ГЛАВА 5. КОНЕЧНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

§ I.I. Задачи и теоремы

Инцидентностной структурой называется тройка $\langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I \rangle$, где $\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset$, $I \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Элементы множеств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{L}$ называются точками и прямыми, соответственно, а I - задает отношение инцидентности.

Учение об инцидентностных структурах восходит к некоторым классическим задачам комбинаторного анализа, поставленным в работах Л.Эйлера, Т.Киркмана, Я.Штейнера.

Наиболее изученными видами инцидентностных структур являются проективные плоскости.

<u>Проективной плоскостью</u> называется инцидентностная структура $\pi = \langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I \rangle$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

P_1. Для любых двух различных точек P и Q существует единственная прямая ℓ такая, что $PI\ell$ и $QI\ell$.

P_2. Для любых двух различных прямых ℓ и m существует единственная точка P такая, что $PI\ell$ и PIm.

P_3. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.

Инцидентностные структуры $\langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I \rangle$, рассматриваемые в этом разделе, будут конечные, т.е. такие, что $\mathcal{P}, \mathcal{L}$, а следовательно, и I - конечные множества. Интерес к конечным инцидентностным структурам обусловлен тем, что соответствующая теория нашла непосредственные выходы в прикладные области математики.

Проективная плоскость $P(2,n)$ называется конечной проективной плоскостью порядка n, если в ней существует прямая, на которой лежит $n+1$ точка. В $P(2,n)$ на каждой прямой лежит $n+1$ точка и через каждую точку проходит $n+1$ прямая. Число всех точек равно числу прямых и равно n^2+n+1. Простейшая из конечных проективных плоскостей, плоскость Фано $P(2,2)$, состоит из семи точек: A, B, C, D, E, F, G и семи прямых: $\{A,B,C\}, \{A,D,F\}, \{A,E,G\}, \{B,D,G\}, \{B,E,F\}, \{C,D,E\}, \{C,F,G\}$ (Рис. 30).

Остается невыясненным, для каких значений n существует конечная проективная плоскость $P(2,n)$. Доказано существование конечной проективной плоскости, порядок которой есть степень простого числа (см. [I]*). В работе [5] доказано сущест-

*) Список литературы дается в конце данной главы

вование проективных плоскостей $P(2,n)$ для весьма широкого класса чисел n. В ней установлено, что если n сравнимо с I или 2 по модулю 4 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число, сравнимое с 3 по модулю 4, то плоскость $P(2,n)$ не существует. Отсюда следует отсутствие плоскостей для $n = 6, I4, 2I, 22 \ldots$ Вопрос относительно $n = I0, I2, I5, I8 \ldots$ остается открытым.

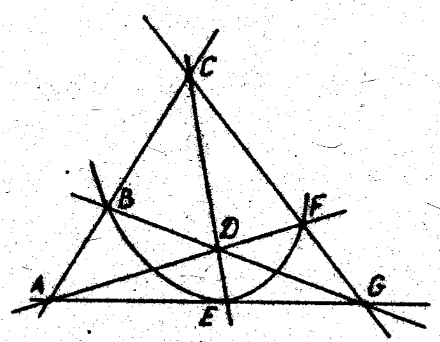


Рис. 30

Важной задачей теории конечных проективных плоскостей является нахождение подплоскостей заданной плоскости $P(2,n)$ и изучение их свойств. Наиболее известным в этом направлении является результат: если $P(2,m)$ является собственной подплоскостью конечной проективной плоскости $P(2,n)$, то $m^2+m \leq n$ или $m^2=n$ (см. [4]).

Коллинеация конечной проективной плоскости $P(2,n)$ является подстановкой множества точек и подстановкой множества прямых плоскости $P(2,n)$, причем эти подстановки подобны (см. [4]). Доказано, что конечная проективная плоскость является дезарговой, если она имеет группу коллинеаций, дважды транзитивную на ее точках. Группа коллинеаций дезарговой плоскости $PG(2,p^h)$ имеет порядок, равный $h(n^2+n+1)(n^2+n)n^2(n-1)^2$. Группа коллинеаций недезарговой плоскости $P(2,n)$ имеет порядок, не превосходящий $n^s(n^2+n+1)(n^2+n)n^2(n-1)^2$, где $s \leq \log_2 n$. Порядки групп коллинеаций известных недезарговых плоскостей не превосходят порядков групп коллинеаций дезарговых плоскостей того же порядка.

Конечную проективную плоскость можно задать таблицей, строки которой обозначают прямые, а столбцы – точки плоскости. Если точка принадлежит прямой, то на пересечении соответствующих строки и

столбца запишем знак *. Нетрудно убедиться, что приводимая ниже таблица (Рис. 31) задает проективную плоскость третьего порядка

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}
l_1	*	*		*						*			
l_2		*	*		*						*		
l_3			*	*		*						*	
l_4				*	*		*						*
l_5	*				*	*		*					
l_6		*				*	*		*				
l_7			*				*	*		*			
l_8				*				*	*		*		
l_9					*				*	*		*	
l_{10}						*				*	*		*
l_{11}	*						*				*	*	
l_{12}		*						*				*	*
l_{13}	*		*						*				*

Рис. 3I

Проективные плоскости $PG(2,n)$ над полями Галуа $GF(n)$ – наиболее изученные конечные плоскости. В $PG(2,n)$ справедливы теоремы Дезарга и Паппа. Имеет место и обратное утверждение: дезаргова конечная проективная плоскость порядка n изоморфна плоскости $PG(2,n)$ над полем Галуа $GF(n)$. Следовательно, дезаргова конечная проективная плоскость является папповой.

Отличительной особенностью дезарговой плоскости $PG(2,n)$ является то, что по теореме Зингера она обладает коллинеацией порядка n^2+n+1, циклической на точках и прямых (см. [6]). Этот результат дает возможность представить плоскость $PG(2,n)$ в виде циклической таблицы. Такое представление $PG(2,n)$ заключается в том, что точки плоскости, занумерованные натуральными числами от 1 до n^2+n+1, располагаются в прямоугольной таблице из $n+1$ строки и n^2+n+1 столбца таким образом, что каждый столбец, обозначающий прямую со всеми точками на ней, получается прибавлением к каждому элементу предыдущего столбца единицы по модулю n^2+n+1.

