Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

Кафедра общей физики
Лаборатория молекулярной физики

Лабораторная работа № 5

Изучение статистических закономерностей на доске Гальтона

Ярославль
2007

Оглавление

1. Литература . . . 3
2. Вопросы для подготовки к работе . . . 3
3. Краткая теория . . . 3
4. Выполнение работы . . . 7
   Задание 1. . . . 7
   Задание 2. . . . 9
   Задание 3. . . . 12
5. Содержание отчета . . . 12
6. Контрольные вопросы . . . 12

Лабораторная работа № 5

Изучение статистических закономерностей на доске Гальтона

Цель работы:

– экспериментальное изучение нормального распределения,
– сопоставление нормального распределения и распределения молекул идеального газа по скоростям.

Приборы и принадлежности: доска Гальтона, сыпучее вещество (шарики), линейка, миллиметровая бумага.

1. Литература

1. Детлаф А.А. Курс общей физики. М., 2007.
2. Савельев И.В. Курс общей физики. т. 1. СПБ., 2007.

2. Вопросы для подготовки к работе

1. Некоторые понятия теории вероятности: вероятность случайного события, достоверное событие, функция распределения или плотность вероятностей. Понятие о законах статистических распределений. Особенности нормального распределения (Гаусса).
2. Скорости газовых молекул. Закон распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), по составляющим скорости, по относительным значениям скорости. Аналитическое и графическое выражение распределений Гаусса и Максвелла.

3. Краткая теория

В работе на опыте исследуются статистические закономерности, которые наблюдаются в целом ряде явлений, в том числе во многих явлениях микромира. В области молекулярных явлений, например, им подчиняется распределение молекул идеального газа по скоростям и энергиям, если газ находится в равновесном состоянии.

Для этого типа закономерностей характерны два момента: во-первых, наличие большого, но конечного числа однородных объектов; во-вторых, то, что значение скорости молекулы газа не может быть определено однозначно: оно зависит от большого числа необходимых и случайных факторов. Однако, хотя значение скорости отдельной молекулы случайная величина, для большого числа молекул существует определенный закон их распределения по скоростям: скоростью в каждом возможном интервале значений обладает совершенно определенное число молекул при данной температуре.

В статистической теории существует понятие функции распределения, с помощью которой можно рассчитать число молекул dN из общего числа их N, имеющих относительную скорость в некотором бесконечно малом интервале скоростей dc:

$$f(c) = \frac{dN}{Ndc}\,.$$

Наиболее общие количественные стороны статистических закономерностей изучаются теорией вероятности. Отношение $\frac{dN}{N}$ в этой теории называется **вероятностью случайного события**, а $f(c)$ **плотностью вероятности**. Отношение $\frac{dN}{N}$ одновременно является относительным числом молекул, имеющих значения относительной скорости в бесконечно малом интервале значений dc и вероятностью того, что некоторая молекула имеет значение относительной скорости в интервале dc. Это отношение рассчитывается так:

$$\frac{dN}{N} = f(c)dc\,.$$

Функция распределения молекул газа по скоростям была найдена английским физиком Д. Максвеллом и носит его имя. Для относительных значений скорости она не зависит от рода газа и его температуры и имеет вид:

$$f(c) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2} c^2\,, \qquad (3.1)$$

где e — основание натуральных логарифмов, $c = \frac{v}{v_{\text{в}}}$ — относительная скорость, $v_{\text{в}}$ — наиболее вероятная скорость, v — некоторое значение скорости молекул.

На рис. 3.1 представлен график распределения Максвелла для относительных значений скорости (3.1). По оси абсцисс отложены возможные значения скорости c, а по оси ординат — соответствующие им значения $f(c)$. **Максимум функции соответствует наиболее вероятной скорости молекул,** при этом $c = 1$. Число молекул с нулевой скоростью равно нулю; малое число молекул имеет и очень большие скорости по сравнению с наиболее вероятной. Наибольшее число молекул имеет скорости, близкие к наиболее вероятной. График несимметричен относительно максимума, значит, число молекул со скоростями, большими наиболее вероятной, превосходит число их со скоростями, меньшими наиболее вероятной.

