Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

# ТРУДЫ
## ТРЕТЬИХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.Д. УШИНСКОГО

# ТРУДЫ

## ТРЕТЬИХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2005

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
~~Т 782~~

**Труды третьих Колмогоровских чтений.** Ярославль:
~~Т 782~~ Изд-во ЯГПУ, 2005. 397 с.

ISBN 5–87555–397–9

Начиная с юбилея 100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова (2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей третьих Колмогоровских чтений (2005 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н.Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Настоящий сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434



ISBN 5–87555–397–9

# Оглавление

# Глава 1

## Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

### Некоторые проблемы школьного и университетского математического образования

*В.М. Тихомиров*

#### Введение

Математическое образование должно, по идее, состоять из трех компонент: начальной, общей и современной. Но пока оно состоит из двух – начальной (это школа) и общей (это университет). Педагогическое образование занимает некоторую промежуточную ступень.

Программы университетов давно не изменялись, и наука постепенно удаляется от высших точек университетского образования. Студент, поступивший в Московский университет в 1950 году, начиная с третьего курса, изучал современную математику: функциональный анализ был оформлен как научное направление в начале 30-х годов, и по третьему этажу старого здания МГУ расхаживали классики этой науки – Колмогоров, Люстерник, Гельфанд и другие. То же можно сказать про уравнения с частными производными. Рождалось программирование, и оно сразу входило в образование. С тех пор прошло больше полувека, наука очень стремительно движется вперед, а университетское образование эволюционирует гораздо медленнее. Вместе с ним притормаживает и педагогическое математическое образование.

В этой статье мы обсудим положение дел с математическим образованием – университетским и педагогическим и поговорим о перспективах их развития.

Математика на протяжении всей истории человечества являлась составной частью человеческой культуры, ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса, существенным элементом формирования личности. Математическое образование является неотъемлемой частью гуманитарного образования в широком понимании этого термина.

Математическое образование есть благо, на которое имеет право любой человек, и обязанность общества предоставить каждой личности возможность воспользоваться этим правом. В государственном устройстве должен осуществляться принцип свободы.

Эти общие положения, которые были выдвинуты давно, постепенно должны, с моей точки зрения, стать общепринятыми в любом цивилизованном обществе. Ими следует руководствоваться при обсуждении проблем математического образования.

## О школьном математическом образовании

Математика есть часть общего образования. Математическое образование должно содействовать тому, чтобы каждый школьник получил важнейшие навыки и знания, необходимые ему в дальнейшей жизни и работе. Оно должно включать в себя содержательный, эстетический, психологический, мировоззренческий и прагматический аспекты. Конкретнее это предполагает:

– необходимость для каждого человека, с одной стороны, ***освоить навыки логического и алгоритмического мышления*** (научиться анализировать, отличать гипотезу от факта, критиковать, понимать смысл поставленной задачи, схематизировать, отчетливо выражать свои мысли и т.п.), с другой – ***развить воображение и интуицию*** (пространственное представление, способность предвидеть результат и предугадать путь решения и т.д.);

– овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для ориентации в окружающем мире, для подготовки к будущей профессиональной деятельности (ныне ни одна область человеческой деятельности не может обходиться без математики), для поступления в вуз;

– освоение ***этических принципов человеческого общежития*** (интеллектуальной честности, объективности, стремления к постижению истины; эти принципы закладываются и другими предметами, но роль математики в осознании их очень велика и не может быть заменена ничем другим);

– развитие (и это должно происходить во взаимодействии с другими образовательными дисциплинами) ***эстетического восприятия мира*** (постижение красоты интеллектуальных достижений, идей и концепций, познание радости творческого труда);

– необходимость ***тренировок интеллекта***, столь же важных для развития мозга, как физическая культура для физического здоровья; эти тренировки призваны способствовать выделению интеллектуально высокоразвитого слоя молодежи, столь существенного для плодотворного развития общества;

– способствование ***формированию мировоззрения***;

– необходимость ориентации человека в информационной и компьютерной технологиях, что осуществляется во взаимодействии с курсом информатики.

Гармоническое развитие личности (его контуры были описаны выше), в достижении которого математическое образование играет выдающуюся роль, позволит нашей стране решить труднейшие задачи, стоящие перед ней и всем человечеством в нынешнем столетии.

## Цели школьного математического образования

Математическое образование, как и всякое иное, складывается из трех основных компонент: обучения, воспитания и развития.

Цель школьного математического образования – способствование формированию гармонически развитой личности (развитию логических и алгоритмических навыков, воображения и интуиции), обучению конкретным математическими знаниям, умениям и навыкам, необходимым для ориентации в окружающем мире и в будущей профессиональной деятельности на благо общества, освоению смежных дисциплин, продолжению образования), воспитание этических и эстетических принципов, способствование формированию мировоззрения (представлений об идеях и методах математики и вообще современной науки, о математике как форме описания и методе познания действительности).

## Принципы школьного математического образования

Одним из важных принципов построения математического образования является разумный консерватизм, предполагающий взвешенный учет положительного опыта, накопленного отечественным математическим образованием, и реалий современного мира.

Руководящей идеей математического образования должна стать ***индивидуализация образования***, реализующаяся индивидуальный подход в двух формах: индивидуальный подход к личности на всем протяжении образования и предоставление возможности выбора типа математического образования на заключительном его этапе.

Последнее предполагает выделение профилирующего цикла.

Общеобразовательная функция математики призвана способствовать гармоническому развитию личности. Социальная значимость собственно математического образования обусловлена необходимостью (для плодотворного развития общества) формирования будущего научно-технического, инженерного, медицинского и гуманитарного потенциала российского общества.

На протяжении всего образовательного процесса необходимо сочетание обучения с воспитанием личности и его интеллектуальным развитием (которое невозможно без решения задач и продумывания доказательств).

## Содержание школьного математического образования

В основу содержания математического образования положен ***принцип преемственности***, базирующийся на богатейшем отечественном опыте математического образования и просвещения. Принцип преемственности должен сочетаться при этом с современными тенденциями отечественной и зарубежной школы.

Согласно тысячелетней традиции математика в школе делилась на три части: арифметика (наука о числах), алгебра (учение о преобразованиях и алгоритмах) и геометрия (наука о фигурах). Сорок лет назад в школьную математику начал внедряться анализ (наука об эволюции детерминированных процессов). Представляется важным постепенно внедрять в школьную математику комбинаторику (как существенный фрагмент информатики) и теорию вероятностей (как науку о законах хаоса). ("Я склонен думать, что случайность более фундаментальная концепция, чем причинность" (М. Борн).)

Таким образом, школьное математическое образование должно складываться из следующих основных частей: ***арифметика, алгебра, геометрия, элементы математического анализа и элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.*** Первые три компоненты заполняют общеобразовательный цикл, в специализированном цикле алгебра и геометрия сочетаются с элементами математического анализа, статистики и теории вероятностей, комбинаторика является опорой информатики.

АРИФМЕТИКА призвана способствовать освоению логики и алгоритмических навыков, ориентации в окружающем мире, получению конкретных знаний, необходимых в будущей деятельности, и интеллектуальному развитию.

Программа по арифметике должна содержать понятие о натуральном ряде, об основных арифметических операциях, дробях и действиях с ними, процентах. Обучение должно предполагать решение большого числа текстовых задач арифметическими способами, без форсирования перехода к алгебраическим подходам, и обучение вычислительным навыкам.

Изучение арифметики должно начинаться с самых первых лет обучения.

АЛГЕБРА необходима для развития логики и (особенно) алгоритмических навыков, получения конкретных знаний, необходимых в будущей деятельности, и интеллектуального развития.

Программа по алгебре должна содержать овладение алгебраическим подходом, буквенными выражениями и работой с ними, понятиями многочлена и рационального выражения, умения действовать с ними и вычислять их значения, должно быть освоено понятие алгоритма. Программа должна подготовить ко введению показательной и логарифмической функции. Обучение должно предполагать решение текстовых задач алгебраическим методом, решение уравнений и неравенств первой и второй степени.

ГЕОМЕТРИЯ – одна из важнейших компонент математического образования, необходимая для развития воображения и интуиции, логического мышления, воспитания этических и эстетических принципов, интеллектуального развития и получения конкретных знаний. Соотношение наглядного и логического в изучении геометрии должно соответствовать возрастным возможностям учеников.

Изучение геометрии должно начинаться с самых первых лет обучения.

Программа по геометрии должна содержать ознакомление с линиями и фигурами на плоскости и в пространстве, школьники должны узнавать геометрические фигуры в окружающем мире, изображать их и овладеть понятиями измерения (длин, углов, площадей, объемов).

В основной школе должны изучаться геометрические преобразования и алгебраические описания геометрических объектов (координаты и векторы). Должно происходить ознакомление с понятием доказательства и началами дедуктивного метода. Программа должна подготовить ко введению тригонометрических функций. Обучение должно предполагать решения задач на вычисление, построение и доказательство.

Арифметика и алгебра, с одной стороны, и геометрия с другой – две важнейших структуры, два ствола единого дерева математического образования, каждый из которых ориентирован на свой тип мышления.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА необходимы для получения конкретных знаний, формирования мировоззрения и интеллектуального развития.

Программа по анализу должна привить функциональный подход и дать представление об описании процессов (линейного, степенного и экспоненциального роста, периодических процессов и т.п.).

Должны быть достаточно подробно изучены элементарные функции и действия с ними и освоены начала дифференциального исчисления. В специализированных школах должны быть освоены начала интегрального исчисления и дано представление о ньютоновской системе мира.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ необходимы для получения конкретных знаний и формирования мировоззрения.

Программа должна содержать начала комбинаторики, элементы теории вероятностей и анализа данных.

Детальная разработка содержания и структуры требует отдельного детального рассмотрения и обсуждения.

Вот самая предварительная схема. (Курсивом набраны дополнительные, необязательные, но желательные вопросы.)

1. Арифметика. Натуральные числа и нуль. Сложение и умножение, делимость. Обыкновенные дроби. Целые и рациональные числа. Десятичные дроби и действия с ними. Представление о действительной прямой.

Величины (меры длины, веса, площадей и объемов, времени, скоростей).

Арифметические задачи. Простейшие алгоритмы.

*Элементы теории целых чисел. Элементы теории действительного числа.*

2. Алгебра. Буквенное исчисление. Уравнения и неравенства.

Прямая и обратная пропорциональность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Линейные уравнения, квадратные уравнения и решения арифметических задач. Многочлены.

Степени с рациональными показателями.

*Понятие об алгебраических структурах (группах, кольцах, полях).*

3. Геометрия. Планиметрия и ее основные фигуры (прямые, треугольники, четырехугольники и окружность). Понятие доказательства. Геометрические алгоритмы (построения циркулем и линейкой). Преобразования плоскости (повороты, подобия).

Доказательства древнейших теорем геометрии (Фалеса, Пифагора и Евклида): свойств равнобедренного треугольника, суммы углов треугольника, теоремы Пифагора, свойства углов, опирающихся на хорду).

Длина и площадь. Арифметическая модель плоскости и векторы.

Фигуры в пространстве (плоскости, сферы, многогранники, цилиндры и конусы). Объем.

*Арифметическая модель геометрии. Концепция геометрии и неевклидовы геометрии.*

4. Анализ. Элементарные функции: аффинные, квадратичные, полиномы, тригонометрические функции, показательные функции и логарифмы. Теоремы синусов и косинусов. Алгебраические решения геометрических задач. Понятия производной и интеграла.

*Математические модели в естествознании. Математический анализ и законы природы.*

5. Комбинаторика и теория вероятностей.

Число сочетаний. Бином Ньютона. Схема Бернулли. Закон больших чисел.

*Математика и реальный мир: детерминизм и хаос в природе и обществе.*

Разумеется, в процессе обучения учащийся должен быть ознакомлен с элементами языка математики и математических технических средств: математическими терминами и символами, математической графикой (изображением функций и фигур), буквами латинского и греческого алфавита, начальными сведениями из теории множеств (объединение, пересечение); он должен понимать, что такое алгоритм, что есть математическая истина (логическое следствие из основополагающих истин, принимаемых без доказательства), понимать, что такое контрпример; учащийся должен овладеть элементами техники вычислений (устным счетом, умением пользоваться калькулятором и компьютером).

Учащегося следует ознакомить с элементами творческого процесса, с пониманием того, что достижение цели состоит из точного ее формулирования, осознавания всех средств, которые даны для выполнения задачи и употребления интеллектуальных усилий, ведущих к достижению этой цели. (Хороший пример – построение циркулем и линейкой, когда, скажем, даются линейка, циркуль и карандаш (это средства), рисуются три отрезка $a, b$ и $h$ и ставится цель построить треугольник со сторонами $a$ и $b$ и высотой $h$, опущенной на сторону $a$.)