Например, представление плоскости $P(2,2)$ имеет вид

I	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	I
4	5	6	7	I	2	3

Плоскость $PG(2,n)$ допускает следующую интерпретацию в евклидовой плоскости: точками плоскости $PG(2,n)$ являются вершины правильного (n^2+n+1)-угольника, вписанного в окружность, а прямыми – множество $(n+1)$-вершинников, полученных вращением вокруг центра окружности одного, все длины сторон и диагоналей которого различны, на углы $\varphi_i = \frac{360^\circ}{n^2+n+1}\cdot i$, где $i = 1,2,\ldots, n^2+n$ (см. [2]). Например, $PG(2,3)$ допускает следующее представление (Рис. 32). Здесь множество прямых $PG(2,3)$ – I3 четырехвершинников, полученных вращением $A_1A_2A_4A_{10}$ вокруг центра окружности на углы $\varphi_i = \frac{360^\circ}{13}\cdot i$, где $i = 1,2,\ldots, 12$.

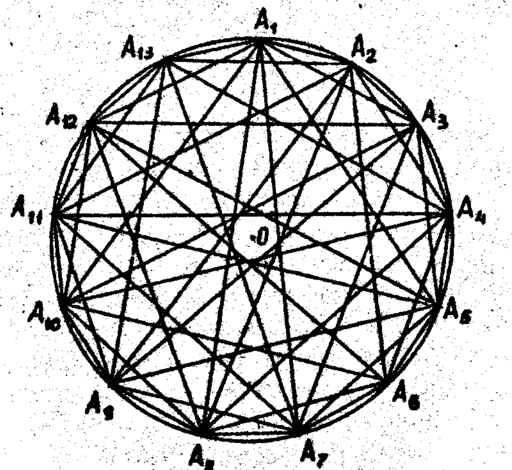


Рис. 32

Плоскости $P(2,n)$, где $n \leq 8$, единственны с точностью до изоморфизма – это плоскости Галуа. Для $n=9$ известны четыре неизоморфные плоскости (см. [6]).

Известны и другие конечные геометрии: аффинные и гиперболические плоскости, частичные геометрии и др.

Инцидентностная структура с параллельностью $A = \langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I, \parallel \rangle$ называется <u>аффинной плоскостью</u>, если выполняются следующие условия:

A_1. Для любых двух различных точек P и Q существует единственная прямая ℓ такая, что $PI\ell$ и $QI\ell$.

A_2. Для любой точки P и любой прямой m существует единственная прямая ℓ такая, что $PI\ell$ и $\ell \parallel m$.

A_3. Если для прямых ℓ и m не существует точки, инцидентной одновременно ℓ и m, то $\ell \parallel m$.

A_4. Существуют три точки, не инцидентные одной прямой.

Между проективными и аффинными плоскостями существует тесная связь. Если из проективной плоскости удалить некоторую прямую ℓ и инцидентные о ней точки, а отношение параллельности определить на множестве $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \setminus \{\ell\}$ оставшихся прямых следующим образом:

$$(m \parallel n) \Longleftrightarrow ((\exists P \in \mathcal{P})\ PI\, m, n, \ell),$$

то инцидентная структура с параллельностью $A_\ell = \langle \mathcal{P}', \mathcal{L}'; I, \parallel \rangle$, где $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{P / PI\ell\}$, $I' = (\mathcal{P}' \times \mathcal{L}') \cap I$, будет аффинной плоскостью.

Заметим, что при различном выборе удаляемой прямой из данной проективной плоскости получаются, вообще говоря, неизоморфные аффинные плоскости.

В конечной аффинной плоскости порядка n имеется n^2+n пучков по $n+1$ прямых в каждом, n^2 точек и n^2+n прямых.

<u>Гиперболической плоскостью</u> называется инцидентностная структура $H = \langle \mathcal{P}, \mathcal{L}; I \rangle$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

H_1. Две различные точки инцидентны единственной прямой.

H_2. Если точка P не инцидентна прямой ℓ, то существуют по крайней мере две прямые, инцидентные P и не пересекающие ℓ.

В конечной проективной плоскости $P(2,n)$ нечетного порядка множество внутренних точек овала c и прямые, не являющиеся касательными к c, образуют конечную гиперболическую плоскость (овал - это $n+1$ точка, никакие три из которых не лежат на прямой).

Представляет определенный интерес рассматривать конечные гиперболические плоскости с m точками на каждой прямой и $(n+m)$ прямыми, проходящими через любую точку. Такие плоскости H называются регулярными гиперболическими плоскостями или $\langle m,n \rangle$ - плоскостями. Необходимым условием существования $\langle m,n \rangle$ - плоскости является делимость $n(n-1)$ на m. Если $m > 2$, то $\langle m,2 \rangle$ - плоскость не существует, а $\langle 2,n \rangle$ - плоскость является простейшей регулярной плоскостью, состоящей из $n+3$ точек и C^2_{n+3} прямых, состоящих из всевозможных пар точек. Достаточное условие существования $\langle m,n \rangle$ - плоскостей неизвестно.

<u>Частичная геометрия</u> (конечная) - инцидентностная структура $S = \langle \mathcal{P},\mathcal{L};I \rangle$, в которой отношение инцидентности между точками и прямыми симметрично и удовлетворяет следующим аксиомам:

S_1. Каждая точка инцидентна r прямым $(r \geqslant 2)$, и две различные точки инцидентны не более чем одной прямой;

S_2. Каждая прямая инцидентна k точкам $(k \geqslant 2)$;

S_3. Через каждую точку, не инцидентную прямой ℓ, проходит ровно t прямых $(t \geqslant 1)$, пересекающих ℓ.

Если частичная геометрия состоит из v точек и b прямых, то $v = k[(k-1)(r-1)+t]/t$ и $b = r[(k-1)(r-1)+t]/t$. Необходимыми условиями существования такой частичной геометрии являются: делимость $(k-1)(r-1)kr$ на $t(k+r-t-1)$; $k(k-1)(r-1)$ на t и $r(k-1)(r-1)$ на t (см. [3]).

Конечные проективные, аффинные и регулярные гиперболические плоскости являются частичными геометриями.

162. В городе устанавливают автобусные маршруты так, чтобы любые два района были соединены одним и, в целях экономии, только одним маршрутом. Докажите, что если в городе больше одного маршрута, то число маршрутов не меньше числа районов. В каком случае число районов равно числу маршрутов?

163. Хлебосольный хозяин, имеющий семь самых близких друзей, решил в каждый день недели принимать друзей так, чтобы любые два его друга встретились на неделе друг с другом один и только один раз. Возможно ли это?

164. $\mathcal{B}$ есть множество n^2+n+1 точек и неизвестное число прямых таких, что через любые две точки проходит единственная прямая и любая прямая содержит $n+1$ точку. Покажите, что через каждую точку проходит $n+1$ прямая.

165. Докажите, что множество точек и прямых, удовлетворяющее условию предыдущей задачи, при $n \geqslant 2$ является проективной плоскостью.

166. $\mathcal{B}$ является множеством n^2+n+1 точек и n^2+n+1 прямых $(n \geqslant 2)$ таким, что любая прямая инцидентна с $n+1$ точкой и любые две различные прямые имеют единственную общую точку. Покажите, что $\mathcal{B}$ является проективной плоскостью.