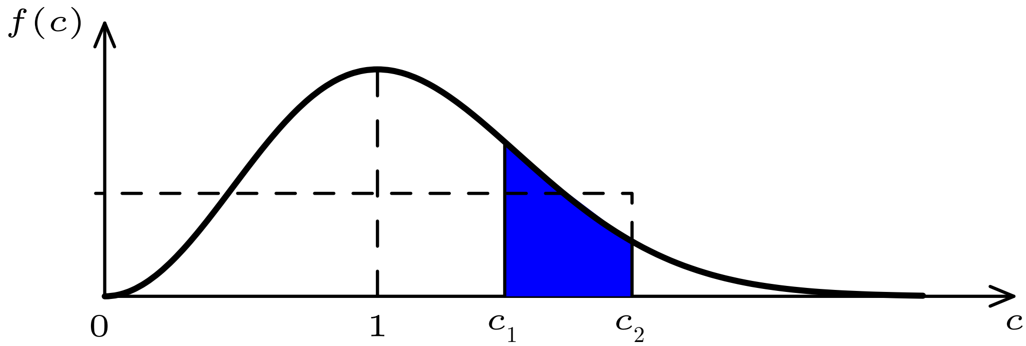

Рис. 3.1

Число молекул ΔN со скоростями в **некотором конечном интервале значений** $\Delta c = c_1 - c_2$ (отношение $\frac{\Delta N}{N}$ численно равно площади фигуры, заштрихованной на рис. 3.1.) находится интегрированием:

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{c_1}^{c_2} f(c)dc\,,$$

а для небольшого интервала значений — как площадь прямоугольника на рисунке 3.1:

$$\frac{\Delta N}{N} = f(c)\Delta c\,.$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой и осью абсцисс, равна единице. Действительно интеграл:

$$\int_0^\infty f(c)dc = \int_0^\infty \frac{dN}{N}$$

численно равный площади фигуры под графиком функции, это вероятность того, что относительная скорость некоторой молекулы имеет значение в области от нуля до бесконечности. В терминах теории вероятностей это **достоверное событие,** вероятность которого по определению равна единице. Таким образом, $\int\limits_0^\infty f(c)dc = 1$, что справедливо для всякой функции распределения и называется условием нормировки.

В данной работе для изучения особенностей статистических закономерностей используется нормальное распределение (Гаусса). Такой вид имеет распределение молекул идеального газа по составляющим скоростей v_x, v_y, v_z. Оно моделируется на доске Гальтона — механической модели, воспроизводящей картину случайных отклонений от среднего расположения сыпучего вещества на ней.

Нормальное распределение в общем случае имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{3.2}$$

где x — случайная переменная величина, σ^2 — постоянная величина, называемая дисперсией распределения, a — математическое ожидание.

Функция, имеет максимум при $x = a$. Это значение функции называется **наиболее вероятным.**

Нормальное распределение имеет место в тех случаях, когда случайная величина зависит от большого числа факторов, которые могут вносить с равной вероятностью положительные и отрицательные отклонения от среднего (наиболее вероятного) значения величины. Примером такого распределения является распределение случайных ошибок измерений при измерениях.

Рассмотрим влияние параметра σ на форму графика. На рисунке 3.2 показан вид таких графиков для $f(x)$ при различных σ при $a = 0$.

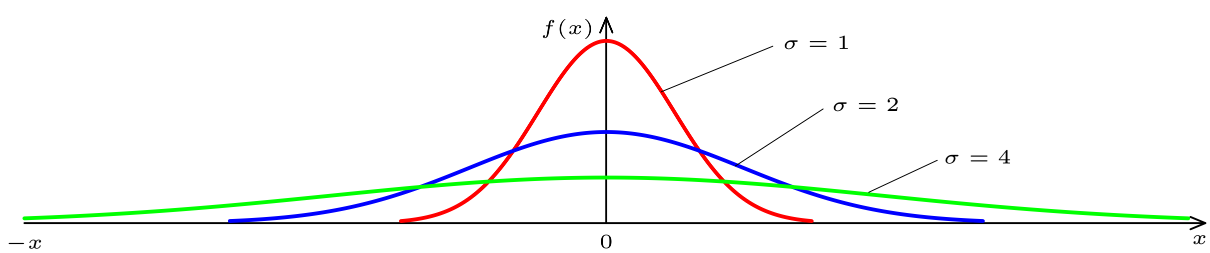

Рис. 3.2

Как видно, чем меньше σ, тем больший максимум имеет кривая, тем круче она идет. Это означает, что вероятность попадания в некоторый интервал больше для той случайной величины, распределенной по нормальному закону (с параметром $a = 0$), для которой величина σ меньше. Следовательно, σ можно считать характеристикой разброса случайной величины x.