И, конечно, следует знакомить учащихся с творцами науки и историей математики, сопровождая уроки рассказами о том, как развивались греческая математика, математика и естествознание Возрождения, как происходило состязание французской и немецкой школ в XIX веке, как развивалась математика в нашей стране, какими путями шла она в XX веке (а может быть, и пофантазировать о том, что нас ждет).

## Об университетском математическом образовании

Обсудим две основных идеи, касающиеся университетского математического образования: идея ***многоступенчатости и трапециальности.***

Это означает, что образование, по мнению докладчика, должно слагаться из нескольких стадий, и окончание каждой из них должно завершаться присуждением соответствующей степени.

Стадии таковы: ***бакалавриат, магистратура, университетство*** (пока нет хорошего термина), ***аспирантура*** и (в порядке исключения) ***докторантура***; степени: ***бакалавр, магистр, универсант*** (снова нет слова для человека, получившего диплом об окончании университета), ***кандидат, доктор***.

Число обучающихся на каждой стадии должно быть подобно трапеции (трапециальность): широкий прием (с очень облегченными приемными экзаменами), затем существенный конкурсный отбор (по специальному государственному экзамену) при переходе на новую стадию. (Для мехмата возможны переходы 1000–500–250–125).

Должна допускаться возможность того, чтобы, имея некую степень, можно было участвовать в конкурсе на продолжение образования.

## О содержании образования

Бакалавриат – двухлетнее обучение тому, чему учат на мехмате на первых двух курсах (и учат, в общем, неплохо).

Это анализ 1 и 2, алгебра, геометрия и широко понимаемая информатика (логика, дискретная математика, программирование).

По завершении – государственный экзамен (письменный и устный).

Магистратура – функциональный анализ (анализ 3), комплексный анализ, уравнения с частными производными, прикладной анализ, теория вероятностей и математическая статистика. Срок обучения полтора года. Для перехода на новую ступень – государственный экзамен и предоставление на конкурс творческой работы.

Последняя стадия обучения проходит по отделениям типа: современная математика (в сотрудничестве с МИАН), математика и естествознание (в сотрудничестве с естественно-научными институтами РАН), прикладная математика (в сотрудничестве с прикладными институтами РАН), математическое образование.

## Педагогическое творчество А.Н. Колмогорова

*А.М. Абрамов*

Цель данного сообщения – привлечь внимание к проблеме *исследования* педагогического наследия А.Н. Колмогорова. Ее актуальность определяется двумя главными обстоятельствами.

1) Проблема представляет несомненный и весьма значительный интерес для *истории* математики и истории отечественного образования. Значение А.Н. Колмогорова очень кратко и точно обозначил В.А. Успенский: Колмогоров – явление чрезвычайное. В полной мере это относится и к педагогическому творчеству Андрея Николаевича. Им создана *система* подготовки исследователей, начинающаяся со школы и завершающаяся подготовкой блестящих ученых. По числу состоявшихся и получивших признание крупных ученых школа непосредственных учеников Колмогорова не имеет аналогов за исключением школы Н.Н. Лузина, которой принадлежал он сам. При этом необычайную ценность его педагогическому наследию придает то обстоятельство, что все идеи и разработки Колмогорова ярки, оригинальны, современны.

Следует учитывать и тот факт, что А.Н. Колмогоров – признанный лидер реформы школьного математического образования в СССР, проведенной в 60–70-е годы. Известно, что эта реформа вызывала и вызывает противоречивые оценки и суждения. Но объективный взгляд на вещи приводит к следующему выводу: серьезного анализа замысла и хода "колмогоровской реформы" с учетом всех обстоятельств и фактов не проводилось и, следовательно, *история этой реформы еще не написана.*

2) Но обозначенная проблема существенно выходит за рамки чистой истории. Дело в том, что импульсивные попытки перманентного реформирования школы, предпринимаемые за последние пару десятков лет, определенно не принесли успеха. Оказалось, что вопрос "Какой должна быть математика в российской школе начала XXI столетия?" существенно сложнее и глубже, нежели это представляется многим современным "реформаторам". И в этой связи задача исследования педагогического творчества Колмогорова чрезвычайно современна: именно Колмогорову принадлежит наиболее продуманная и последовательная концепция школьного математического образования. Разумеется, обстоятельства существенно изменились с точки зрения как политико-экономической, так и с содержательной (например, в связи с бурным развитием информатики). Но очень многие педагогические идеи Колмогорова, существенно опережавшие свое время, не утратили своего значения сегодня.

В педагогическом наследии Колмогорова естественно выделить три основных цикла: а) математическое образование в высшей школе; б) подготовка аспирантов и докторантов; в) математическое образование в средней школе (сюда же относятся и работы, связанные с подготовкой учителя математики). Основной предмет данного сообщения – третий из выделенных, так называемый *школьный цикл.*

Надо ясно представлять, что серьезное исследование педагогического творчества А.Н. Колмогорова потребует усилий многих людей и немалого времени. Объясняется это, во-первых, фантастической работоспособностью Андрея Николаевича. Наиболее полная библиография его публикаций содержится в книге первой трехтомника [1]. К теме образования относятся работы, выделенные в разделах "Статьи в энциклопедических изданиях", "Работы по педагогике", "Выступления А.Н. Колмогорова в открытой печати", а также ряд работ, упомянутых в других разделах библиографии. Общее число этих публикаций более 300. Комментарий к ним приведен в [2]. Но подробного и полного комментированного издания всех работ А.Н. Колмогорова по проблемам образования мы не имеем.

Подготовка такого издания – необходимый первый шаг к исследованию педагогического творчества Колмогорова.

Сложность в том, что выделенный выше список далеко не полон. Во-первых, он постоянно пополняется: находятся новые публикации, неизвестные ранее. Во-вторых, не опубликовано множество рукописей, сохранившихся в архиве Колмогорова. В-третьих, существуют, по-видимому, неизвестные материалы, хранящиеся в архивах, как государственных, так и личных. Таким образом, основные задачи – комментированное издание, поиск – должны решаться параллельно. Сказанным определяется масштаб работ.

Содержательная сложность заключается в следующем. А.Н. Колмогоров был удивительно глубоким, цельным и последовательным человеком. В основе его школьной деятельности, несомненно, лежал некий общий план, суммирующий его взгляды на математику и ее преподавание. Так, в одной из работ встречается реплика: "Моя цель – привести основы математики в такое состояние, чтобы их можно было объяснить 14–15-летним детям". Предварительный анализ показывает, что в большой мере А.Н. Колмогорову удалось приблизиться к достижению этой цели. Его работы охватывают все разделы школьного курса ("Алгебра", "Начала анализа", "Геометрия", "Элементы теории вероятностей и статистики"). За 15 лет активной работы в физико-математической школе-интернате при МГУ им были прочитаны разнообразные варианты этих курсов; изданы учебники алгебры, алгебры и начал анализа, геометрии для массовой школы. Постоянный поиск наиболее четких и простых схем изложения даже самых сложных разделов математики – неотъемлемые черты педагогического творчества А.Н. Колмогорова.

Однако краткого описания общей концепции Андрей Николаевич не успел составить. Поэтому остается путь *реконструкции* педагогического творчества Колмогорова, что опять же возможно лишь при условии издания всех его работ и тщательного их анализа.

Наряду с конкретными материалами, предназначенными непосредственно для школьников, большое место в творчестве Колмогорова занимали вопросы *методологии.* К этому циклу следует отнести многочисленные статьи для Большой Советской энциклопедии, написанные, по преимуществу, в 30–50-е годы. Существует несомненная связь этих статей, популяризирующих математику, с последующими "школьными" работами. Так, многие идеи, содержащиеся в широко известной статье "Математика", нашли отражение в школьных учебниках.

Например, большой цикл работ Андрея Николаевича, посвященный непопулярному среди математиков понятию скалярной величины, по существу доводил идеи греческих математиков о величинах до современного варианта изложения (ученый не только предложил аксиоматику скалярных величин, но и создал теорию действительного числа на основе этой аксиоматики.)

Аналогично, система аксиом евклидовой геометрии Колмогорова, положенная им в основу школьного курса, несомненно призвана объединить общие идеи аксиоматического метода, заложенные в Древней Греции и доведенные до ясности Д. Гильбертом, с идеями Ф. Клейна о роли геометрических преобразований. Другой способ построения геометрии на основе аксиом соединения реализован им в неопубликованном курсе, прочитанном в ФМШ. При таком подходе школьники знакомятся с популярным изложением аффинной и проективной геометрии.

Методологический цикл не ограничивается математикой и ее историей. Большое место в работах А.Н. Колмогорова занимали общие соображения о роли образования (не только математического) в СССР, об оптимальной структуре школы. Много специальных заметок и отдельных рассуждений посвящено проблеме математических способностей и способов их развития. В этой связи важной представляется задача анализа архивов гимназии Е.А. Репман, в которой учился Андрей Николаевич, и опытно-показательной Потылихинской школы Наркомпроса, в которой он работал в 1922–1925 гг. Несомненно, что этот опыт сыграл большую роль в формировании А.Н. Колмогорова как математика и педагога.

Можно также предположить, что систематическая работа в архиве механико-математического факультета МГУ, профессором которого А.Н. Колмогоров являлся без малого 60 лет, в архиве ФМШ при МГУ позволит открыть новые факты из жизни и творчества А.Н. Колмогорова.

Андрей Николаевич Колмогоров – великий ученый и великий просветитель России. Подготовка и издание полного собрания его работ – достойная задача для математического и педагогического сообщества.

### Библиографический список

1. Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х книгах. М.: Физматлит, 2003. Кн. 1. Истина – благо. Биобиблиография.
2. *Абрамов А.М.* О педагогическом наследии А.Н. Колмогорова // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М., 1999. С. 99–147.

## Рождение советской математической школы [1]

*С.С. Демидов*

### 1. Вместо методологического введения

Говоря о математической школе, я не буду здесь вдаваться в методологические тонкости, отсылая интересующегося этими вопросами читателя к специальной литературе, например, к материалам специального выпуска "Историко-математических исследований" [1], составленного из материалов симпозиума о математических школах XIX–XX веков, проходившего в августе 1993 года в рамках XIX Международного конгресса по истории науки в Сарагосе (Испания), в частности, к опубликованному в нем моему докладу [2]. Под математической школой я буду понимать "исторически сложившееся сообщество математиков, отмеченное признаками живого организма, ориентированное на открытие нового мате-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-06-80279а) и РГНФ (проект № 05-03-03375а).

матического знания и, одновременно, осуществляющее профессиональную подготовку молодых ученых, приобщая их к разработке вопросов, исследуемых в сообществе" [2. С. 9]. В истории математики можно выделить научные школы различных типов и уровней, составляющих определенную иерархию (см. [2]). Советская математическая школа (равно как, скажем, французская или американская математические школы XX столетия) – одна из ведущих математических школ XX века. Это достаточно сложное образование, в свою очередь состоящее из различных школ и направлений, выросших из единого корня и объединенных общей историей. Возникшая в ходе единого процесса развития общность проявляется в ряде специфических черт, позволяющих говорить о ней как о специальном феномене. Советская математическая школа появилась на свет в 30-е годы и громко заявила о себе во второй половине XX века [3, 4]. Как возникла эта школа? Какую роль в этом процессе сыграли внутриматематические факторы, в частности, сама логика развития предмета? В какой мере и каким образом воздействовали на этот процесс (или даже, может быть, определяли?) факторы социальной истории? Попробуем если и не ответить на эти вопросы, так по крайней мере наметить пути, на которых такие ответы могут быть получены.

## 2. Математика в России к началу 20-х годов

К началу Первой мировой войны математическая жизнь в стране была на большом подъеме. В Петрограде (так с началом военных действий стал именоваться Санкт-Петербург) действовала одна из лучших математических школ того времени – школа, основанная П.Л. Чебышевым (1821–1894). Ее результаты по теории вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов), теории устойчивости (А.М. Ляпунов), конструктивной теории функций (А.А. Марков), теории чисел (И.И. Иванов, Я.В. Успенский), математической физике (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теории специальных функций и функций комплексного переменного (Н.Я. Сонин, Ю.В. Сохоцкий) относятся к числу наиболее важных достижений эпохи. Подрастало молодое поколение математиков (Н.М. Крылов, В.И. Смирнов, Я.Д. Тамаркин, А.А. Фридман, А.С. Безикович, И.М. Виноградов), которым предстояло блестящее будущее. Москва уже громко заявила о себе первоклассными результатами по модной тогда теории функций действительного переменного (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин и первое поколение их учеников – Д.Е. Меньшов, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин, П.С. Александров). Одновременно продолжали успешно развиваться направления, традиционные для первопрестольной, – прикладная математика (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин) и дифференциальная геометрия (Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров).