167. Докажите, что аксиоматика проективной плоскости непротиворечива, неполна и независима.

168. Если p - простое число, то можно получить конечную проективную плоскость $PG(2,p)$, в которой координаты принадлежат полю Галуа $GF(p)$ вычетов по модулю p (например, "конечная арифметика" $GF(3)$ состоит из символов 0,1,2, которые складываются и перемножаются так же, как целые числа, за исключением того, что $1+2=0$ и $2 \times 2 = 1$). Найдите координаты точек и уравнения прямых плоскости $PG(2,3)$.

Такие конечные плоскости и аналогичные конечные n-мерные пространства были открыты Джино Фано. О.Веблен и У.Буссей обобщили эту идею на случай $PG(n,p^n)$.

169. Исходя из правильного 13-угольника (21-угольника), вписанного в окружность, найдите путем перебора его максимально разносторонний подмногоугольник (все стороны которого различны).

170. Составьте таблицу инцидентности для $PG(2,3)$, предполагая, что P_r инцидентна ℓ_s тогда и только тогда, когда $r+s \equiv 0,1,3$ или $9 \pmod{13}$.

171. В $PG(2,3)$ четыре точки на прямой образуют гармоническое множество в любом порядке.

172. В $PG(2,3)$ найти пару вписанных друг в друга четырехугольников (т.е. образующих конфигурацию 8_3).

173. Докажите, что в $PG(2,3)$ корреляция $P_i \to \ell_i$ является полярным соответствием, которое определяет коническое

сечение, состоящее из четырех точек P_0, P_7, P_8, P_{11} и четырех прямых $\ell_0, \ell_7, \ell_8, \ell_{11}$.

174. Докажите, что в $PG(2,3)$ преобразование $\pi: P_i \to P_{i+1}$ (сложения индексов производится по $mod\ 13$) является проективной коллинеацией порядка 13. Будет ли проективной коллинеацией преобразование $\varphi: P_i \to P_{3i}$?

175. Теорема Зингера. В плоскости $PG(2,q)$ существует хотя бы одна циклическая коллинеация периода q^2+q+1. Докажите теорему Зингера для плоскостей $PG(2,2)$, $PG(2,3)$.

176. Можно ли раскрасить точки плоскостей $P(2,2)$, $P(2,3)$, $P(2,4)$ в два цвета, чтобы каждая прямая содержала точки каждого цвета?

177. Найдите число различных треугольников и четырехугольников плоскости $P(2,q)$.

178. Докажите, что множество всех коллинеаций плоскости Галуа порядка $q=p^h$ образует конечную группу, имеющую порядок $h(q^2+q+1)(q^2+q)q^2(q-1)^2$.

179. В $PG(2,q)$ существует q^3-q проективных соответствий на прямой, включая q^2 инволюций, из которых $q(q+1)/2$ - гиперболические и $q(q-1)/2$ - эллиптические.

180. Найдите число всех кривых второго порядка в конечной проективной плоскости $PG(2,q)$.

181. В $P(2,q)$ определите максимальное число перспективных коллинеаций с центром K и осью ℓ.

182. Определите максимальное число точек k -дуги (k - дуга - это множество k точек, никакие три из которых не коллинеарны) плоскости $P(2,q)$.

183. Докажите, что на проективной плоскости нечетного порядка через точку, не принадлежащую овалу, проходит не более двух касательных этого овала. Найдите число внешних точек, через которые проходят две касательные к данному овалу, и число внешних прямых, не пересекающих овал.

184. Докажите, что все касательные $(q+1)$-дуги проективной плоскости четного порядка q пересекаются в одной точке.

185. Докажите, что $(q+1)$- дуга в проективных плоскостях нечетного порядка полная, т.е. не содержится ни в какой k - дуге, а четного - не может быть полной.

186. Доказать, что если $P(2,m)$ - собственная подплоскость плоскости $P(2,n)$, то $n=m^2$ или $n > m^2+m$ (теорема Брука).

187. Докажите, что каждое конечное проективное пространство $PG(n-1,q)$ порядка q и размерности $n-1$ содержит $1+q+q^2+...+q^{n-1}$ точек.

188. Найдите число подпространств четырехмерного проективного пространства порядка q.

189. Докажите, что точки проективного пространства $PG(3,2)$ можно интерпретировать ненулевыми элементами поля Галуа $GF(2^4)$, а прямые - любые два элемента $GF(2^4)$ и их сумма.

190. Как (и можно ли?) расставить 15 школьниц в шеренги, чтобы в каждый день недели ни одна школьница не встречалась с другой в одной шеренге дважды (задача Киркмана о школьницах).

191. Для существования аффинной плоскости $A(2,n)$ порядка n необходимо и достаточно существование полного набора ортогональных латинских квадратов n-го порядка.

192. Докажите, что аффинная плоскость порядка n содержит n^2 точек и n^2+n прямых.

193. В табличном представлении плоскости $P(2,3)$ (см. задачу № 175) удалите произвольную прямую. Покажите, что оставшиеся множества точек и прямых образуют аффинную плоскость $A(2,3)$ третьего порядка.

194. Докажите, что следующая таблица инцидентности

1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4
2	3	4	5	6	7	8	1	5	6	7	8
4	5	6	7	8	1	2	3	0	0	0	0

задает $A(2,3)$. Дайте геометрическую интерпретацию $A(2,3)$, аналогичную $P(2,3)$

195. К космическому полету в 3-х местном корабле готовятся 9 космонавтов. Возможно ли проведение испытаний на психологическую совместимость так, чтобы каждый космонавт

побывал в экипаже с любым другим и притом только один раз? Если это возможно, то сколько экипажей надо сформировать и в скольких испытаниях примет участие каждый космонавт?

196. Докажите, что в $A(2,3)$ "медианы" треугольника параллельны ("серединой" отрезка AB считаем оставшуюся точку прямой (AB))

197. В $A(2,3)$ найдите два четырехугольника, вписанных один в другой.

198. Докажите, что точки аффинного пространства $AG(3,2)$ можно интерпретировать как элементы поля Галуа $GF(2^3)$, прямые – любые два элемента $GF(2^3)$, плоскости – четыре элемента $GF(2^3)$, сумма которых равна нулю (ср. с № 189).

199. Докажите, что необходимым условием существования $\langle m,n \rangle$ -плоскости является делимость $n(n-1)$ на m.

200. Постройте модели $\langle 2,2 \rangle$, $\langle 3,2 \rangle$ и $\langle 3,3 \rangle$ плоскостей.

201. Докажите, что внутренние точки некоторого овала c конечной проективной плоскости нечетного порядка и прямые, не касающиеся c, образуют конечную гиперболическую плоскость (модель Острома).

