. Оно называется также ускорением свободного падения. Сила тяжести в данном месте определяется его массой: $\vec{F} = m\vec{g}$.

Постоянство амплитуды гармонических колебаний объясняется отсутствием внешних и внутренних диссипативных сил и переходом кинетической энергии в потенциальную и наоборот без потерь, в соответствии с законом сохранения механической энергии. На практике под действием сил сопротивления (трения) энергия системы уменьшается, и колебания становятся *затухающими*. Для получения незатухающих колебаний требуется периодически действующая внешняя сила, в этом случае колебания называются *вынужденными*.

Рассмотрим основные уравнения и характеристики затухающих колебаний. Уравнение движения дополним силой сопротивления среды, направленной противоположно скорости движения маятника и в случае малых скоростей прямопропорциональной им:

$$F_x = -rv_x = -rx'\,.$$

II закон Ньютона в проекциях на ось X примет вид:

$$mx'' = -\frac{mg}{\ell}x - rx'\,,$$

где r — постоянная в данной среде величина, называемая *коэффициентом сопротивления*.

После деления частей уравнения на m получим:

$$x'' = -\frac{g}{\ell}x - \frac{r}{m}x' \qquad \text{или} \qquad x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{g}{\ell}x = 0\,.$$

Кроме использованного выше обозначения:

$$\frac{g}{\ell} = \omega_o^2,$$

введем новое:

$$\frac{r}{m} = 2\delta\,,$$

где δ — *коэффициент затухания*; дифференциальное уравнение затухающих колебаний примет вид:

$$x'' + 2\delta x' + \omega_o^2 x = 0\,. \tag{1.5}$$

Решениями этого уравнения являются функции:

$$x = A_o e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi_o) \qquad \text{или} \qquad x = A_o e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_o)\,, \tag{1.6}$$

где x — смещение от положения равновесия в момент времени t, A_o — амплитуда колебаний в начальный момент времени, e — основание натуральных логарифмов $(2,7)$, ω — круговая частота затухающих колебаний, величина которой зависит от свойств колебательной системы (ω_o) и от характера затухания: $\omega^2 = \omega_o^2 - \delta^2$.

Из-за потерь энергии на преодоление сопротивления среды амплитуда колебаний уменьшается со временем:

$$A_t = A_o e^{-\delta t},$$

колебания не являются гармоническими. Строго говоря, они не являются периодическими, так как смещения не повторяются в точности через определенный промежуток времени, но при малых коэффициентах затухания периодом считается промежуток времени между двумя последовательными максимальными смещениями в одном направлении (рис. 1.2).

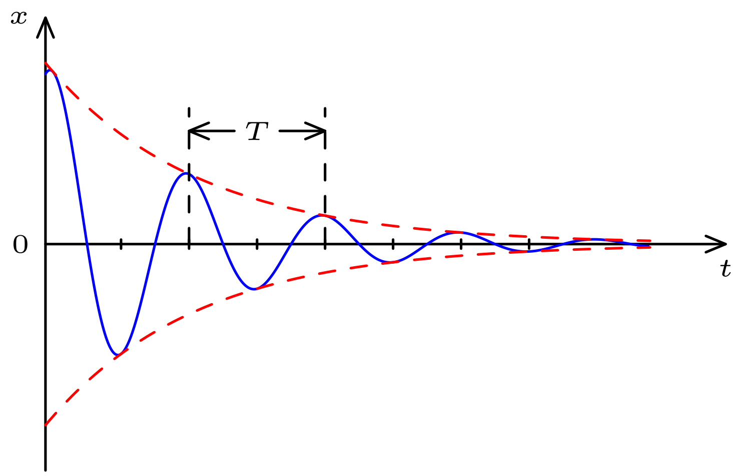

Рис. 1.2

Круговая частота затухающих колебаний меньше собственной, а период — больше периода собственных колебаний системы:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_o^2 - \delta^2}}\,. \qquad (1.7)$$

Основными характеристиками затухания являются коэффициент затухания δ и логарифмический декремент λ, связанные между собой.

Выясним физический смысл этих величин.

Коэффициент затухания определяется двумя величинами — коэффициентом сопротивления среды r и массой колеблющегося тела m:

$$\delta = \frac{r}{2m}.$$

Покажем, что этот коэффициент характеризует быстроту затухания и *обратен времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз*. Обозначим этот промежуток времени символом τ. По определению $A_1/A_2 = e^1$, при этом амплитуда колебаний в некоторый момент времени t равна $A_o e^{-\delta t}$, а через промежуток времени τ равна, соответственно, $A_o e^{-\delta(t+\tau)}$. Выразим отношение этих амплитудных значений:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\delta t}}{e^{-\delta(t+\tau)}} = e^{\delta\tau}\,.$$

Из равенства частей двух уравнений получим:

$$e^1 = e^{\delta\tau} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{\tau}\,. \tag{1.8}$$

Таким образом, чем больше δ, тем за меньшее время амплитуда колебаний уменьшится в e раз и наоборот. В СИ единицей измерения δ очевидно является c^{-1}.

Изменением параметров колебательной системы r и m можно уменьшать δ в случаях, когда быстрое затухание колебаний нежелательно или увеличивать, чтобы погасить возникающие колебания (для этого применяются различные "глушители" в том числе, воздушные или масляные демпферы).