Чрезвычайно оживленной была математическая жизнь в провинции. В Харькове работала основанная В.А. Стекловым школа математической физики, расцветал талант С.Н. Бернштейна. В Киеве делала первые шаги школа Д.А. Граве (Б.Н. Делоне, О.Ю. Шмидт, А.М. Островский, Н.Г. Чеботарев). Успешно развивались заложенные еще Н.И. Лобачевским геометрические традиции в Казани (А.П. Котельников, Д.Н. Зейлигер). Заметные в Европе математические центры действовали в Варшаве (Д.Д. Мордухай-Болтовской, В.И. Романовский) и Дерпте (Г.В. Колосов, В.Г. Алексеев, Л.С. Лейбензон). Активно разрабатывались новые математические направления в Одессе (С.О. Шатуновский, В.Ф. Каган). Началось завоевание математиками Сибири: математический центр возник в далеком Томске (Ф.Э. Молин, В.Л. Некрасов).

Разумеется, такое оживление научной жизни требовало и новых форм ее организации. К основанному еще в 1864 году Московскому математическому обществу добавились Харьковское (1879), Казанское (1880), Петербургское (1890). Общества эти регулярно проводили заседания, вели издательскую деятельность (например, Московское математическое общество выпускало старейший русский математический журнал "Математический сборник", широкую известность в мире приобрели "Сообщения Харьковского математического общества").

Большую роль в становлении российского математического сообщества сыграли всероссийские съезды естествоиспытателей и врачей, первый из которых прошел в 1868 году в Петербурге. Всего их состоялось 13: в обеих столицах, в Киеве, Казани, Варшаве, Одессе. Последний 13-й прошел в 1913 г. в Тифлисе. На каждом из этих съездов работала математическая секция [5], собиравшая большое количество участников, среди которых были и ведущие ученые, академики и профессора университетов (активное участие в них принимали П.Л. Чебышев, Н.В. Бугаев, С.В. Ковалевская), и учителя гимназий. Они-то и составляли большинство участников секции. Наряду с научными докладами и сообщениями на секции звучали доклады и велись жаркие дискуссии о преподавании математики в средней школе. Вопросы средней школы всегда живо интересовали российское математическое сообщество, включая его элиту. Особенно остро они встали на пороге XX века. Стала ощущаться потребность в организации специальных съездов преподавателей математики. Первый такой съезд состоялся в Петербурге на стыке 1911 и 1912 годов, второй в Москве на стыке 1913 и 1914 годов. Съезды эти были многочисленны: в первом участвовало 1217, во втором 1200 человек. Среди них и ведущие ученые (К.А. Поссе, В.В. Бобынин, А.В. Васильев, Б.К. Млодзеевский, П.А. Некрасов, С.О. Шатуновский, Д.М. Синцов, В.Ф. Каган, Н.Н. Салтыков, Д.Д. Мордухай-Болтовской, С.Н. Бернштейн), и известные педагоги (А.П. Киселев, С.И. Шохор-Троцкий). Одним из основных вопросов этих съездов стала реформа среднего математического образования, живо обсуждавшаяся тогда в математическом мире. Для разработки ее принципов в 1908 году на Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики. Российские математики приняли деятельное участие в ее работе.

Вообще российские математики активно включились в развернувшееся на рубеже двух веков строительство международного математического сообщества. На международных математических конгрессах мы видим представительные российские делегации (среди вице-президентов Первого международного конгресса математиков, собравшегося в 1897 г. в Цюрихе, – Н.В. Бугаев), русские ученые принимали участие во всех крупных международных проектах того времени.

В самой России основные направления деятельности математического сообщества определялась двумя ведущими математическими центрами страны, двумя столицами – Санкт-Петербургом с его Императорской Академией наук и Москвой с ее Математическим обществом. Другие математические центры исторически возникли как их ответвления (исключение составляла разве только Казань) и находились под их большим влиянием. Петербургское же и московское математические сообщества находились в состоянии устойчивой конфронтации, особенно обострившейся после смерти П.Л. Чебышева. Разница в идеологических настроениях, царивших в обоих сообществах (приверженность православию и монархии, склонность к идеалистической философии и к философствованию вообще, приведшие в итоге к образованию Московской философско-математической школы, с одной стороны, и антирелигиозность, позитивизм, антимонархизм и прозападная ориентация, с другой), связанные с ней различия во взглядах на математику и на приоритеты в ней привели к значительному отчуждению представителей обеих школ, зачастую перераставшему в открытые столкновения (по поводу результатов В.Г. Имшенецкого о дробно-рациональных интегралах линейных дифференциальных уравнений в 80-х–начале 90-х годах, в связи с результатами С.В. Ковалевской по задаче о движении тела вокруг одной неподвижной точки, между П.А. Некрасовым и А.А. Марковым по вопросам теории вероятностей). Конфронтация между математиками двух столиц породила напряжение, которое во многом определяло климат в российском математическом сообществе.

К 1917 году российская математика была готова к решительному рывку вперед.

Рывок этот обеспечивался значительными достижениями в области теории вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн), математической физики (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теории дифференциальных уравнений обыкновенных (А.М. Ляпунов) и с частными производными (Н.М. Гюнтер, С.Н. Бернштейн), конструктивной теории функций (А.А. Марков, С.Н. Бернштейн), теории чисел (А.А. Марков, Я.В. Успенский), наконец, теории функций действительного переменного (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, Д.Е. Меньшов, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин, П.С. Александров). Для его осуществления в стране были замечательные научные школы и талантливая молодежь. Особенная творческая атмосфера сложилась в Москве, где вокруг Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина образовалась быстро развивавшаяся школа – легендарная Лузитания (об этом см., например, [6]). Однако в процесс этот грубо вмешалась история – в стране началась революция, переросшая в гражданскую войну. Эти события перевернули жизнь общества и нарушили нормальный ход научных исследований.

## 3. Математика и революция

Прекращение нормального функционирования институтов власти, бедственная ситуация с продовольствием и топливом поставили университетскую профессуру на грань выживания. Старые и больные быстро сошли в могилу. В 1918 году покончил жизнь самоубийством А.М. Ляпунов. В 1921 не стало Н.Е. Жуковского. Для более молодых и энергичных наступило время поиска хлеба насущного. Особенно тяжелая ситуация сложилась в обеих столицах. Н.Н. Лузин с учениками (Д.Е. Меньшовым, М.Я. Суслиным, А.Я. Хинчиным) перебрались в Иваново-Вознесенск, где в 1918 г. был организован Политехнический институт, петроградцы (Я.Д. Тамаркин, А.А. Фридман, А.С. Безикович, И.М. Виноградов) спасались в Перми, где в 1916 году был открыт филиал Петербургского университета, ставший в 1917 независимым университетом. Сложная ситуация сложилась на Украине. Однако, несмотря на все трудности, математическая жизнь в стране продолжалась – столь силен был импульс, данный математическим исследованиям в стране предшествующим ходом их развития. А.Я. Хинчин впоследствии писал [7]: "Может быть, в эти первые тяжелые годы революции математика, по чисто внешним причинам, оказалась поставленной в несколько особые условия, позволившие ей развиваться интенсивнее других точных наук: математику не нужно ни лабораторий, ни реактивов; бумага, карандаш и творческие силы – вот предпосылки его научной работы; а если к этому присоединить возможность пользоваться более или менее солидной библиотекой и некоторую долю научного энтузиазма (а это есть почти у каждого математика), то никакая разруха не может остановить его творческой работы. Недостаток текущей литературы в известной степени возмещался неустанным научным общением, которое в эти годы удалось организовать и поддерживать".

## 4. Восстановление нормального хода научной жизни в Москве

В 1921 году гражданская война закончилась, и начала постепенно налаживаться мирная жизнь. Д.Ф. Егоров все время оставался в Москве, не давая угаснуть проявлениям математической жизни. В 1920 году в город вернулся Н.Н. Лузин, и возобновились заседания его семинара, в которых вместе с преподавателями В.В. Степановым, П.С. Александровым и П.С. Урысоном принимали участие студенты Н.К. Бари, В.И. Гливенко, Л.Г. Шнирельман, затем к ним присоединился А.Н. Колмогоров, в конце 1921 года – М.А. Лаврентьев, в 1922 – Л.В. Келдыш, Е.А. Леонтович, П.С. Новиков и Г.А. Селиверстов. Вернулись в Москву и включились в работу "старики" – И.И. Привалов, Д.Е. Меньшов и А.Я. Хинчин.

Уже в начале 20-х годов в школе Егорова-Лузина отчетливо проявилась тенденция к расширению тематики исследований. Отправной точкой для работы в новых направлениях стали собственные разработки школы в области метрической теории функций, которая оказывала определяющее влияние и на используемые в новых областях методы.

Еще в годы революции сам Н.Н. Лузин и его ученики (И.И. Привалов, В.В. Голубев, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин) начали исследования в области теории функций комплексного переменного; в 1925 году к ним присоединился М.А. Лаврентьев, в свою очередь воспитавший такого ученика, как М.В. Келдыш.

П.С. Урысон и П.С. Александров приступили к исследованиям, заложившим основы советской топологической школы. В 1925 году под руководством П.С. Александрова начал работать топологический семинар, из которого вышли такие знаменитые впоследствии математики, как А.Н. Тихонов и Л.С. Понтрягин.

В 1923 году А.Я. Хинчин получил первые важные результаты по теории вероятностей. В конце 20-х–начале 30-х годов этими вопросами начал заниматься крупнейший русский математик XX века А.Н. Колмогоров, в 1933 году предложивший свою знаменитую аксиоматику теории – так начиналась знаменитая Московская школа теории вероятностей.

В те же годы А.Я. Хинчин приступил к исследованиям в области теории чисел. В 1925/26 учебном году он организовал семинар по теории чисел, в котором участвовали молодые тогда А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман.

В конце 20-х–начале 30-х годов Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, эмигрировавший из Германии А.И. Плеснер и А.Н. Колмогоров заложили основы советской школы функционального анализа, из которой вышел один из крупнейших современных математиков И.М. Гельфанд.

В.В. Степанов вел работу в области теории дифференциальных уравнений. В конце 20-х к нему присоединились молодые И.Г. Петровский и В.В. Немыцкий.

Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын вели работу в области теории интегральных уравнений. Позднее к ним присоединился И.Г. Петровский.

И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров и впоследствии П.С. Новиков занимались проблемами математической логики.

Если к этому добавить и такие традиционные для Москвы области исследований, как дифференциальная геометрия (Д.Ф. Егоров, С.П. Фиников), обогащенная трудами приехавшего из Одессы В.Ф. Кагана, прикладная математика (С.А. Чаплыгин) и завезенная из Киева учеником Д.А. Граве О.Ю. Шмидтом новая алгебра, к занятиям которой позднее присоединились А.Г. Курош и А.И. Мальцев, а также исследования приехавшего из Киева известного специалиста в области теории вероятностей и математической статистики Е.Е. Слуцкого; и учесть значимость полученных москвичами в этих направлениях результатов, то можно сказать, что Москва к началу 30-х годов превратилась в один из ведущих в мире математических центров.

На математиков Москвы, которая с 1918 года стала столицей Советского государства, легла ответственность за возрождение полнокровного математического сообщества во всей стране. Центрами математической деятельности в Москве выступали тогда Московский университет с образованным при нем в 1922 году Научно-исследовательским институтом математики и механики и Московское математическое общество. Для москвичей это не было чем-то абсолютно новым: роль организатора российского математического сообщества Москва взяла отчасти на себя еще в дореволюционное время, став своего рода противовесом сановному Санкт-Петербургу с его снобистской Императорской академией наук. Москвичи, возглавляемые Д.Ф. Егоровым (он был тогда директором указанного Института и президентом Московского математического общества), приступили к исполнению этой роли. В 1924 году они возобновили издание "Математического сборника" теперь уже как общесоюзного математического журнала [8], начали работу по подготовке издания Полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского, наконец, подготовили и в 1927 году провели Всероссийский математический съезд, который прошел чрезвычайно успешно и ознаменовал возрождение регулярной деятельности математического сообщества в масштабах всей страны – на нем было принято решение о проведении в 1930 году Первого всесоюзного съезда математиков в Харькове и создан оргкомитет для его подготовки.