202. Докажите, что двойственной к частичной геометрии с параметрами (r,k,t) является частичная геометрия с параметрами (k,r,t).

203. Найдите число точек и прямых частичной геометрии с параметрами (r,k,t).

204. Докажите, что внешние точки и внешние прямые овала c проективной плоскости $P(2,q)$ $(q \not\equiv 0 \bmod 2)$ образуют частичную геометрию с параметрами $((q-1)/2,\ (q+1)/2,\ q-3/4)$.

205. Докажите, что внутренние точки и секущие, не пересекающие овал проективной плоскости четного порядка, образуют частичную геометрию с параметрами $(q/2+1, q-1, q/2-1)/(q/2, q+1, q/2)/$.

206. Плоскость $PG(2,2^n)$ с овалом вложена в проективное пространство $PG(3,2^n)$. Докажите, что точки $PG(3,2^n)$ без точек $PG(2,2^n)$ и прямые, касающиеся овала, образуют частичную геометрию с параметрами $(q+2, q, 1)$.

207. Докажите, что проективные, аффинные и регулярные гиперболические плоскости являются частичными геометриями.

Ответы, указания и решения к гл. 5

162. Занумеруем районы $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_m$ и маршруты $b_1, \ldots, b_\ell$. Составим матрицу инцидентности

$$I = (a_{ij}) \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{P}_i \in b_j, \\ 0, & \text{если } \mathcal{P}_i \notin b_j. \end{cases}$$

Тогда

$$I \cdot I^T = \begin{pmatrix} r_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & r_m \end{pmatrix},$$

где r_k – число маршрутов, проходящих через район $\mathcal{P}_k$.

Поскольку в городе больше одного маршрута, то все $r_k > 1$.

$$\det(I \cdot I^T) = \prod_{i=1}^{m}(r_i - 1)\left(\frac{1}{r_1-1} + \frac{1}{r_2-1} + \ldots + \frac{1}{r_m-1}\right)$$ и

следовательно, $\det(I \cdot I^T) \neq 0$.

Предположим, что $\ell < m$ и построим матрицу I_1 размера $m \times m$, добавив к матрице I $(m-\ell)$ столбцов из нулей.

Тогда $I_1 \cdot I_1^T = I \cdot I^T$, но

$$0 = \det(I_1 \cdot I_1^T) = \det(I \cdot I^T) \neq 0.$$

Следовательно, предположение неверно и $\ell \geqslant m$.

Число районов равняется числу маршрутов в двух случаях:

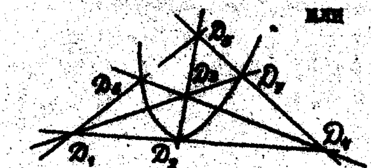
а) существует маршрут, на котором находятся все районы кроме одного;

б) множество районов (точек) и маршрутов (прямых) образуют конечную проективную плоскость.

163. Возможно:

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Суб	Вос
D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7
D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_1
D_4	D_5	D_6	D_7	D_1	D_2	D_3

или



плоскость Фано

164. Рассмотрим произвольную точку $\mathcal{P}$ и прямую ℓ, неинцидентную $\mathcal{P}$. Прямая ℓ содержит $n+1$ точку, каждая из которых с $\mathcal{P}$ однозначно определяет прямую. Следовательно, число $[\mathcal{P}]$ прямых, проходящих через $\mathcal{P}$, не меньше $n+1$. Если допустить, что $[\mathcal{P}] > n+1$, то $\mathcal{B}$ содержит точек больше, чем n^2+n+1.

165. Доказательство пересечения любых двух прямых следует из решения предыдущей задачи.

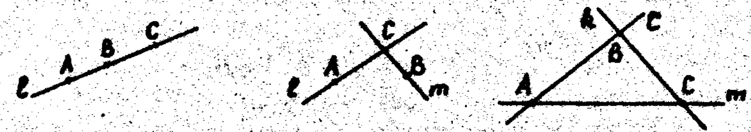
166. $[A,B] \leqslant 1$. Через две точки проходит не более одной прямой, т.к. в противном случае две прямые пересекаются в двух точках.

Если допустить, что существуют точки, через которые не проходит прямая, то число прямых плоскости окажется меньше

$$n^2+n+1 = C^2_{n^2+n+1} / C^2_{n+1}.$$

167. Непротиворечивость и неполнота аксиоматики проективной плоскости доказывается построением неизоморфных моделей. (Например, плоскость Фано (см. задачу № 163) и проективная плоскость над полем действительных чисел).

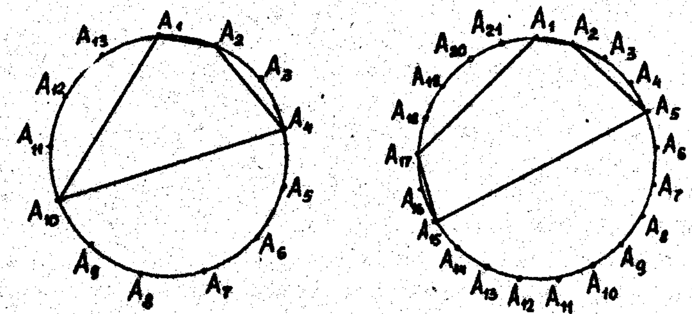
Независимость аксиом показывается на следующих трех моделях:



168. Точки плоскости $PG(2;3)$: (I,0,0), (0,I,0), (0,0,I), (I,I,0), (I,0,I), (0,I,I), (I,2,0), (I,0,2), (0,I,2), (I,I,2), (I,I,2), (I,2,I), (2,I,I).

Уравнения прямых: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_1+x_2=0$, $x_1+x_3=0$, $x_2+x_3=0$, $x_1+2x_2=0$, $x_1+2x_3=0$, $x_2+2x_3=0$, $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1+x_2+2x_3=0$, $x_1+2x_2+x_3=0$, $2x_1+x_2+x_3=0$.

169.



170.

ℓ_0	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}
P_0	P_{12}	P_{11}	P_{10}	P_9	P_8	P_7	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1
P_1	P_0	P_{12}	P_{11}	P_{10}	P_9	P_8	P_7	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2
P_3	P_2	P_1	P_0	P_{12}	P_{11}	P_{10}	P_9	P_8	P_7	P_6	P_5	P_4
P_9	P_8	P_7	P_6	P_5	P_4	P_3	P_2	P_1	P_0	P_{12}	P_{11}	P_{10}

171. В $PG(2,3)$ диагональные точки любого четырехвершинника неколлинеарны (в отличие от плоскости Фано), поэтому любые три коллинеарные точки вместе с оставшейся четвертой точкой прямой образуют гармоническое множество. В этом можно убедиться на модели $PG(2,3)$, приведенной в решении предыдущей задачи.