Если $a \neq 0$ кривая сдвигается вправо или влево в зависимости от знака a.

Площадь, ограниченная любой из этих кривых, остается равной единице.

В данной работе нужно на опыте определить $\sigma_{\text{экс.}}$ и получить конкретный вид функции распределения $f(x)_{\text{э}}$.

Сходные изменения хода графика существуют и для функции распределения Максвелла молекул идеального газа по абсолютным значениям скоростей при изменении абсолютной температуры или рода газа, принимаемого за идеальный. Распределение Максвелла в этом случае имеет вид:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 \,,$$

где m — масса молекулы, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана.

4. Выполнение работы

Задание 1. Построение графиков функции нормального распределения $f(x)$ при различных σ ($\sigma = 1,\ \frac{1}{2},\ 2$).

Построение этих графиков упрощается, если воспользоваться значениями функции:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \,, \tag{4.3}$$

которая совпадает с $f(x)$ при $\sigma = 1$, $a = 0$. Таблица значений этой функции при различных z приводится ниже.

Масштабные коэффициенты для z и $\varphi(z)$ при других значениях σ определяются из условия равенства единице площади, ограниченной кривой и осью абсцисс.

Сравнивая $\varphi(z)$ и $f(x)$ (при $a = 0$), имеем:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(z)\,, \tag{4.4}$$

здесь

$$z = \frac{1}{\sigma}x\,, \quad x = \sigma z\,. \tag{4.5}$$

Для построения графиков по известным z и $\varphi(z)$ нужно найти соответствующие им значения x и $f(x)$ при каждом σ.

График для $\sigma = 1$ строится непосредственно по значениям $\varphi(z) = f(x)$ следующей таблицы:

z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$	z	$\varphi(z)$
0,0	0,3989	1,0	0,2420	2,0	0,0540	3,0	0,0044
0,1	0,39702	1,1	0,2179	2,1	0,0440	3,1	0,0033
0,2	0,3910	1,2	0,1949	2,2	0,0355	3,2	0,0024
0,3	0,3814	1,3	0,1714	2,3	0,0283	3,3	0,0017
0,4	0,3683	1,4	0,1497	2,4	0,0224	3,4	0,0012
0,5	0,3521	1,5	0,1295	2,5	0,0175	3,5	0,0009
0,6	0,3332	1,6	0,1109	2,6	0,0136	3,6	0,0006
0,7	0,3123	1,7	0,0940	2,7	0,0104	3,7	0,0004
0,8	0,2897	1,8	0,0790	2,8	0,0079	3,8	0,0003
0,9	0,2661	1,9	0,0656	2,9	0,0060	3,9	0,0002

По 10-15 значениям $x = z$ и соответствующим им значениям $f(x) = \varphi(z)$ нужно построить график функции $f(x)$ при $\sigma = 1$. Так как функция симметрична относительно максимума, достаточно построить половину графика и симметрично отобразить ее для отрицательных значений x. Все три графика строятся на одном листе миллиметровой бумаги. Удобно взять масштаб **по оси** X**:** 2 см =1, **по оси** Y**:** 1 см = 0,1.

Для построения **графика при** $\sigma = \frac{1}{2}$ нужно сначала заполнить таблицу значений $f(x)$ при различных x. Для этого из таблицы $\varphi(z)$ нужно брать четные значения z, в соответствии с (4.5) делить их на два, получать x. Значения $\varphi(z)$, соответствующие данным z, домножать на два, получая $f(x)$.

$$\sigma = \frac{1}{2}$$

x_i	0	0,1	0,2	0,3	...
$f(x_i)$	0,7978	0,782	0,7366	0,6664	...