## 5. Восстановление нормального хода научной жизни в Ленинграде и в других научных центрах СССР

Понемногу стабилизировалась ситуация и в Ленинграде, хотя поначалу она оказалась значительно более сложной, чем в Москве. Перенос столицы в Москву резко изменил статус местного математического сообщества. Положение же Академии наук в государстве некоторое время было неопределенным (высказывались даже предложения о ее закрытии как учреждения, связанного со свергнутой монархией). Ряд математиков (Я.В. Успенский, Я.Д. Тамаркин, Я.А. Шохат, А.С. Безикович) эмигрировал на Запад. Однако к середине 20-х годов положение Академии и ситуация в ленинградском математическом сообществе начали меняться к лучшему. Существенную роль стал играть созданный в рамках Академии в 1921 году под руководством В.А. Стеклова Физико-математический институт, из которого позднее выделился Математический институт им. В.А. Стеклова. Этот институт и университет были учреждениями, вокруг которых формировалось ленинградское математическое сообщество. Наиболее важными направлениями исследований ленинградских математиков стали математическая физика (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер, В.И. Смирнов), теория дифференциальных уравнений обыкновенных (А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, И.А. Лаппо-Данилевский ) и с частными производными (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теория чисел (И.И. Иванов, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Р.О. Кузьмин, Б.А. Венков).

Подъем математических исследований в 20-е годы мы наблюдаем и на Украине – в Киеве, Харькове и Одессе. Существенную роль здесь играла созданная в 1918 году Всеукраинская академия наук в Киеве. Выдающиеся работы по теории дифференциальных уравнений, конструктивной теории функций и теории вероятностей продолжал публиковать С.Н. Бернштейн. Успешно работали ученики Д.А. Граве (М.Ф. Кравчук, Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн). Делала свои первые шаги школа по нелинейным колебаниям Н.М. Крылова-Н.Н. Боголюбова. Продолжал свои геометрические исследования Д.М. Синцов.

Из других математических центров страны назовем Казань, где успешно развивались исследования по геометрии и куда в 1928 году переехал из Одессы выдающийся алгебраист Н.Г. Чеботарев. Новым пунктом на математической карте страны стал Тифлис (Г.Н. Николадзе, А.М. Размадзе, Н.И. Мусхелишвили), где в 1918 году был открыт университет.

Этот общий подъем математических исследований в СССР стал следствием целого ряда факторов как внутринаучных (важнейший из которых – высокий уровень развития математики, достигнутый в стране в начале XX века), так и социальных. Новая власть, идеологией которой стал марксизм, высоко ставила науку и образование, понимаемых, правда, в специфическом марксистском духе. При этом и наука, и образование должны были быть перестроены на марксистском фундаменте. К тому же новое государство, оказавшееся во враждебном окружении (мировая революция, которую вначале ожидали в ближайшее время, отодвигалась в неопределенное будущее), должно было заботиться о своей обороне. Следовательно, большое значение приобретали научные разработки, обеспечивавшие технический прогресс, в их числе математические. Поэтому после первых лет, потраченных на ведение гражданской войны и борьбу с интервенцией, советская власть начала выстраивать свою политику в области науки и образования. Снятие сословных и национальных барьеров привело к притоку в высшую школу и затем в науку молодежи, прежде всего молодежи еврейской, которой при старом режиме доступ туда был максимально затруднен.

Однако это было одной стороной медали. Другой стала новая советская практика, основывающаяся на классовом подходе как в оценке текущих событий, так и выстраивании политики в области народного образования и науки. В высшую школу не должны были допускаться выходцы из эксплуататорских классов. От ученых и преподавателей вузов требовалась перестройка всей деятельности на базе марксистского учения, отсюда практика чисток в вузах и оголтелые кампании против ученых и педагогов, объявленных буржуазными или монархическими. Примерами таких кампаний в математике могут служить борьба на "Ленинградском математическом фронте" [9], преследование "егоровщины" [10], "дело академика Н.Н. Лузина" [11].

### 6. Рождение советской математической школы

Процесс дальнейшего развития математических исследований в стране мог пойти далее разными путями. Тот путь, которым ему суждено было последовать, был определен внешними обстоятельствами – планами И.В. Сталина строительства советской науки. Согласно им, головной ее организацией ("штабом советской науки") должна была стать Академия наук СССР. Это положение закреплялось ее новым уставом, принятым в 1927 году. Основной задачей Академии провозглашалась задача социалистического строительства. В состав реформируемой Академии включался ряд членов партии. Один из них, избранный в 1929 году "старый большевик" Г.М. Кржижановский, стал ее вице-президентом. Ему и было вменено в обязанность надзирать за Академией. Разумеется, "штаб советской науки" должен был находиться у вождя "под рукой", поэтому в 1934 году президиум Академии был переведен в Москву. Следом перевели и ряд ведущих институтов. Среди них – Математический институт им. В.А. Стеклова. В Москву переехали С.Н. Бернштейн, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Н.Е. Кочин, С.Л. Соболев.

В результате две ведущие национальные школы – Московская и Петербургская-Ленинградская – оказались в одном городе. Волею вождя находившиеся в конфронтации школы были вынуждены жить вместе. Итог такого "общежития" оказался чрезвычайно плодотворным. Произошел синтез двух, хотя и имевших общие источники, но в то же время идеологически различных школ. Произошел синтез традиции петербургской школы математической физики (С.Л. Соболев) и московской, восходящей к К.М. Петерсону традиции исследований в области теории дифференциальных уравнений с частными производными (И.Г. Петровский), московского (А.Н. Колмогоров, А.И. Плеснер) и ленинградского (С.Л. Соболев) направлений в функциональном анализе, чебышевской линии развития теории вероятностей, наследником которой выступал С.Н. Бернштейн, с московской, выросшей в недрах метрической теории функций (А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров), встретились две линии развития теории чисел – чебышевская (И.М. Виноградов) и новая московская (А.Я. Хинчин, А.О. Гельфонд, Л.Г. Шнирельман), две линии развития алгебраических исследований, восходящих к киевской школе Д.А. Граве – московская (О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош) и ленинградская (Б.Н. Делоне). Возник мощнейший исследовательский потенциал, объединенный вокруг Математического института им. В.А. Стеклова, механико-математического факультета МГУ и Московского математического общества.

Так в середине 30-х годов родилась советская математическая школа – одна из наиболее влиятельных в XX веке.

## 7. Заключение

Советской математической школе предстояла еще долгая и непростая жизнь. В конце 30-х годов начал опускаться железный занавес, и на протяжении многих лет ее развитие проходило в относительной изоляции. Но ее внутренний потенциал оказался настолько велик, что она и в этой ситуации продолжала успешно развиваться. Из тяжелых лет войны, принесших стране, а, следовательно, и ее науке неисчислимые потери, она вышла, чрезвычайно расширив географию – новые математические центры появились на востоке Европейской части страны, в Сибири, Средней Азии и в Закавказье. Подлинным ее триумфом стал Международный математический конгресс 1966 году, прошедший в Москве и ставший самым представительным за весь XX век. На этом конгрессе советская математическая школа продемонстрировала как широту тематического охвата поля математических исследований, так и силу и глубину своих результатов.

## Библиографический список


1. *Демидов С.С., Ормигон М.* (Ред.) Историко-математические исследования. 2-я серия. Специальный выпуск. Москва. 1997.
2. *Demidov S.S.* L'histoire des mathématiques en Russie et en U.R.S.S. en tant qu'histoire des écoles. В кн. [1. P. 9–21].
3. *Боголюбов Н.Н.* Успехи советской математической школы // Вестник Академии наук СССР. 1966. № 7. С. 37–42.
4. *Боголюбов Н.Н., Мергелян С.Н.* Советская математическая школа. М.: Знание, 1967.
5. *Киро С.Н.* Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. 1958. Вып. 11. С. 133–158.
6. *Zdravkovska S., Duren P.* (Eds.) Golden Years of Moscow Mathematics. Providence, Rhode Island: Ed. AMS. 1993.
7. *Хинчин А.Я.* Математика // Десять лет советской науке / Под ред. Ф.Н. Петрова. М.-Л., 1927.
8. *Demidov S.S.* La revue "Matematicheskii Sbornik" dans les annees 1866–1935. In: E. Ausejo, M. Hormigon (Eds.) Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800–1946). Zaragoza, 1993. P. 235–256.
9. *Ермолаева Н.С.* О так называемом "Ленинградском математическом фронте" // Труды Санкт-Петербургского математического общества. 1998. Т. 5. С. 380–394.
10. *Демидов С.С.* Профессор Московского университета Д.Ф. Егоров и имеславие в России в первой трети XX века // Историко-

математические исследования. 1999. 2-я серия. Вып. 4 (39). С. 123–155.

11. *Демидов С.С., Левшин Б.В.* (Ред.) Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб.: РХГИ, 1999.

## О стандарте математического образования в школе им. А.Н. Колмогорова

*В.В. Вавилов*

В школу им. А.Н. Колмогорова специализированного учебно-научного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова поступают на конкурсной основе старшеклассники из различных регионов страны, которые уже проявили интерес к изучению одной из наших профильных дисциплин – к математике, информатике, физике, химии, биологии. За более чем сорокалетний период работы школы в ней сложились собственные концепции и традиции при постановке основных профилирующих курсов и организации внеклассной работы.

Само понятие стандарта обучения может базироваться только на тех целях и задачах, которые школа сама ставит перед собой и которые, в свою очередь, диктуются всем развитием социально-экономической системы в стране и лучшими схемами и традициями в преподавании, сложившимися во всей системе математического образования в средней и высшей школе. Нужно иметь также в виду, что школа является университетским структурным подразделением и подавляющее большинство преподавателей школьных профильных дисциплин являются, по основному месту работы, сотрудниками соответствующих факультетов. Кроме того, большинство выпускников школы становятся студентами университета, в стенах которого они в качестве своих научных руководителей выбирают зачастую и своих бывших школьных преподавателей.

Основные цели в преподавании математики в нашей школе направлены, в первую очередь, *на развитие интеллекта и на подготовку учащихся к обучению в вузе.* С этими положениями общего порядка трудно не согласиться, и они практически ни у кого не вызывают возражений. Критике иногда подвергается вторая из этих целей, но и то только потому, что ее иногда понимают слишком узко – как подготовку к вступительным экзаменам в вузы. В первые годы работы школы акцент был смещен в сторону первого из этих положений, и в наших публикациях о школе мы это неоднократно подчеркивали – школа не является подготовительными курсами для поступающих в вузы (см. [1]; в этой брошюре в качестве приложения помещены выдержки из положения о школе, на основании которого мы и проработали вплоть до 1986 года). Для соответствующей возможности постановки и организации всех математических курсов были все предпосылки, главной из которых было то, что вся система школьного математического образования в стране довольно эффективно работала, и нам удавалось набрать в школу (через олимпиады и летнюю школу для наших абитуриентов) действительно увлеченных и хорошо подготовленных детей. Сейчас ситуация в стране в деле образования молодежи явно изменилась, причем к худшему, и не без специальных усилий наших "правителей" самого различного уровня. Ныне продвигаемая и здравствующая государственная доктрина в образовании (как бы это ни камуфлировалось) – подготовка людей – ремесленников ("homo faberov") – нацелена *только* на репродуктивный процесс обучения со всеми вытекающими отсюда последствиями: уменьшение учебных часов, "разгрузка программ", система ЕГЭ, немыслимый для думающих людей предлагаемый и обсуждаемый стандарт школьного математического образования. Кроме того, все это сильно замешено на так называемых "рыночных отношениях", на идее платного обучения, и не только в частных школах. Целью статьи не является обсуждение всех этих скорбных дел, да и мы не генеральная прокуратура, которой давно пора самой обнародовать попытки многих желающих создать "РАО Образование". Но нам теперь приходится и принимать к себе учеников по другим экзаменационным схемам, и увеличивать долю учебных дел, направленных на ликвидацию у учащихся черт формального образования (имеются в виду итоги однобокого использования дидактической триады "знания, умения, навыки" без рассмотрения и получения ответов на вопросы "Почему?") и расширять рамки целевой подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Наш стандарт математического образования в школе зависит, конечно, от содержания курсов, которых у нас три (по три часа в неделю): геометрия, алгебра, математический анализ. Но важно иметь в виду, что само содержание наших учебных программ далеко не является копией общепринятых программ профильной школы. И они, в первую очередь, ориентированы на воспитание тех ценных качеств личности, для которых изучение математики является одним из наилучших признанных полигонов. Одним из важнейших таких качеств нашего учащегося и будущего студента является умение ставить и решать задачи. Обучение *постановкам и решениям* задач является важной составной частью всех наших математических (и других) курсов. Можно сказать и более прямолинейно: постановка и решение задач – цель и средство обучения математике в нашей школе. Уместно здесь привести высказывание известного математика П. Халмоша: "Задачи – сердце математики, и мы должны подчеркивать все более и более в классе, на семинарах, в книгах и статьях, которые мы пишем, чтобы наши ученики стали лучшими постановщиками и решателями задач, чем мы сами". Решение задач, как отмечалось многими крупнейшими учеными и педагогами, – та столбовая дорога в математику, шире которой нет, и, видимо, другого способа привить интерес к математике и полюбить эту мудрую науку не существует. *Все наши школьники (за очень редким исключением) будут использовать математику и ее методы в своей будущей профессии или вообще станут профессиональными математиками-исследователями.* В частности, именно поэтому мы здесь говорим не только о решении задач, но и о постановках задач в ходе семинарских занятий по инициативе преподавателей, и, что более важно, – по инициативе самих школьников. Вся *школьная жизнь пропитана решениями задач* и их обсуждениями: обычные занятия, самостоятельные и контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены, олимпиады и конкурсы решения задач, кружки, собственные исследования школьников и т.д.