172. В модели плоскости $P(2,3)$, приведенной в решении задачи 170, искомыми четырехугольниками будут, например,

$$P_1 P_9 P_6 P_{10} \quad \text{и} \quad P_3 P_7 P_{11} P_4.$$

173. Корреляция $P_i \to \ell_i$ является проективным соответствием, поскольку $P_0 P_{12} P_8 P_2 \;\overline{\wedge}\; P_0 P_7 P_5 P_4 \;\overline{\wedge}\; \ell_0 \ell_2 \ell_8 \ell_{12}$.
Так как эта корреляция имеет порядок два, то она является также полярным соответствием.

Треугольник $P_4 P_{10} P_{12}$ со сторонами $\ell_4, \ell_{10}, \ell_{12}$ автополярен. Поскольку вычеты $0, 7, 8, 11$ ($mod\ 13$) равны половинам вычетов

$0, 1, 3, 9$, точки P_0, P_7, P_8, P_{11} (и только эти точки) принадлежат своим полярам. Таким образом, четыре прямые l_0, l_7, l_8, l_{11} – касательные к каноническому сечению, шесть прямых $l_1, l_2, l_3, l_5, l_6, l_9$ – секущие, а три прямые l_4, l_{10}, l_{12} не пересекают конического сечения. Эти три непересекающиеся прямые служат сторонами автополярного треугольника $P_4 P_{10} P_{12}$, участвующего в описании полярного соответствия. Так как каждая прямая, не пересекающая каноническое сечение, является общей стороной двух автополярных треугольников, то существуют еще три автополярных треугольника $P_4 P_5 P_9$, $P_{10} P_3 P_6$, $P_{12} P_1 P_2$.

Сторонами каждого из этих треугольников служит одна прямая, не пересекающая коническое сечение, и две секущие. Поскольку каждая секущая содержит одну пару различных сопряженных точек, она служит стороной ровно одного автополярного треугольника. Следовательно, не существует автополярных треугольников, отличных от четырех уже упомянутых.

174. а) Преобразование $\pi: P_i \to P_{i+1}$ является коллинеацией плоскости $PG(2,3)$, так как оно любую прямую отображает на прямую, что легко проверить, используя таб. в решении задачи 170. Поскольку все точки прямой плоскости $PG(2,3)$ в любом порядке образуют гармоническое множество (см. зад. № 171), то любая коллинеация $PG(2,3)$ является проективной.

б) Преобразование $\varphi: P_i \to P_{3i}$ является коллинеацией, поскольку прямые при этом преобразовании переходят в прямые:

$$l_0 = \{P_0, P_1, P_3, P_9\} \to \{P_0, P_3, P_9, P_1\} = l_0,$$
$$l_1 = \{P_{12}, P_0, P_2, P_8\} \to \{P_{10}, P_0, P_6, P_{11}\} = l_3$$

и аналогично находим, что: $l_2 \to l_6$, $l_3 \to l_9$, $l_4 \to l_{12}$, $l_5 \to l_2$, $l_6 \to l_5$, $l_7 \to l_8$, $l_9 \to l_1$, $l_{10} \to l_4$, $l_{11} \to l_7$, $l_{12} \to l_{10}$.

175. См. решение задачи № 163 и № 170.

176. Для $P(2,2)$ нельзя (см. модель плоскости в № 163). Используя модель плоскости $P(2,3)$ из № 170, раскрасьте в один цвет точки $P_1, P_2, P_5, P_7, P_{11}, P_{17}$, а остальные – в другой.

Составим таблицу инцидентности для $P(2,4)$, полагая, что точка P_i инцидентна прямой l_j тогда и только тогда, когда $i+j \equiv 0, 1, 4, 14$ или $16 \pmod{21}$. Раскрасьте в один цвет точки с четными индексами.

Учитываем, что плоскости $P(2,2)$, $P(2,3)$, $P(2,4)$ единственны, с точностью до изоморфизма.

177. Первую точку можно выбрать q^2+q+1 различными способами, вторую – из оставшихся q^2+q. Третью точку можно выбрать любую не лежащую на прямой, проходящую через первые две, а четвертую – не принадлежащую трем прямым однозначно определяемым уже выбранными тремя точками.
Отсюда, $(q^2+q+1)(q^2+q)[(q^2+q+1)-(q+1)]$ – число различных упорядоченных треугольников (правильнее трехвершинников);

$$(q^2+q+1)(q^2+q)q^2[(q^2+q+1)-(q+1)-q-(q-1)] -$$

число различных упорядоченных четырехугольников плоскости $P(2,q)$.

178. Каждая коллинеация плоскости $PG(2,p^h)$ может быть представлена следующим образом:

$$\rho x_1' = a_{11} x_1^{p^t} + a_{12} x_2^{p^t} + a_{13} x_3^{p^t};$$
$$\rho x_2' = a_{21} x_1^{p^t} + a_{22} x_2^{p^t} + a_{23} x_3^{p^t};$$
$$\rho x_3' = a_{31} x_1^{p^t} + a_{32} x_2^{p^t} + a_{33} x_3^{p^t};$$

где $\rho \neq 0$, $\det(a_{ij}) \neq 0$, $x \to x^{p^t}$ $(t = 0, 1, \dots h-1)$ – автоморфизмы поля Галуа $GF(p^h)$.

Для подсчета числа всех коллинеаций $PG(2,p^h)$ воспользуемся утверждением, что существует одно и только одно линейное отображение плоскости $PG(2,p^h)$, переводящее один упорядоченный четырехугольник в другой. Используя результат предыдущей задачи, получаем искомый порядок группы коллинеаций плоскости $PG(2,p^h)$.

179. Проективное соответствие на прямой задается тремя парами соответственных точек. Поэтому образом первой точки может быть любая из $(q+1)$ точек прямой, второй – из оставшихся q, а третьей – из оставшихся $(q-1)$.

Поскольку любое проективное соответствие, которое меняет местами какие-нибудь две точки, является инволюцией, то гиперболическая инволюция определяется выбором пары неподвижных точек (их число C^2_{q+1}), а эллиптическая – выбором образов двух точек, отличных от их прообразов (их число $q(q-1)/2$).

180. Кривая второго порядка плоскости $PG(2,q)$ содержит $(q+1)$ точку и определяется 5-дугой. Число указанных кривых находится следующим образом

$$\frac{(q^2+q+1)(q^2+q)[(q^2+q+1)-(q+1)][(q^2+q+1)-3q][(q^2+q+1)-(6q-5)]}{} = q^5-q^2.$$

181. а) $K \in \ell$.