Логарифмическим декрементом затухания называется безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения двух значений амплитуд колебаний, отличающихся по времени на период:

$$\lambda = \ln \frac{A_o e^{-\delta t}}{A_o e^{-\delta(t+T)}} = \ln e^{\delta T} = \delta T\,. \tag{1.9}$$

Как видно, между двумя характеристиками затухания: λ и δ существует простая связь; обе они характеризуют убыль амплитуды колебаний со временем:

$$A_t = A_o e^{-\delta t} = A_o e^{-\lambda \frac{t}{T}}\,.$$

Логарифмический декремент затухания получает наглядный физический смысл, если выразить его через число колебаний N_e, за которое амплитуда уменьшается в e раз:

$$N_e = \frac{\tau}{T}\,.$$

Тогда

$$\lambda = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}\,, \tag{1.10}$$

то есть *логарифмический декремент обратен числу колебаний, соответствующих убыли амплитуды в e раз.*

Пример: при λ маятника равном 0,02 амплитуда колебаний уменьшается в e раз после 50 полных колебаний. Если известен период колебаний, можно рассчитать δ и τ.

2. Описание установки

В работе используется специальный подвес шарика для обеспечения его колебаний в одной плоскости (плоских колебаний). Верхние концы нити прикреплены к кронштейну на расстоянии друг от друга.

Необходимую для расчетов длину нити ℓ следует измерять от нижнего края кронштейна до центра тяжести шарика по вертикали. При правильном расположении измерительной линейки достаточно однократного измерения ℓ.

3. Порядок выполнения работы

Задание 1. Определение ускорения силы тяжести.

Для расчета g_i используется выражение (1.4), применимое при малых углах отклонения φ. Экспериментальное значение периода колебаний в воздухе T находится в серии опытов как отношение

$$\frac{t}{N},$$

где t — время некоторого числа полных колебаний. В этом случае справедливо равенство:

$$\frac{t}{N} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,.$$

После несложного преобразования получается расчетная формула для искомой величины:

$$g_i = \frac{4\pi^2 \ell N^2}{t_i^2}\,. \tag{3.11}$$

Согласно общему правилу получения адекватных результатов серии опытов измерения следует повторять в одних и тех же условиях, в данном случае — при одном и том же N. При наличии времени можно провести серию измерений при другом N', обработать результаты по той же схеме с помощью коэффициентов Стьюдента и сравнить их.

Рекомендации к проведению опытов:

отклонить маятник на небольшой угол $(10^\circ - 15^\circ)$, приготовить секундомер, включить его в момент прохождения шариком крайнего положения при движении, например, вправо, отсчитать определенное число отклонений и выключить секундомер при N-ом максимальном отклонении шарика вправо;

записать полученное значение времени t_i в таблицу 1,

повторить опыт 3-5 раз с тем же значением N.

Расчеты следует проводить следующим образом:

в каждой строке таблицы 1 рассчитать g_i, округляя результат до сотых, при этом постоянный коэффициент в формуле (3.11) следует вычислить один раз и при неизменных ℓ и N делить его на t_i^2 в каждой строке, найти сумму и среднее значение ускорения, далее заполнить вертикальные столбцы таблицы, округляя результаты; обработать их с помощью коэффициентов Стьюдента, записать результат и сделать выводы относительно его достоверности и применимости модели математического маятника к экспериментальной установке в данной работе.

Таблица 1

$\ell =$; $N =$.

№ опыта	t_i, с	g_i, м/c^2	Δg_i (м/c^2)	$(\Delta g_i)^2$, м$^2/c^4$
1				
2				
3				
4				
5				
Сумма	X		X	
Среднее	X		X	X

Задание 2. Определение логарифмического декремента затухания.

Искомая величина λ находится на основании ее определения и расчетная формула имеет вид:

$$\lambda = \ln \frac{A_t}{A_{t+T}} . \tag{3.12}$$

Рекомендации к проведению опытов:

вывести шарик, наполовину погруженный в воду, из положения равновесия; с помощью специальной линейки с миллиметровыми делениями и нулем посередине (в начальный момент времени он должен располагаться против центра тяжести шарика) измерить амплитуды нескольких последовательных отклонений в одном направлении.

Результаты измерений занести в таблицу 2;

рассчитать несколько значений отношения амплитуд: $A_1 : A_2$, $A_2 : A_3$, $A_3 : A_4$ и т.д., найти λ_i как натуральный логарифм полученных отношений, а затем сумму и среднее значение $\overline{\lambda}$. *Обработать результаты* и записать искомую величину в виде:

$$\lambda = \overline{\lambda} \pm \Delta\lambda_{\text{дов.}}$$

с надежностью

$$\alpha = \qquad ,$$

рассчитать относительную погрешность измерений;

сделать выводы относительно полученного результата, рассчитать N_e по среднему значению λ.

Таблица 2

№ опыта	A_t	$\dfrac{A_t}{A_{t+T}}$	λ_i	$\Delta\lambda_i$	$(\Delta\lambda_i)^2$
1					
2					
3					
4					
5					
Сумма	X	X		X	
Среднее	X	X		X	X

4. Контрольные вопросы

1. Уравнения и характеристики свободных собственных колебаний.
2. Сущность метода определения ускорения силы тяжести в данной работе, физический смысл g.
3. Уравнения и характеристики затухающих колебаний. Физический смысл коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания.
4. Сущность экспериментального метода определения λ в данной работе.

5. Дополнительные задания

1. Определить на опыте период затухающих колебаний, рассчитать δ по средним значениям λ и T; найти τ.
2. Сравнить периоды колебаний в воздухе задание 1 и в воде, сопоставить характеристики затухания λ, δ, N_e и τ в двух средах.

Составила доц. Т.Н. Спиридонова. 2009 г.