*Под стандартом математического образования мы понимаем тот список задач, который должны уметь решать школьники.*

Здесь хотелось бы написать – *все учащиеся школы*, но этого реально достичь невозможно. Во-первых, у нас много специализаций: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая. Во-вторых, имеется два одиннадцатых класса с одногодичным периодом обучения. В-третьих, как следствие первых двух причин, таких единых списков задач просто нет. Поэтому ниже, в этой статье речь идет о физико-математических классах двухгодичного потока, где я многие годы работаю. Нужно сказать, что эти списки задач не есть что-то фиксированное раз и навсегда – они могут отличаться даже в параллельных классах. Их насыщение зависит от многих обстоятельств: и от уровня подготовки ученика, и от уровня подготовки учителя, и от многого другого. Основная "задачная нагрузка" школьника состоит из решения задач в классе и из выполнения домашних заданий. Задачный материал подбирается и разрабатывается под руководством ведущих преподавателей, дозируется, и именно на этой основе формируются календарные планы обучения. Важное место отводится организации контроля над ходом учебного процесса. Лектор, совместно с другими преподавателями, разрабатывает *тематические списки задач* (иногда крупные, чаще – не очень), часть из которых изучается на уроках, часть – в ходе самостоятельной работы (такой системы придерживаются и некоторые другие специализированные школы; см., например, [5, 6]). Дальше схема раздваивается: либо контроль за выполнением заданий происходит, в основном, на занятиях, либо, в основном, на специальных коллоквиумах. В своих классах я отдаю предпочтение коллоквиумам, не исключая, конечно, и традиционной формы работы в классе. Все учащиеся без исключения должны сдать тот или иной тематический список задач преподавателю на соответствующем коллоквиуме (на занятиях, на зачете), предъявив тетрадь с полными записями решений задач и доказательствами теорем. При этом неукоснительным требованием является система оформления: четкие чертежи (выполненные циркулем и линейкой с применением различных цветов), полнота аргументации в решениях задач, ясные ссылки на теоремы и ранее решенные задачи. Если есть возможность проводить такие коллоквиумы после уроков, то мы проводим их там, а если такой возможности нет, то они проводятся во время обязательных часов. Эта система довольно эффективна, так как на коллоквиум требуется, во-первых, принести тетрадь с тщательно оформленными записями (что само по себе уже важно и дисциплинирует учащихся), не тратится время на подробный разбор домашних заданий в классе (при такой схеме – обычных поурочных домашних заданий или вообще нет, или их немного), школьники привыкают к правильному оформлению решений и к полноте необходимой аргументации – "писанию и чистописанию", да и индивидуальная устная беседа с учителем по решенным и нерешенным задачам приносит неоценимую помощь обучающемуся. Еще один важный плюс при такой схеме контроля состоит в том, что нет особой нужды "в текущем опросе учащихся с выставлением оценки", что сильно экономит драгоценное время на текущих уроках. Бытующее мнение (но не у нас в школе) о том, что для сдачи коллоквиума школьники занимаются списыванием решений задач друг у друга, не выдерживает серьезной критики, да мы и не препятствуем взаимным консультациям учащихся; опытный учитель всегда легко оценит качество изученного материала и практически всегда определит реальные источники написанных решений задач. Отметим, что ничего страшного нет в том, что на коллоквиуме предъявлены решения не всех задач из списка; общая же организационная схема такова – прием заданий проходит только два раза, во время второй попытки отличную оценку получить нельзя. Еще одной важной компонентой такой работы является то, что в такие списки зачастую *включаются задачи исследовательского плана (математические проекты)*, требующие значительного времени на их продумывание, а это практически невозможно на текущих занятиях. Кроме того, сюда включаются так называемые *"задачи на доказательство теорем"*, которые представлены в виде цепочки вспомогательных задач. По ходу такой работы как бы сама собой решается и "проблема накопляемости оценок", решение которой при обычной схеме ориентировано не на весь класс – многие школьники "отдыхают" или начинают заниматься другим делом, а в это время у доски "страдает" вызванный к ней учащийся (а это уже – неэффективно использованное учебное время). Такой методики придерживаются, конечно, не все преподаватели нашей школы, да и не всегда хватает желания, терпения и трудолюбия на такую большую деятельность (намного проще: 5–7 задач в классе, столько же – на дом, разбор домашнего задания , 5–7 задач в классе,…). *Проблема домашних заданий, а точнее, их выполнения,* – проблема, к которой нужно очень серьезно относиться всем преподавателям, а не только преподавателям математики. Простой подсчет показывает, что в семестр наши школьники только по основным математическим курсам должны решать около 500 задач, не считая задач на контрольных работах, на зачетах и др. А это колоссальная нагрузка для учащихся, имеющих кроме математики еще много дисциплин и, тем самым, много других домашних заданий и практикумов. Система математических коллоквиумов помогает четче и более планово организовать изучение той или иной темы и контроль за ее усвоением учащимися.

Приведем здесь примеры некоторых (из многих существующих; см. [3, 4]) тематических списков заданий, которые выносились на текущие коллоквиумы. При их отборе мы хотели показать не совсем стандартные темы и задачи к ним, которые не всегда используются в специализированных классах и школах, хотя они этого явно заслуживают. До проведения коллоквиума на лекциях и на практических занятиях, естественно, изучались основные фрагменты соответствующих теорий, теоремы и задачи (иногда даже из материалов будущего коллоквиума). Довольно часто список заданий для коллоквиума содержит намного больше задач, чем требуется оформить для его сдачи преподавателю; в этом случае школьники получают конкретные задания к коллоквиуму, а остальные задачи "расходуются" на классных занятиях и на домашние задания в текущей работе. Библиографические указания и замечания исторического характера по теме специально каждый раз обсуждаются с учащимися и с довольно обширными комментариями.

**Бесконечные периодические десятичные дроби**

1. Найти первые три цифры после запятой в десятичном представлении частного чисел $0,1234567891011\ldots495051$ и $0,515049\ldots1110987654321$.

2. Доказать, что дроби $\frac{n}{2n^2+1}$, $\frac{n}{n^2+n+1}$ имеют чисто периоднче-

ские десятичные разложения.

3. Доказать, что десятичное разложение числа $1/3^n$ имеет период длины $3^{n-2}$, $n \geq 2$.

4. Найти все натуральные $n < 31$, для каждого из которых десятичное разложение числа $n/31$ имеет те же цифры, что и период десятичного разложения числа $1/31$.

5. Пусть $n$ – натуральное число, $0 < n < 73$. Доказать, что десятичное разложение дроби $n/73$ не содержит двух подряд идущих одинаковых цифр.

6. Найти знаменатель обыкновенной дроби $1/n$, десятичное разложение которой имеет период длины 2.

7. Пусть числа $A$ и $B$ – периоды десятичных разложений дробей $1/n$ и $1/m$, где $n, m$ – натуральные числа. Найти наименьшие $n$ и $m$ такие, что $\mathrm{T}(n) = T(m)$ и $(A, B) = 10989$.

8. Найти последние 1000 цифр числа $1 + 50 + 50^2 + \ldots + 50^{999}$.

9. Решить числовые ребусы (каждая буква обозначает некоторую цифру и различным буквам соответствуют различные цифры):

a) $0, aaa\ldots = (0, bbb\ldots)^2$;

b) $aba/cdc = 0,(fghk)$.

10. Каково наименьшее натуральное число $n$, для которого десятичное разложение дроби $m/n$ содержит блок 501, т.е. $m/n = A, \ldots 501 \ldots$?

11. Доказать, что период десятичного разложения дроби $1/3^{100}$ содержит

a) не менее 20 последовательных равных цифр;

b) последовательность 123456789;

c) любую последовательность из 46 цифр.

12. Доказать, что в десятичном разложении дроби $1/p$, $p > 5$ – простое, сумма всех цифр в периоде кратна 9.

13. Пусть $p$ – простое число и $1/p = 0,(a_1 a_2 \ldots a_k)$, $k \geq 2$.
Доказать, что если $k = 2m$, то $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m} + \overline{a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_k} = 99\ldots9$.

14. Известно, что длина периода десятичного разложения для дроби $1/59$ равна 58. Имеется калькулятор, который все результаты вычислений выдает с шестью верными знаками. Применяя

только такой калькулятор, найти период этого десятичного разложения.

15. a) Найти все простые числа $p$, для которых десятичные разложения дробей $1/p$ в своем десятичном разложении содержат цифры 1,2,3,4,5,6.

b) Определить (составить таблицу) длины периодов десятичных разложений дробей $1/p$ для всех простых $p$, $1 < p < 100$.

16. Пусть $m, n$ – натуральные числа, $m \neq n$. Доказать, что десятичное разложение дроби

a) $1/(10^n - 1)$ имеет период длины $n$;

b) $(10^m - 1)/(10^n - 1)$ имеет период длины $n$, $1 \leq m < n$.

17. Пусть $T(k)$ – длина периода десятичного разложения дроби $1/k$.

Доказать, что

a) $T([m, n]) = [T(m), T(n)]$;

b) $T((m, n))$ делит $(T(m), T(n))$.

18. Пусть $n$ и $m$ – натуральные числа. Доказать, что десятичное разложение дроби

$$\frac{10^{(m,n)} - 1}{[10^n - 1, 10^m - 1]}$$

имеет период длины $[m, n]$.

Следующие две задачи не являются обязательными и адресованы тем, кто заинтересовался данной тематикой.

19. Построить теорию “Бесконечные периодические дроби в системе счисления по заданному основанию”. Как формулируются в этой теории основные теоремы и, в частности, задачи из этого списка?

20. Как связаны между собой длины периодов (и предпериодов) десятичных представлений суммы и произведения двух рациональных чисел и самих этих чисел? Рассмотрите произвольную систему счисления.

**Принцип Дирихле**

При решении самых различных задач часто бывает полезен так называемый “принцип Дирихле”, названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805–1859); по-другому этот принцип еще называют "принципом ящиков" или "принципом голубятни".

Более общая форма принципа Дирихле такова:

*Если $(kn+1)$ кролик помещен в $n$ клетках, то в одной из клеток находятся не менее $(k+1)$ кролика; или в эквивалентной форме – нельзя посадить $(kn+1)$ кролика в $n$ клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более $k$ кроликов.*

1. В Москве (Нью-Йорке) более 10, 1 млн. жителей, на голове у каждого не больше 100000 волос. Докажите, что имеются, по крайней мере, 100 человек с одинаковым числом волос на голове.

2. Докажите, что из любых двенадцати натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

3. (*Ленинградская олимпиада.*) Можно ли в клетках квадратной таблицы $5 \times 5$ расставить числа $0, +1, -1$ так, чтобы все суммы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей были различны?

4. В ряд выписано пять натуральных чисел: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

5. Имеется шесть точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тем самым, имеется $C_6^2 = 15$ отрезков, которые эти точки соединяют попарно. Предположим, что все пятнадцать отрезков окрашены либо в красный, либо в синий цвет.

Докажите, что найдется, по крайней мере, один хроматический треугольник, т.е. такой, все стороны которого окрашены в один цвет.

*Замечание.* Задачу 5 можно интерпретировать и так: в любой компании из шести человек можно выделить трех, которые между собой знакомы, или таких, которые между собой не знакомы.

6. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, построен круг. Докажите, что эти четыре круга полностью покрывают четырехугольник.

7. Равносторонний треугольник $ABC$ и квадрат $MNPQ$ вписаны в окружность длины $S$. Ни одна из вершин треугольника не совпадает с вершинами квадрата. Их вершины делят окружность на семь частей. Докажите, что, по крайней мере, одна из них не

больше $S/24$.

8. (*Ленинградская олимпиада.*) Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо есть два многоугольника с одинаковым числом сторон.

9. В каждую вершину правильного стоугольника помещено одно из чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Докажите, что существуют четыре вершины $A$, $B$, $C$, $D$ данного стоугольника, которые образуют параллелограмм $ABCD$, и такие, что $a + b = c + d$, где $a$, $b$, $c$, $d$ — числа, стоящие соответственно в вершинах $A$, $B$, $C$ и $D$.

10. Основание пирамиды – выпуклый девятиугольник. Каждая диагональ основания и все боковые ребра окрашены в красный или синий цвет. Оба цвета использованы (заметим, что стороны основания не окрашиваются). Докажите, что существует хроматический (одноцветный) треугольник.

11. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом диаметра $1/7$.

12. Несколько дуг окружности покрашены в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

13. В квадрате со стороной 1 м расположено несколько окружностей с суммой их длин, равной 1 м. Докажите, что существует прямая, параллельная сторонам квадрата, которая пересекает не менее трех окружностей.

14. (*Ленинградская олимпиада, Турнир городов.*) Докажите, что любой выпуклый многоугольник с четным числом сторон имеет диагональ, которая не параллельна ни одной из сторон многоугольника.

15. (*Международная олимпиада.*) В системе из $p$ уравнений с $q = 2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1q}x_q = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + \ldots + a_{pq}x_q = 0, \end{cases}$$

коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Докажите, что существует решение

$(x_1, x_2, \ldots, x_q,)$ такое, что:

а) все $x_j$ – целые;

б) $|x_j| \neq 0$ для некоторого $j$ $(1 \leq j \leq q)$; и $|x_j| \leq q$ для всех $j$ $(1 \leq j \leq q)$.

16. (*Ленинградская олимпиада.*). Доказать, что для всякого простого числа $p$, не равного 2 или 5, существует натуральное число $k$ такое, что $pk$ записывается в десятичной системе одними единицами.

17. Докажите, что в выпуклом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон.

18. В правильном двадцатиугольнике отметили 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

19. Верно ли, что из ста произвольных целых чисел всегда можно выбрать: а) 15; б) 16 таких, у которых разность любых двух делится на 7?

20. Имеется 17 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Они попарно соединены между собой отрезками. Все отрезки покрашены в один из цветов: красный, синий или белый. Докажите, что существует, по крайней мере, один хроматический (одноцветный) треугольник. (В этой задаче число 17 – наименьшее. Почему?)

21. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

Докажите то же самое, если выбрано не 5, а 100 человек, $n$ человек.

22. а) В квадрате со стороной 1 см расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 см (окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, имеющая общие точки, по крайней мере, с двумя окружностями.

б) В круге радиуса 1 см расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,5 см (окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется окружность, концентрическая с данной окружностью радиуса 1 см, которая не имеет общих точек с другими окружностями.

23. (*Ленинградская олимпиада*) В квадрат со стороной 1 см поместили 1979 многоугольников, сумма площадей которых равна 1978,5 см$^2$. Докажите, что все многоугольники имеют общую точку.

24. (*Международная олимпиада*) Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2,..., 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равен сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

25. В круге радиуса 3 см произвольным образом помещено несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25 см. Докажите, что найдется прямая, которая пересекает не менее 9 из этих кругов.

26. (*Ленинградская олимпиада*) Сумма 100 чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

27. Принцип Дирихле позволяет доказать ряд важнейших теорем из теории чисел. Попробуйте их доказать.

**Теорема Кронекера 1.** *Пусть $\alpha$ – действительное число. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ найдутся два целых числа $m$ и $n$ такие, что*

$$|m\alpha - n| < \varepsilon.$$

Почти аналогично устанавливается более общий результат.

**Теорема Кронекера 2.** *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – действительные числа. Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ найдутся натуральное число $m$ и целые числа $n_1, n_2, \ldots, n_k$ такие, что*

$$|m\alpha_i - n_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Другими словами, найдется такое натуральное число $m$, что каждое из чисел $m\alpha_i$ отличается от целого менее чем на $\varepsilon$, т.е.

$$\{m\alpha_i\} \in [0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]$$

или, другими словами, для набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ любой длины при некотором натуральном $m$ числа $m\alpha_i$ одновременно отличаются от целых меньше чем на $\varepsilon$.

**Теорема Дирихле.** *Для любого числа $\alpha$ найдется бесконечно много дробей $p/q$ таких, что*

$$|\alpha - p/q| < 1/q^2.$$

### Принцип включения-исключения

Наряду с методом математической индукции, принципом Дирихле, принцип (формула) включений и исключений является важнейшим математическим инструментом, особенно в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных множеств при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

1. Сколько существует целых чисел от 1 до 16500, которые

а) не делятся на 5;

б) не делятся ни на 5, ни на 3;

в) не делятся ни на 5, ни на 3, ни на 11?

2. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

3. Рассмотрим множество объектов и четыре свойства $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Напишите формулу для числа объектов, которые имеют свойство $\beta$, но не имеют ни одного из свойств $\alpha$, $\gamma$, $\delta$.

4. Пусть имеется $n$ подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества $E$ и $\chi_j$ – характеристические функции этих множеств, то есть

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_j, \\ 0, & x \in E \backslash A_j \quad (j = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Докажите, что при этом $\chi(x)$ – характеристическая функция множества $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, связана с функциями $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$ формулой $1 - \chi(x) = (1 - \chi_1(x)) \ldots (1 - \chi_n(x))$.

5. (*Формула Эйлера*). Одним из проявлений формулы включений и исключений в теории чисел является красивое выражение

для функции Эйлера $\varphi(n)$, которая по своему определению равна количеству натуральных чисел, не превосходящих $n$ и взаимно простых с $n$; при этом предполагается, что $\varphi(1) = 1$. Так, например, $\varphi(10) = 4$, так как в ряду чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 взаимно простыми с 10 будут четыре числа 1, 3, 7, 9. С другой стороны, $\varphi(11) = 10$, т.к. число 11 простое и все числа, меньшие 11, будут взаимно простыми с 11. Ясно, что $\varphi(p) = p - 1$ для любого простого числа $p$, $p \geq 2$.

Докажите, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение натурального числа на простые множители, то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Из этой формулы, например, для числа $5256 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 73$ имеем:

$$\varphi(5256) = 5256(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/73) = 1728.$$

6. Каждая сторона в треугольнике $ABC$ разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки $A$, $B$, $C$, не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

7. (Из творчества известного детского писателя и математика *Льюиса Кэрролла*, автора книг "Алиса в стране чудес" и "Алиса в Зазеркалье", давно уже ставших достоянием мировой культуры.)

В ожесточенном бою более 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, более 75 – одно ухо, более 80 – одну руку и более 85 – одну ногу. Каково наименьшее количество пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

8. *(Московская олимпиада, 1968).* а) В квадрате $2 \times 2$ размещены 7 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых больше, чем 1/7.

б) В прямоугольнике площади 5 размещены 9 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых не меньше, чем 1/9.

9. На экзамене по математике были предложены три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по математическому анализу. Из 1000 участников экзамена задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по анализу – 600 человек. При этом задачи по алгебре и геометрии решили 600 человек, по алгебре и анализу – 500, по геометрии и анализу – 400. А 300 экзаменующихся решили все задачи. Сколько человек не решили ни одной задачи?

10. В комнате площадью 6 м$^2$ постелили 3 ковра произвольной формы площадью 3 м$^2$ каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1 м$^2$.

11. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5; все три языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из этих трех языков?

12. В многоугольнике площадью единица расположены 5 фигур площадью большей или равной 1/2. Доказать, что если площадь пересечения любых двух фигур больше или равна 1/4, то существуют такие 3 фигуры, площадь пересечения которых больше или равна 3/40.

13. *(Московская олимпиада, 1956).* На столе прямоугольной формы лежат 15 журналов, которые закрывают его полностью. Доказать, что можно убрать 7 журналов таким образом, что оставшиеся 8 закроют, по крайней мере , 8/15 поверхности стола.

14. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один ученик не сел на свое место?

15. (*Число беспорядков*). Несколько человек подбросили в воздух свои шляпы во время взятия футбольных ворот. Шляпы вернулись этим же людям (по одной – каждому), но в произвольном порядке. Какова вероятность того, что каждый получит чужую шляпу?

Под вероятностью понимается отношение числа возможностей распределения шляп указанным способом к числу всех возможностей.

16. *(Чешская олимпиада, 1970).* На прямой даны $n^2+1$ отрезков. Доказать, что можно выбрать $n+1$ отрезков, которые попарно

не пересекаются, или существуют $n+1$, которые имеют общую точку.

17. *(Олимпиада Великобритании, 1976).* Из элементов конечного множества $X$ составили 50 его подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ так, что каждое из них содержит более половины всех элементов из $X$. Доказать, что существует такое подмножество $B \subset X$, которое имеет не менее 5 элементов и которое имеет по крайней мере один общий элемент с каждым из подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$.

18. *(Бельгийская олимпиада, 1979).* Множество $X$ имеет $n$ элементов. Найти наибольшее число его подмножеств, состоящих из трех элементов таких, что любые два из выбранных подмножеств имеют ровно один общий элемент.

19. *(Олимпиада США, 1979).* Из множества с $n \geq 5$ элементами выбрали $n+1$ различных подмножеств, каждое из которых состоит из трех элементов. Доказать, что среди выбранных подмножеств существует два, которые имеют ровно один общий элемент.

20. (Олимпиада С.-Петербурга, 1999). Пусть множество $M$ можно представить в виде объединения его непересекающихся подмножеств следующими способами

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{k=1}^{n} C_k,$$

причем для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geq n$$

(где $|X|$ – число элементов множества $X$). Доказать, что

$$|M| \geq \frac{n^3}{3}.$$

## Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т.* Физико-математическая школа при МГУ. М.: Знание, 1981. 85 с.

2. *Вавилов В.В.* Школа им. академика А.Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова // Сборник статей ко дню рождения А.Н. Колмогорова. М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003. С. 3–41.
3. *Вавилов В.В.* Школа математического творчества // М.: РОХОС, 2004. 72 с.
4. *Вавилов В.В.* Математические коллоквиумы // Школа им. А.Н. Колмогорова. М.: “VVV”, 2003. 78 с.
5. *Еременко С.В., Сохет А.М., Ушаков В.А.* Элементы геометрии в задачах. М.: МЦНМО, 2003. 168 с.
6. Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс “Д”) / Под ред. В. Доценко. М.: МЦНМО, 2004. 224 с.

## Проблема размещения новых понятий и объектов в школьном курсе математики

*Н.Х. Розов*

Цель настоящей статьи – пригласить специалистов и всех заинтересованных лиц подумать над вопросом: нужна ли модернизация программы школьного курса математики и концепции ее реализации, а если нужна – то какая. Вопрос очень непростой. Здесь не следует проявлять спешки и принимать волевые единоличные решения – мы это уже проходили и знаем, чем это кончается. Но вообще уйти от обсуждения, от выработки единых взглядов на то, какой должна быть школьная математика середины 21 века, все равно не удастся.

Чтобы избежать недоразумений и недопониманий, сразу же отметим, что речь пойдет о курсе математики в общеобразовательной школе, а также в специализированных школах не физико-математического профиля.

За минувший век в математике произошли грандиозные изменения, она (впрочем, как и все другие науки) шагнула необыкновенно далеко вперед. Математические методы стали более общими и разнообразными, математические модели природных явлений, технических процессов, общественных ситуаций стали полноценнее, точнее и надежнее отображать существо дела. Математика все увереннее превращается в мощный инструментарий анализа, исследования и прогнозирования, повышается ее прикладное значение. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту.

В математической науке содержательно изменилось почти все. Почти ничего содержательно не изменилось в программе школьного курса математики. Сравните программы 1940 и 2000 годов: исключены комплексные числа, бином Ньютона и еще несколько небольших тем, включены начальные понятия математического анализа, операции с векторами и кое-что другое. В целом же сохранилась старая ситуация: математика оставляет учащихся почти в XVIII веке по алгебре и началам анализа и почти в древней Греции по геометрии! По другим предметам они информацию получают (пусть часто описательно и фрагментарно) на современном научном уровне. Так что – сохраним такую ситуацию до 2050 года?

Представляется, что в школьной математике назрели перемены – и в содержании программы, и в методике преподавания, и в формах занятий.

**1. Содержание программы.** Содержание школьной программы по математике – самый болезненный и неоднозначный вопрос. С одной стороны, оставлять знания школьников на уровне XVIII века явно невозможно. С другой стороны, явно неразумно пытаться внедрить изучение в школе абстрактной алгебры, теории функций комплексного переменного, функционального анализа. Но нельзя упускать из вида, что, помимо специфических (чисто математических) понятий, математика создала и целый ряд важных общеобразовательных понятий и методов, имеющих общекультурное значение.

Сегодня в разряд общеобразовательных уверенно можно отнести такие понятия, как бифуркация, фрактал, хаос... С этими понятиями работают и физики, и социологи, и биологи, и философы.

И школьный курс математики обязан знакомить молодежь с этими понятиями, хотя бы в описательно-наглядном плане.

Сегодня приобретает особое значение умение быстро провести вычисления – для хотя бы приближенной оценки интересующей нас величины. Значит, выпускник школы должен владеть простейшими вычислительными алгоритмами.

Сегодня школьный курс математики должен быть прагматичен, учить людей правильно ориентироваться в жизни, помогать им решать практические вопросы, обеспечивать свою безопасность в самом широком смысле.