Прямая ℓ может быть выбрана из (q^2+q+1) прямых плоскости $P(2,q)$, точка K – из $(q+1)$ точек прямой ℓ. Поскольку перспективная коллинеация задается парой соответственных точек, коллинеарных с K, то в $P(2,q)$ существуют $(q^2+q+1)(q+1)q$ элаций.

б) $K \notin \ell$.

В отличие от предыдущего случая, точка K может быть выбрана из q^2 точек, неинцидентных с ℓ, а образом произвольной точки A может быть любая точка прямой (KA), отличная от K и $(KA)\cap\ell$. Следовательно, в $P(2,q)$ существует $(q^2+q+1)q^2(q-1)$ гомологий.

182. Через произвольную точку k-дуги проходят $(k-1)$ секущих и t касательных k-дуги.

$(k-1)+t = q+1$ и $k+t = q+2$,

где $t \geq 0$, отсюда $k \leq q+2$.

Пусть через точку вне k-дуги проходят i секущих и j касательных, тогда $2i+j = k$ и $j \equiv k \pmod 2$. Поскольку $t+k = q+2$, т.е. $t \equiv k \pmod 2$, если q – четное и $t \not\equiv k \pmod 2$, если q – нечетное. Если q нечетное и $t=0$, тогда $j=0$ для всех точек и получаем противоречие $k\equiv 0$ и $k \not\equiv 0 \pmod 2$. Следовательно, если q – нечетное, то $t \geq 1$ и

$k \leq q+2$, если q – четное,

и $k \leq q+1$, если q – нечетное.

183. Поскольку q нечетное, то через точку вне овала проходит четное число касательных к нему. Фиксируем одну из касательных ℓ овала, тогда оставшиеся q касательных пересекают ℓ в различных точках, поскольку в противном случае на ℓ найдется точка, которая инцидентна лишь с одной касательной ℓ.

Каждая пара касательных определяет внешнюю точку, поэтому их число определяется как $C^2_{q+1} = q(q+1)/2$, а вычитая из общего числа прямых плоскости $(q+1)$ касательных и C^2_{q+1} пересекающих овал, находим число внешних прямых:

$$(q^2+q+1)-(q+1)-\frac{q(q+1)}{2} = \frac{q(q-1)}{2}.$$

186. Зафиксируем прямую ℓ из $P(2,m)$ и рассмотрим ее как прямую плоскости $P(2,n)$, на ней существует точка $A \notin P(2,m)$. Рассмотрим все $(n+1)$ прямые плоскости $P(2,n)$, проходящие через точку A, тогда $n+1 \geq m^2+1$ и либо $n = m^2$, либо $n > m^2$. Если $n > m^2$, то существует прямая $\hat{\ell}$, не пересекающая подплоскость $P(2,m)$, и число прямых подплоскости $P(2,m)$ не превосходит числа точек, инцидентных прямой $\hat{\ell}$, т.е. $m^2+m+1 \leq n+1$ и $m^2+m \leq n$.

187. Точка проективного пространства $PG(n-1,q)$ может быть представлена как однородная упорядоченная n-ка элементов поля Галуа $GF(q)$. Число неоднородных n-ок без нулевой находим, как q^n-1. Каждая однородная n-ка дает $q-1$ различных неоднородных умножением на ненулевые элементы $GF(q)$. Следовательно, число точек пространства $PG(n-1,q)$ находим, как

$$(q^n-1)/(q-1) = 1+q+\ldots+q^{n-1}.$$

188. $PG(4,q)$ содержит $(q^5-1)/(q-1)$ точек и в силу принципа двойственности столько же трехмерных пространств $PG(3,q)$. Поскольку каждая прямая однозначно определяется парой точек и инцидентна с $(q+1)$ точкой, то число прямых и двумерных плоскостей в $PG(4,q)$ находится следующим образом

$$C^2_{1+q+q^2+q^3+q^4} / C^2_{q+1} = (q^5-1)(q^2+1)/(q-1).$$

189. Поле Галуа $GF(2^4)$ содержит 15 ненулевых элементов – многочленов от x по модулю неприводимого над $GF(2)$ многочлена x^4+x+1 с коэффициентами 0 и 1. Поскольку $x^4 = x+1$, то все многочлены являются степенью x:

$x^0 =$	1	$= (0,0,0,1)$	$x^8 =$	x^2+1	$= (0,1,0,1)$
$x^1 =$	x	$= (0,0,1,0)$	$x^9 =$	x^3+x	$= (1,0,1,0)$
$x^2 =$	x^2	$= (0,1,0,0)$	$x^{10} =$	x^2+x+1	$= (0,1,1,1)$
$x^3 =$	x^3	$= (1,0,0,0)$	$x^{11} =$	x^3+x^2+x	$= (1,1,1,0)$
$x^4 =$	$x+1$	$= (0,0,1,1)$	$x^{12} =$	x^3+x^2+x+1	$= (1,1,1,1)$
$x^5 =$	x^2+x	$= (0,1,1,0)$	$x^{13} =$	x^3+x^2+1	$= (1,1,0,1)$
$x^6 =$	x^3+x^2	$= (1,1,0,0)$	$x^{14} =$	x^3+1	$= (1,0,0,1)$
$x^7 =$	x^3+x+1	$= (1,0,1,1)$	$x^{15} =$	$x^0 = 1$	

Любые две из I5 точек определяют прямую, которая состоит из этих двух точек и их суммы. Например, $\ell_{5,8} = \langle x^5, x^8 \rangle$ содержит и $x^5 + x^8 = x^5(1+x^3) = x^5 \cdot x^{14} = x^4$. Следовательно, $\ell_{5,8} = \{x^5, x^8, x^4\}$.

I90. В решении предыдущей задачи заметим, что операция умножения на x является циклической коллинеацией периода I5 пространства $PG(3,2)$ отображающей точки на точки, прямые на прямые и, следовательно, плоскости на плоскости.

Циклическая группа, порождаемая этой коллинеацией, является транзитивной на точках, но не транзитивна на 35 прямых пространства $PG(3,2)$. Однако множество прямых разбито на три класса:

$$\text{I} \quad \{x^i, x^{1+i}, x^{4+i}\},$$

$$\text{II} \quad \{x^i, x^{2+i}, x^{8+i}\},$$

$$\text{III} \quad \{x^i, x^{5+i}, x^{10+i}\},$$

где $i = 0, 1, \ldots, 14$ и сложение производится по модулю I5.