Таблица значений для **графика при** $\sigma = 2$ заполняется так: в соответствии с (4.5) для вычисления x значения z увеличиваются в два раза, а соответствующие им значения $\varphi(z)$ делятся на два.

$$\sigma = 2$$

x_i	0	0,4	0,8	1	...
$f(x_i)$	0,1994	0,1955	0,1842	0,176	...

Задание 2. Экспериментальная часть

Для изучения на опыте нормального распределения используется доска Гальтона. В верхней её части имеется отверстие, в которое с помощью воронки запускаются шарики или другие однородные сыпучие тела.

Пронаблюдайте за движением отдельных шариков. Убедитесь, что при одинаковых начальных условиях движение их происходит по-разному и заканчивается попаданием в разные ячейки. Однако, если запустить большое количество шариков небольшими порциями, в распределении их по ячейкам всегда наблюдаются совершенно определенные закономерности: наибольшее число их оказывается в средней (нулевой) ячейке, и чем дальше расположена некоторая ячейка от нулевой, тем меньше число шариков попадет в неё.

Хотя установка имеет недостатки и в распределении шариков по ячейкам наблюдаются отклонения от нормального закона — флуктуации, — картина получается наглядной.

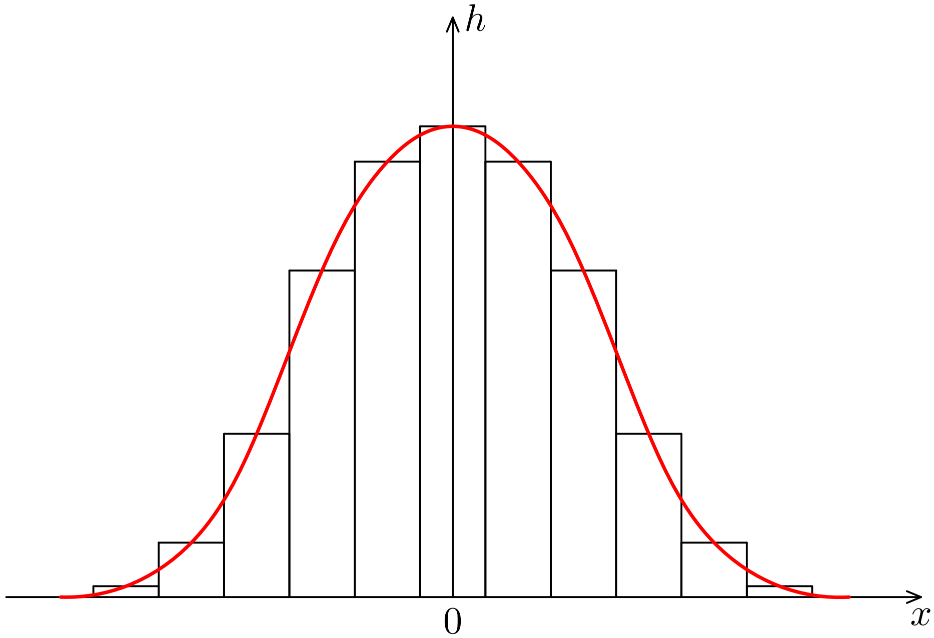

Рис. 4.1

В этой части работы нужно засыпать шарики так, чтобы центральную ячейку они заняли доверху. Задача заключается в построении ступенчатой диаграммы (гистограммы), вид которой показан на рис. 4.1 для идеального случая, а затем построения графика полученной на опыте функции распределения $f(x)_э$. После этого требуется из сравнения с теоретическими графиками $f(x)$ определить значение $\sigma_{э.}$ и записать аналитический вид полученной экспериментально функции распределения.

Опыт проводится так:

1. Засыпают шарики небольшими порциями до полного заполнения центральной или нулевой ячейки.
2. Измеряют линейкой с миллиметровыми делениями высоту заполнения h_i каждой ячейки.
3. Результаты измерений заносят в таблицу:

№ ячейки	-12	-11	...	-1	0	$+1$	...	$+11$	$+12$
h_i, см									

   Ширина каждой ячейки равна 1,5 см.

4. По этим данным строится гистограмма.