**2. Бифуркация.** Одно из важнейших современных понятий – бифуркация процесса в ходе изменения параметра. Этим понятием оперируют сейчас все – естествоиспытатели, инженеры, специалисты гуманитарных наук. Должна ли школа ответить на такой вызов времени? Несомненно!

И наиболее уместно понятие бифуркации анализировать в школьном курсе математики. Ибо здесь даже ничего особо нового вводить или добавлять не потребуется! Хорошо и давно известные примеры бифуркаций в изобилии можно найти и в алгебре, и в геометрии – просто до сих пор на этом не акцентировалось внимание. Наблюдайте за изменением формы сечения куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали, при продвижении плоскости от одной вершины куба до другой – вот простейший бифуркационный процесс. Изменение числа корней квадратного уравнения

$$3x^2 - 5x + 2c = 0$$

при "пробегании" параметром $c$ всех действительных значений – другой бифуркационный процесс.

Надо только пожелать при изложении материала сделать нужные методологические акценты, привлечь и практические примеры. На наших глазах разрастается эпидемия пособий по "теории уравнений и неравенств с параметрами", задачи в них становятся все более громоздкими и изощренными (подчас только ответ занимает полстраницы). Но удивительно, никто из многочисленных "творцов" этой теории не удосужился хотя бы вскользь рассказать о рядом лежащем общеобразовательном понятии.

**3. Фрактал.** Это – удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отображения природных явлений (роста кристаллов, прохождения пузырьков воздуха через нефть, образования трещин и других) и описания объектов (включая и человеческий организм).

Но познакомить учащихся с фракталами стоит еще и для того, чтобы продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики развития науки. А понимание процесса научного познания мира – одна из важных характеристик образованного и культурного человека. Фактически понятие фрактала было введено и изучено в конце 10-х годов прошлого века, но работы основоположников никого не заинтересовали – идея пришла слишком рано и не имела должного инструментального и прикладного основания. И лишь более полувека спустя усилиями Б. Мандельброта и благодаря уже имевшейся высокопроизводительной компьютерной технике исследования фракталов приобрели большой размах.

В методической литературе много любят рассуждать об эстетическом воздействии математики на школьников, о ее значении при воспитании у них понятия прекрасного. Обычно говорят о стройности доказательства какой-то теоремы, об изящности решения задачи, о красоте неожиданного дополнительного построения. Однако все это доступно и ощутимо скорее только ученику, действительно увлеченному математикой. А какое эстетическое наслаждение может получать от решения бесконечного числа квадратных уравнений тот, кто к ней "глух"? В качестве примера эстетического воздействия обычно приводят и картины М. Эшера, но ведь эти безусловно талантливые работы скорее можно назвать лишь вариациями на математические темы, иллюстрациями к отдельным математическим фактам, глубокое понимание которых часто до конца недоступно учащимся.

Фракталы же непосредственно, компьютерной реализацией формул, порождают действительно красочные, оригинальные полотна, не уступающие произведениям абстрактной живописи (см. [1]).

**4. Хаос.** Сейчас "проблема хаоса" привлекает особое внимание ученых, интерес физиков и философов, экономистов и медиков, биологов и обществоведов (и даже теоретиков образования) прикован к новой области науки – синергетике (см., например, [2]).

Один из основополагающих сценариев перехода к хаосу был открыт в 1978 г. М. Фейгенбаумом буквально "на коленке", путем численного эксперимента на карманном(!) калькуляторе – анализа поведения последовательности $\{x_n\}$, порождаемой отображением

$$x_n \longrightarrow x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

Ознакомление с этой и другими простейшими математическими моделями рождения хаоса, входящего составной частью в современное представление о "нелинейном мире", будет иметь исключительно важное методологическое значение для формирования научных мировоззренческих представлений у молодежи, не только обогатит сам курс математики и сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природы и общества.

**5. Вычислительная тематика.** Преподаватели старшего поколения помнят, а молодежь может увидеть в книге [3] алгоритм извлечения квадратного корня из числа. Это был сложный момент былой школьной программы – формулировка правила занимала фактически целую страницу. Потом появились микрокалькуляторы, которые считали квадратные корни за долю секунды, и правило из учебников исчезло. Однако кто из учеников обычных (не профильных) школ понимает, как именно выполняет эту операцию калькулятор персонального компьютера? И что делать, если при вычислениях, связанных с объемами тел, надо посчитать кубический корень из числа?

Хорошо было бы оценить с точки зрения влияния на развитие общего интеллектуального потенциала и воспитание практических жизненных умений (но не с позиций отработки формальных математических навыков) сравнительную важность знания учащимися, с одной стороны, метода определения взаимного расположения корней двух квадратных уравнений, зависящих от параметра, и, с другой стороны, метода последовательных приближений решения уравнения любой степени.

Вообще вычислительная тематика – падчерица программы школьной математики. Распространено мнение, что такая тематика – прерогатива курса информатики. Но это более чем нелогично! Например, школьный предмет "Информатика" объявил "своим" понятие алгоритма, которое на самом деле является фундаментальным математическим понятием и изучалось математиками задолго до появления самого слова "информатика". Кстати, это понятие всегда подспудно присутствовало в школьном курсе математики, по неясным причинам избегавшим, однако, самого термина.

В свое время курс математики гордился прикладными расчетами на логарифмической линейке. И сейчас элементарные и доступные вычислительные математические методы позволили бы ярко демонстрировать прикладное значение математики во многих важных мировоззренческих и содержательных практических проблемах.

**6. Лабораторные работы по математике.** Сейчас педагоги и психологи все более настойчиво рекомендуют усиливать в учебном процессе творческое начало, внедрять исследовательские проекты, стимулировать самостоятельный познавательный поиск. Конечно, широко практикуемое сейчас решение нестандартных (олимпиадных) задач – это форма самостоятельного познавательного поиска. Но лишь одна из возможных. И к тому же почти всегда, к сожалению, с "предписанным результатом".

А почему мы никогда не задумывались о месте и содержании возможных в школьной математике лабораторных работ? Чтобы ученик изучал некоторое явление или объект, причем не только "головой", но и "руками", подмечал некие закономерности реального мира и пытался дать их адекватное математическое описание. Богатейший материал для увлекательных лабораторных работ и самостоятельных исследований может дать вычислительная тематика – например, феномен Фейгенбаума и численное рассмотрение различных итерационных процессов, имеющих вполне реальную естественно-научную интерпретацию.

Вопрос о лабораторных работах по математике имеет и иной, очень глубокий и важный аспект. Если обстоятельно посмотреть на школьный курс, то нетрудно убедиться, что практически весь он направлен на воспитание умения считать и производить преобразования. В начальной школе в центре внимания – автоматизм в использовании таблицы умножения. Затем идут арифметические вычисления – "чистые" или в "текстовых" задачах (где до сих пор борются содержательный и формалистический подходы). Затем наступает расцвет алгебраических и тригонометрических "тождественных преобразований", включая решение уравнений и неравенств (и, выражаясь старым, но точным языком, "геометрические задачи с применением тригонометрии").

Между тем, человеческое бытие требует еще одного важного навыка – геометрического, или пространственного воображения. К сожалению, подавляющее большинство выпускников, прошедших горнило школьного курса математики, худо-бедно владеют правилами формальных преобразований, но не имеют зачастую даже элементарного геометрического воображения. Это серьезный упрек математике в школе. Геометрическое воображение, как и навыки счета, логику, язык, необходимо воспитывать, развивать постоянно, планомерно и непрерывно, с первого до последнего класса.

Главным условием развития геометрического воображения является работа с реальным материалом. Освоение объектов материального мира и действий в материальном мире с постепенным переносом этих объектов и этих действий в мир воображения – вот, видимо, единственно возможный путь формирования пространственного мышления. И наиболее удачно реализовать его можно именно на математических лабораторных работах, материалом для которых служили бы как классические объекты, так и другие, в традиционную программу не входящие, но, тем не менее, весьма полезные. Одним из таких объектов являются, например, узлы, работа с которыми, помимо воспитания пространственного воображения и развития творческих навыков, позволяет выйти на такие понятия, как пространственная кривая, левая и правая ориентации, принципы классификации и т.д., и имеет немаловажное житейское применение.

Кстати, большое значение лабораторным работам по математике в свое время придавал А.Н. Колмогоров, и в физико-математической школе-интернате при МГУ накоплен большой опыт их проведения. Жаль, что он не получил широкого распространения.

**7. Прагматичность.** Неприятно говорить, но катастрофы типа МММ или Властилины, затронувшие судьбы тысяч наших людей, на совести не только власти, "кинувшей" своих граждан на произвол судьбы, но и школьного курса алгебры. Он не рассматривал такие "мелочи", как финансовые пирамиды, и не готовил выпускников к коллизиям жизни, ориентируясь лишь на "высокие материи" типа цепочек логарифмических и тригонометрических преобразований. Наше "лучшее в мире естественно-научное образование" показало свою полную несостоятельность при столкновении с творчески думающими мошенниками, магами, гадалками и проч.

Есть и другой аспект этого вопроса. Математика могла бы быть более эффективным средством познания окружающего нас мира и решения насущных практических проблем, если бы школьный курс геометрии не ограничивал себя одними скучными окружностями и однообразными кубами, а давал информацию обо всем многообразии геометрических форм мира, конкретно показывал и знакомил с изобилием фигур и тел.

**8. Теория вероятностей.** Впрочем, будем объективны – процесс перестройки программы школьного курса математики пошел. Наконец-то туда включено знакомство с основными понятиями теории вероятностей и математической статистики, появились уже первые учебники. Спор об этом происходил у нас еще почти век назад, во многих странах мира вопрос был решен уже давно. Теперь и наши выпускники школ не будут делать изумленные глаза, услышав по TV слова "доверительный интервал".

**9. Методика преподавания.** Серьезной концептуальной перестройки требует важнейшая для школы наука, исследующая и устанавливающая принципы и методы преподавания математики. Многие важные изменения в программе школьной математики невозможно осуществить, если не согласиться с тем, что отдельные ее вопросы или даже темы допустимо изучать на описательно-демонстрационном уровне, опуская формальные доказательства, добиваясь от учеников понимания сути дела без усвоения и воспроизведения ими (и даже без сообщения им!) "строгих логических обоснований".

Это предложение психологически особенно трудно принять профессионалам, убежденным, что советская и российская методология преподавания математики в школе всегда во главу угла ставила требование строгой научности и логической доказательности (чем и обосновывалось утверждение о нашем "лучшем в мире математическом образовании"). Это, однако, не совсем так. Во-первых, многие моменты школьного курса в принципе невозможно изложить школьникам абсолютно строго – приходится прибегать к "убедительным эрзацам". Во-вторых, достаточно внимательно просмотреть классические учебники А.П. Киселева [3–5] (скажем, те места, где должен работать метод математической индукции), чтобы заметить "описательно-демонстрационное" изложение целого ряда вопросов. В-третьих, наконец, наше образование по физике или химии нисколько не страдало от того, что преподавание этих предметов не содержало всех исчерпывающих логических доказательств.

Главное возражение против "описательно-демонстрационного" изложения основано на широко распространенном (особенно среди математиков) мнении, что математика, только математика и одна лишь математика может воспитать в человеке культуру логического мышления, что исключительно в ходе "строгого" преподавания математики обеспечивается развитие умения правильно рассуждать.

Конечно, нельзя отрицать, что в определенном смысле изучение математики "ум в порядок приводит" (М. Ломоносов), но и не следует преувеличивать, считая, что это – единственный эффективный путь к цели. Логике можно учиться иными путями, не связываясь с непривлекательными для "нематематиков" формальными преобразованиями и скучными рассуждениями. Позвольте в качестве эксперта привлечь выдающегося физика-теоретика, лауреата Нобелевской премии Л. Ландау: "Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путем изучения ненужных вещей люди будто бы научаться логически мыслить". И в самом деле, действительно ли поглощенная изучением языков девочка, декламируя зазубренное как стихи доказательство теоремы о трех перпендикулярах, осваивает логику?

**10. "Математика вступительных экзаменов".** Нельзя сказать, что в школьной математике не происходит никаких перемен. Но некоторые перемены исключительно опасны, и если мы в ближайшее время не найдем здравые пути модернизации школьной программы – можем попасть в тупик.

С прискорбием надо констатировать, что в последние 10–20 лет, помимо "классических" элементарной математики и высшей математики, сформировалась еще одна "область" математики – "математика вступительных экзаменов" (МВЭ). Экзаменаторы вузов и предприимчивые репетиторы уже создали целую "науку", содержащую теоретическое рассмотрение специальных экзаменационных задач и не имеющую никакой образовательной ценности. Ладно бы еще речь шла о дополнительных знаниях, которые необходимы для освоения вузовской программы. Но МВЭ изобилует темами, вопросами, сведениями, задачами, которые никому потом не потребуются (даже на мехмате МГУ!) – после поступления все это можно (и нужно!) спокойно забыть.