Используем это разбиение для решения задачи Киркмана, занумеро..в школьниц числами 0,I,2,...,I4, соответствующих показателю x. Тогда искомое построение может быть следующим:

Пн.	Вт.	Ср.	Чет.	Пят.	Суб.	Вс.
0,I,4	I,2,5	4,5,8	5,6,9	I2,I3,I	I4,0,3	0,5,I0
2,3,6	3,4,7	6,7,I0	0,2,8	2,4,I0	4,6,I2	I,6,II
7,8,II	8,9,I2	II,I2,0	I0,I2,3	3,5,II	5,7,I3	2,7,I2
9,I0,I3	I0,II,I4	I3,I4,2	II,I3,4	6,8,I4	8,I0,I	3,8,I3
I2,I4,5	I3,0,6	I,3,9	I4,I,7	7,9,0	9,II,2	4,9,I4

I9I. Необходимость. Пусть $A(2,n)$ существует. Зафиксируем два класса параллельных прямых m_i и ℓ_j $(i,j = 1,2,\ldots,n)$. Занумеруем прямые оставшихся $(n-1)$ классов параллельных числами 0,I,2,..., $(n-1)$ и составим $(n-1)$ матриц следующим образом

$$A_1 = (a^1_{ij}),\ A_2 = (a^2_{ij}), \ldots, A_{n-1} = (a^{n-1}_{ij}),$$

где a^k_{ij} – номер прямой из k-го класса параллельных, проходящей через точку $m_i \cap \ell_j$.

Поскольку через две точки плоскости $A(2,n)$ проходит единственная прямая, то матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ – латинские [redacted].

Докажем, что A_k и A_ℓ ортогональны $(k \neq \ell;\ k,\ell = 1,2,\ldots,n-1)$. Предположим противное, т.е. $(a^k_{i_1j_1}, a^\ell_{i_1j_1}) = (a^k_{i_2j_2}, a^\ell_{i_2j_2})$. Отсюда, $a^k_{i_1j_1} = a^k_{i_2j_2}$, $a^\ell_{i_1j_1} = a^\ell_{i_2j_2}$ и через две точки $(m_{i_1} \cap \ell_{j_1})$ и $(m_{i_2} \cap \ell_{j_2})$ проходит прямая, принадлежащая двум классам параллельных, что невозможно.

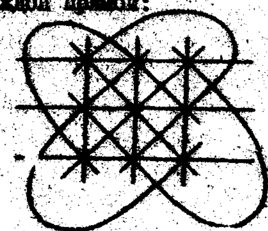
Достаточность. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ – полный набор ортогональных латинских квадратов порядка n, заполненных элементами $0, 1, \ldots, n-1$.

Рассмотрим n^2 пар $(0,0), (0,1), \ldots, (n-1, n-1)$, которые будем называть точками. "$x = a$" и "$y = b$" – два класса параллельных, а остальные $(n-1)$ класс параллельных определим через полный набор ортогональных латинских квадратов. Латинский квадрат A_k определяет, какие точки инцидентны параллельным прямым. Поскольку A_i, A_j $(i \neq j)$ – ортогональны, то через две различные точки проходит единственная прямая, а т.к. через каждую точку проходит $(n+1)$ прямая, то через точку вне прямой проходит единственная прямая, параллельная ей.

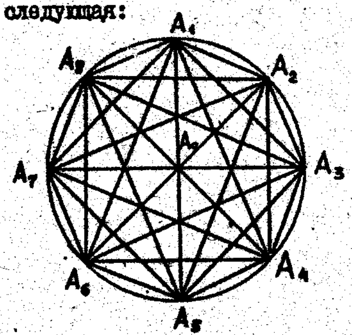
I92. Любой пучок прямых, параллельных данной прямой, будет содержать все точки $A(2,n)$: в противном случае, по аксиоме A_2, это семейство можно было бы дополнить еще одной прямой. Но в любом таком семействе n прямых, а на каждой прямой n точек, т.е. всего n^2 точек в $A(2,n)$.

Так как через любую точку плоскости $A(2,n)$ проходит $(n+1)$ прямая (A_1 и A_2) и каждое семейство попарно параллельных прямых имеет среди этих $n+1$ прямых своего "представителя", то общее число таких семейств равно $n+1$, а каждое семейство содержит n прямых, причем всякая прямая попадает ровно в одно такое семейство. Следовательно, общее число прямых плоскости $A(2,n)$ равно $n(n+1) = n^2 + n$.

I93. Удалим из $P(2,3)$ прямую $\ell_0 = \{p_0, p_1, p_3, p_9\}$. Оставшиеся 9 точек и I2 прямых образуют аффинную плоскость с тремя точками на каждой прямой:



194. Аналогично решению предыдущей задачи показываем, что таблица инцидентности задает $A(2,3)$. Геометрическая интерпретация $A(2,3)$ следующая:



195. Возможно (см. решение задачи № 193). Надо сформировать 12 экипажей (прямых), каждый космонавт (точка) примет участие в четырех испытаниях.

196. Рассмотрим, например, треугольник $P_4P_{11}P_7$ в решении задачи № 193. Его медианами являются прямые $\{P_4, P_6, P_{12}\}$, $\{P_{11}, P_5, P_2\}$, $\{P_7, P_8, P_{10}\}$ которые параллельны.

197. $P_2P_{10}P_7P_{11}$ и $P_4P_8P_{12}P_5$.

198. Поле Галуа $GF(2^3)$ содержит 8 элементов-многочленов от x по модулю x^3+x+1 с коэффициентами 0 и 1:

$$
\begin{array}{llll}
x^0 = & 1 = (0,0,1) & x^4 = x^2+x & = (1,1,0) \\
x^1 = & x = (0,1,0) & x^5 = x^2+x+1 & = (1,1,1) \\
x^2 = x^2 & = (1,0,0) & x^6 = x^2+1 & = (1,0,1) \\
x^3 = & x+1 = (0,1,1) & x^7 = 1 & = x^0, \quad x^{-\infty} = 0.
\end{array}
$$

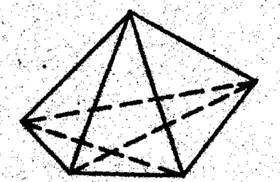
Любые две из 8 точек определяют прямую, их будет – $C_8^2 = 28$. Каждые три точки определяют плоскость, четвертая точка которой является их линейной комбинацией. Поскольку операции проводятся в $GF(2)$, то четвертая точка является линейной комбинацией трех тогда и только тогда, когда четверка соответствующих элементов поля Галуа $GF(2^3)$ в сумме дают нулевой элемент.

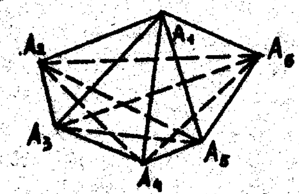
Например, плоскость $\pi_{0,4,6} = \langle x^0, x^4, x^6 \rangle$ содержит и $x^0+x^4+x^6 = 1+(x^2+x)+(x^2+1) = x$. Следовательно,

$$\pi_{0,4,6} = \{x^0, x^4, x^6, x\}.$$

199. Если $\langle m,n\rangle$ – плоскость существует, то на каждой прямой плоскости лежит m точек, а через каждую точку проходят $(n+m)$ прямых. Поэтому $\langle m,n\rangle$ – плоскость содержит $(n+m)(m-1)+1$ точек и $C^2_{(n+m)(m-1)+1}/C^2_m$ прямых. Поскольку число прямых должно быть целым, то $n(n-1)$ делится на m. Отсюда, при $m>2$ не существуют $\langle m,2\rangle$ – плоскости.