5. Для графического изображения экспериментальной функции распределения нужно найти значения $f(x)_э$, с учетом её нормирования, т.е. чтобы площадь, ограниченная ее и осью абцисс, была равна 1. Площадь, заполненная шариками в i-той ячейке, равна $h_i \Delta x$, где $\Delta x = 1,5$ см — ширина ячейки.

   Вся площадь, заполненная шариками на доске Гальтона, равна $\sum\limits_i h_i \Delta x = \Delta x \sum\limits_i h_i$, обозначим её S. Тогда относительное число шариков, попавших в i ячейку, можно выразить так:

$$\frac{\Delta N_i}{N} = \frac{h_i \Delta x}{S},$$

   где ΔN_i — число шариков в i ячейке,
   N — их общее число.

   Отсюда следует, что

$$f(x_i)_э = \frac{\Delta N_i}{N \Delta x} = \frac{h_i \Delta x}{S \Delta x} = \frac{h_i}{S}. \qquad (4.6)$$

   Таким образом, для нахождения значений $f(x)_э$, нужно подсчитать $S = \Delta x \sum\limits_i h_i$, а затем $f(x_i)_э$ для каждого x_i по формуле (4.6) и заполнить таблицу результатов эксперимента:

№ ячейки	-12	-11	...	-1	0	$+1$	...	$+11$	$+12$
x_i, см									
$f(x_i)_э$, см$^{-1}$									

6. На том же листе миллиметровой бумаги, где построены теоретические графики, в том же масштабе нужно построить экспериментальный график и из сравнения максимумов $f(x)_э$ и теоретического графика при $\sigma = 1$ определить $\sigma_{э.}$. Записать аналитический вид экспериментальной функции распределения $f(x)_э$.

Пример 1. Максимальное значение экспериментальной функции распределения $f(x)_{э.}$ получилось равным 0,08. Максимум теоретического графика при $\sigma = 1$ составляет 0,4. Значит, для полученной функции дисперсия $\sigma_{э.} = 0,4 : 0,08 = 5$.

Функция симметрична относительно максимума, значит, $a = 0$.

Тогда искомая функция $f(x)_{э.}$ в соответствие с (3.2) имеет следующий вид:

$$f(x)_{э.} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{50}} .$$

Задание 3. Определение относительного числа частиц в некоторой ячейке.

Требуется определить относительное число шариков, попавших, например, в третью ячейку. Это число можно рассчитать с помощью экспериментального графика или таблицы значений $f(x)_{э.}$:

$$\frac{\Delta N_i}{N} = f(x_i)_{э.} \Delta x .$$

Пример 2. Для первой ячейки получилось, что $f(x_1)_{э.} = 0,06$; $\Delta x = 1,5$ см. Тогда

$$\frac{\Delta N_1}{N} = 0,06 \cdot 1,5 \cdot 100\% = 9\%.$$

Аналогично можно рассчитать $\frac{\Delta N_i}{N}$ для любой ячейки. Подумайте, как можно найти число шариков ΔN_i, попавших в некоторую ячейку.

5. Содержание отчета

Название работы, ее цель, приборы и принадлежности. Графики функции нормального распределения $f(x)$ при различных σ, гистограмма, таблица экспериментальных данных и экспериментальный график, результаты расчетов, аналитический вид полученной функции.

6. Контрольные вопросы

1. Назовите особенности статистических закономерностей.
2. Дайте определение вероятности случайного события. Какие значения она может принимать? Чему равна вероятность достоверного значения?
3. Функция рапределения, ее физический смысл.

4. Укажите общие и отличные черты в ходе графиков функции распределения Гаусса $f(x)$ и Максвелла $f(v)$. Под влиянием каких факторов их ход может меняться? Что при этом остается неизменным?

5. Чему равна площадь, ограниченная осью абсцисс и графиком функции распределения? Докажите это.

6. Что нужно знать, чтобы подсчитать относительное число шариков в каждой ячейке? Укажите способ нахождения ΔN_i — числа шариков в ячейке.

7. Как подсчитать относительное число молекул со скоростями в некотором бесконечно малом интервале значений dv или вероятность того, что значение скорости некоторой молекулы находится в этом интервале? Как найти указанные величины для конечного интервала значений?