200. $\langle 2,2\rangle$, $\langle 2,3\rangle$ – плоскости содержат 10, 15 прямых, соответственно, и могут быть представлены следующим образом:





$\langle 3,3\rangle$ – плоскость состоит из 13 точек и 26 прямых и может быть задана следующей таблицей инцидентности:

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	l_{20}	l_{21}	l_{22}	l_{23}	l_{24}	l_{25}	l_{26}
P_1	*	*	*	*	*	*																				
P_2						*			*						*					*		*				*
P_3					*			*						*					*					*		*
P_4				*			*						*							*				*	*	
P_5			*										*	*							*	*	*			
P_6		*														*		*			*				*	*
P_7	*														*		*		*				*		*	
P_8						*				*	*						*				*			*		
P_9					*					*		*						*		*			*			
P_{10}				*							*	*				*			*			*				
P_{11}			*				*	*			*				*			*								
P_{12}		*					*		*			*		*			*									
P_{13}	*							*	*	*			*			*										

201. Указанная модель содержит q^2 "прямых" и $(q^2+q+1)-(q+1)-C^2_{q+1} = \frac{q(q-1)}{2}$ "точек", поскольку через точку овала проходит единственная касательная, а через внешнюю точку – ровно две касательные к овалу (см. задачу № 18°). На "прямой" лежит $(q-1)/2$

или $(q+1)/2$ "точек", если прямая является секущей или прямой, не пересекающей овал C. Следовательно, через каждую "точку" вне прямой ℓ проходят $(q+3)/2$ или $(q+1)/2$ "прямых", не пересекающих ℓ.

202. В двойственной к частичной геометрии "точками" будут прямые, а "прямыми" – точки данной геометрии, с сохранением инцидентности. Поэтому в двойственной к частичной геометрии с параметрами (r,k,t) через "точку" проходит k "прямых" и на "прямой" лежит r "точек", а на прямой p, не проходящей через точку $\mathcal{L}$, лежит t точек, коллинеарных с $\mathcal{L}$.

203. Обозначим число точек частичной геометрии через v, а прямых – b. Пусть ℓ – фиксированная прямая. Подсчитаем различными способами число упорядоченных пар точек, прямых (P,m), где $P\,I\,m$, $P \not{I}\, \ell$ и $\ell \sim m$ (пересекаются). Вне прямой ℓ лежит $(v-k)$ точек и через каждую из них проходят t прямых, пересекающих ℓ. С другой стороны, через каждую из k точек прямой ℓ проходят $(r-1)$ прямая, отличная от ℓ, и на них лежит еще по $(k-1)$ точке. Отсюда, $t(v-k) = k(r-1)(k-1)$ или $v = k[(r-1)(k-1)+t]/t$.
Двойственное утверждение $b = r[(k-1)(r-1)+t]/t$.

204. Из решения задачи 183 следует, что $v = C^2_{q+1} = \frac{q(q+1)}{2}$, $b = \frac{q(q-1)}{2}$, $r = (q+1)-2-\frac{q-1}{2} = \frac{q-1}{2}$ (через точку вне овала проходят две касательные к нему и $\frac{q-1}{2}$ секущих), $k = (q+1)-\frac{q+1}{2} = \frac{q+1}{2}$.
Для нахождения t воспользуемся соотношением, полученным при решении предыдущей задачи:

$$(v-k)t = k(r-1)(k-1).$$

Отсюда, $\left(\frac{q(q+1)}{2}-\frac{q+1}{2}\right)t = \frac{q+1}{2}\cdot\left(\frac{q-1}{2}-1\right)\left(\frac{q+1}{2}-1\right)$

и $t = \frac{q-3}{4}$.

205. Напомним, что в плоскости четного порядка овалом будет $(q+2)$ – дуга, для которой не существует касательных прямых.

I) Рассмотрим внутренние точки и секущие овала

$$v = (q^2+q+1)-(q+2) = q^2-1, \quad b = C^2_{q+2} = \frac{(q+2)(q+1)}{2},$$

$r = \frac{q+2}{2}$, $k = (q+1)-2 = q-1$ (без двух точек пересечения секущей и овала), $t = (q+2-4)/2 = \frac{q}{2}-1$ (все секущие, за исключением двух, проходящих через точки пересечения взятой

секущей с овалом).

2) Рассмотрим внутренние точки и прямые, не пересекающие овал.

$$v = q^2-1, \quad b = (q^2+q-1)-\frac{(q+1)(q+2)}{2} = \frac{q(q-1)}{2},$$

$$r = (q+1)-\frac{q+2}{2} = \frac{q}{2}, \quad k = q+1, \quad t = \frac{q}{2}.$$

206.

$$v = (q^3+q^2+q+1)-(q^2+q+1) = q^3 = 2^{3n},$$
$$b = (q+2)\frac{q^3}{q} = q^2(q+2) = 2^{2n}(2^n+2) = 2^{2n+1}(2^{n-1}+1),$$
$$r = q+2 = 2^n+2 = 2(2^{n-1}+1)$$

(прямые, проходящие через фиксированную точку пространства и точки овала), $k = q = 2^n$ (точки касательной к овалу, за исключением точки касания), $t = 1$ (точка пересечения ℓ с прямой, проходящей через P и точку пересечения $PG(2,2^n)$ с плоскостью, которая проходит через ℓ и P).

207. Проективная плоскость $P(2,q)$ /аффинная плоскость $A(2,q)$/ является частичной геометрией с параметрами $(q+1, q+1, q+1)$ / $(q+1, q, q)$/.
Регулярная гиперболическая $\langle m,n\rangle$-плоскость также является частичной геометрией с параметрами $(m+n, m, m)$.

<u>Литература к гл. 5</u>

I. Аргунов Б.И., Емельченков Е.П. Инцидентностные структуры и тернарные алгебры. Успехи математических наук, 37, 1982, с.3–37.
2. Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. М.: "Мир", 1980.
3. Скорняков Л.А. Проективные плоскости. Успехи математических наук, 6, 1951, с. 112–154.
4. Холл М. Теория групп. И.Л., 1961, гл.20.
5. Bruch R. and Ryser H. The nonexistence of certain finite proective planes. Canad. J. of Math. 1, 1949., 88–93.
6. Dembovski P. Finite geometries, Berlin etc. 1968.