В качестве примера возьмем одну лишь тему школьного курса – абсолютная величина (модуль) действительного числа. Модуль числа – далеко не одно из концептуальных изобретений математической науки, скорее это просто удобное, но техническое понятие. В самом школьном курсе оно имеет весьма узкую сферу приложения – разве что дает возможность компактно записывать некоторые операции с участием квадратных корней и логарифмов, удобно сформулировать определение непрерывной функции и "неравенство треугольника".

Нет, я не предлагаю исключить это понятие из школьной программы. Но я не вижу никаких объективных причин для того, чтобы создавать и предлагать школьникам и учителям фундаментальные наукообразные сочинения о модуле и задачах, для решения которых требуется не знание стандартного школьного курса, а специальная дополнительная дрессировка.

Сколько страниц текста нужно написать, чтобы объяснить школьнику, что такое модуль и как с ним работать? Вот "Пособие для абитуриентов и старшеклассников" под названием "Решение задач с модулями" – авторы ухитрились разогнать его до... 304 страниц!

Как и полагается научному трактату, книга состоит из двух глав: "Уравнения с модулями" и "Неравенства с модулями". В науке самое главное – систематичность. Поэтому первая глава содержит параграфы "Уравнения с одним модулем", "Уравнения с двумя модулями", "Уравнения с тремя модулями", "Уравнения с четырьмя и большим число модулей". Интересно, сможете ли вы самостоятельно догадаться, как называются параграфы второй главы?

Энтузиазм творцов МВЭ по обогащению теории модуля на этом не угас, поиск продолжается. И вот уже на вступительных экзаменах появляется задача, в решении которой в другом, более новом пособии для абитуриентов читаем:

"Последнее неравенство следует из того, что для любых чисел $a$ и $b$

$$\max\{|a+b|, |a-b|\} = |a| + |b|."$$

Решение другой задачи в статье для поступающих начинается словами:

"Для уравнения $|y| + |z| = a$ применим схему

$$|y| + |z| = a \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} yz \geq 0; \\ |y+z| = a; \end{cases} \\ \begin{cases} yz \leq 0; \\ |y-z| = a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (a \geq 0)."$$

Не знаю, как вас, а меня особенно подкупает обращенный к школьнику простенький и элегантный оборот речи "применим схему"... Конечно, всем ведь отлично она, схема эта, известна – ну, как таблица умножения. Интересно было бы поставить следственный эксперимент и узнать: смог ли бы сочинитель задачи, сам в свое время заведомо не знавший этой "схемы", до нее додуматься в обстановке вступительного экзамена?

Эти шедевры можно продолжать долго:

"Воспользуемся известной(!) формулой $\sin 5\alpha = \ldots$",

"Далее заметим... $\sin 18° = \ldots$ – известная(!) величина"...

Отдельного внимания заслуживают "новые" темы, открытые и разработанные в рамках МВЭ, – скажем, "Уравнения и неравенства с параметрами" (этой теме посвящено огромное число пособий и брошюр, а сама она уже оформилась в "стройную" теорию с множеством "методов").

Постоянное усложнение задач вступительных экзаменов по математике привело к расцвету репетиторства. Конечно, в дополнительных занятиях с учеником, плохо усваивающим материал или пропустившим уроки по болезни, нет абсолютно ничего дурного (в советские времена это называлось "взять отстающего на буксир"). Но как быть, если для решения задач вступительных экзаменов недостаточно знать (даже хорошо!) то, что проходили на уроках и что написано в школьном учебнике? В крупных городах как-то само собой стало разуметься, что для поступления в вуз надо выплачивать кругленькие суммы репетиторам – "специалистам" по МВЭ. Те, в свою очередь, преследуя очевидные цели и пользуясь очевидными связями, продолжают раскручивать маховик усложнения экзаменационных задач и успешно развивать МВЭ. А что же делать школьникам из деревень, небольших городков, тем, кто проживает вдали от научно-педагогических центров, там, где сегодня и квалифицированный учитель – редкость?

Именно репетиторы и близкие им лица будет активно противодействовать изменению существующей школьной программы по математике. Кстати, сейчас математики упорно просят увеличить часы на свой предмет в школе. Есть основания считать, что это делается не для "осовременивания" программы, а для более подробного изучения "важнейших" тем МВЭ – теории эквивалентности уравнений и неравенств и других вопросов, не имеющих особого значения.

Я думаю, что появление идеи "Единого государственного экзамена" было не случайной блажью, а объективным порождением обстановки репетиторского беспредела. "Кризис математической подготовки" школьников особенно ярко проявляется во все более иезуитских задачах, предлагаемых иногда на приемных экзаменах в вузы, и его надо было преодолевать. Но "хотели, как лучше, а получилось, как всегда" – мы перешли "из огня да в полымя".

Вместо толковых и содержательных задач, действительно проверяющих знание и понимание математики, нам теперь предлагают тесты типа "При каком значении аргумента изображенная на рисунке функция принимает наименьшее значение?", для ответа на который не нужно ничего понимать в математике – достаточно быть просто зрячим.

**11. Новый тип учителя.** Изменения в содержании программы школьного курса математики требуют радикального пересмотра программы и системы подготовки школьных учителей математики, причем эта подготовка должна вестись с существенным опережением по времени, начиная еще со студенческой скамьи. Одновременно и также с опережением необходимо начать работу над школьными учебниками, задачниками, пособиями, описаниями лабораторных работ и т.д.

Но самая серьезная трудность – переобучение действующих учителей, их профессиональная и психологическая переориентация на новые проблемы. А для этого нужно создать соответствующие условия, прежде всего экономические, ибо учитель с 25-часовой недельной нагрузкой физически просто не в состоянии осваивать принципиально новые идей. К сожалению, понимание этого недоступно "власть предержащим".

Серьезные усилия для этого должны предпринять и наши специалисты по методике преподавания математики. Многим из них пора отказаться от "теоретизирования", часто на каком-то "птичьем языке". Что полезного и поучительного может почерпнуть рядовой учитель из сочинения, полного таких, например, пассажей: "Методологической основой системного моделирования содержания математического образования выбран диалектический синтез целого, обеспечивающий структурную связность содержательных единиц не только в рамках данного этапа подготовки, но и предопределяющей взаимоувязывание структурных срезов при движении по этапам"?

## Библиографический список

1. *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.

2. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Киселев А.П.* Алгебра. М.: Физматлит, 2005.
4. *Киселев А.П.* Арифметика. М.: Физматлит, 2002.
5. *Киселев А.П.* Геометрия. М.: Физматлит, 2004.

## Вероятность и азартные игры

*В.В. Афанасьев, М.А. Суворова*

Зарождение математического учения о вероятности относится к XVII веку, когда было положено начало разработке основных понятий, выражающих вероятностную идею. В качестве базовых моделей в разработке языка теории вероятностей выступали модели азартных игр. Схемы этих игр дают достаточно простые модели теоретико-вероятностных явлений, позволяющие в наиболее отчетливой и наглядной форме наблюдать и изучать исходные закономерности соответствующих процессов.

Рассмотрим некоторые вероятностные игры на основные характеристики положения случайных величин, по аналогии с карточной игрой в "двадцать одно очко" предлагаются игры со "сгорающими" очками. При решении этих задач используются вероятностные графы, что делает решения более наглядными и доступными.

Под **вероятностными играми** будем понимать такие игры двух или более участников, которые допускают вероятностные оценки (вероятность победы участника, математические ожидания величины выигрыша и т.п.).

### Безобидные игры

Понятие безобидной игры вводится через главную характеристику случайной величины. Математическое ожидание предлагается находить как вес всего графа.

Игра называется **безобидной**, если математическое ожидание чистого выигрыша равно 0.

Игра является **благоприятной** (**неблагоприятной**) для игрока, если математическое ожидание чистого выигрыша больше 0 (меньше 0).

**Пример 1.** Из полного набора домино наугад извлекаются две "кости". За каждый извлеченный "дупль" выплачивается приз в размере 50 рублей. Каким должен быть вступительный взнос, чтобы игра была безобидной?

**Решение.** Пусть вступительный взнос составляет $a$ рублей. Найдем математическое ожидание величины выигрыша $X$ по ее графу распределения.

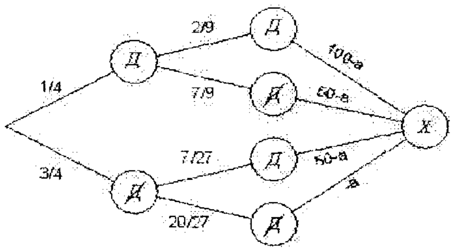



Рис. 1

$M[X] = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot(100-a)+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{9}\cdot(50-a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{27}\cdot(50-a)+\frac{3}{4}\cdot\frac{20}{27}\cdot(-a) = 25-a$. Откуда $a = 25$ рублей.

## Игры со "сгорающими" очками

Игры со "сгорающими" очками – это игры, в которых участники по очереди проводят какие-либо опыты сериями и могут добровольно передать ход другому игроку после определенного числа испытаний или набрав то или иное число очков в данной серии; или ход передается по принуждению, когда очки серии "сгорели" при определенном исходе испытания. Игра прекращается после проведения одинакового числа серий у участников. Побеждает тот, у которого в результате получается наибольшая сумма очков во всех сериях. Возможны два подхода к рассмотрению таких игр: a) по количеству набранных в серии очков; b) по количеству испытаний в каждой серии [1].

**Пример 2.** Два игрока бросают две монеты сериями по очереди, складывая количество выпавших гербов, за каждый выпавший герб игрок получает одно очко, в любой момент игрок может остановиться и передать ход другому игроку, но если не выпало ни одного герба, то очки серии "сгорают" и ход передается другому игроку. Какой стратегии выгодней придерживаться игроку?

**Решение 1** (по числу набранных очков). Пусть мы набрали $N$ очков в данной серии, а случайная величина $X = \{$число очков после следующего броска$\}$.

Построим граф распределения и по нему найдем математическое ожидание случайной величины $X$.

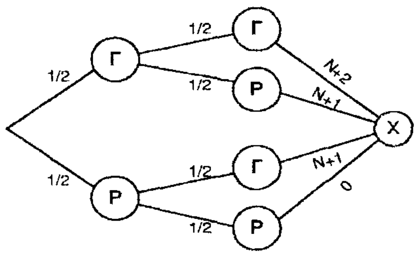



Рис. 2

$$M[X] = \frac{1}{4}(N+2) + \frac{1}{4}(N+1)\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4}N + 1$$

Продолжение станет нецелесообразным, если ожидаемое число очков не увеличится, т.е.

$$M[X] \le N; \quad \frac{3}{4}N + 1 \le N; \quad N \ge 4.$$

Следовательно, можно предложить игроку бросать пару монет в серии, пока сумма очков не больше 4, иначе передать ход другому игроку.

**Решение 2** (по числу сделанных бросков).

Случайная величина $X_1 = \{$число очков при одном бросании$\}$ имеет следующий закон распределения.

| $X_1$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/4 | 2/4 | 1/4 |

Найдем математическое ожидание случайной величины $X_1$

$$M\left[X_1\right] = 1 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

Продолжение станет нецелесообразным, если ожидаемое число очков на следующем ходу не увеличится. Значит, будем вычислять математические ожидания числа набранных очков, постепенно увеличивая количество сделанных бросков. Как только вычисленное математическое ожидание станет меньше, значит, этот бросок уже не выгоден. Построим граф распределения случайной величины $X_2 = \{$число очков при двух бросаниях$\}$. В вершинах графа укажем количество выпавших гербов.

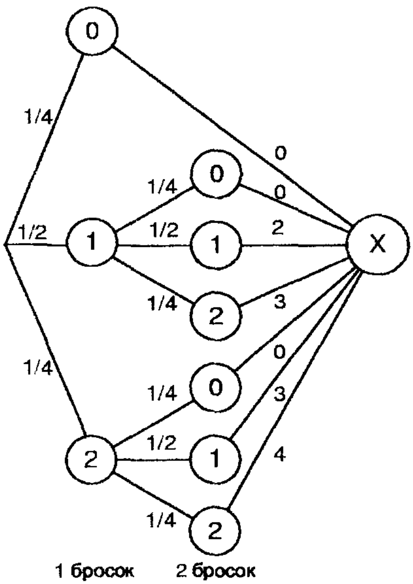



Рис. 3

Найдем математическое ожидание случайной величины $X_2$:

$$M\left[X_2\right] = 4 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} = 1,5.$$

Так как за два хода ожидаемый выигрыш больше, чем за один, то продолжаем играть.

Построим граф распределения случайной величины $X_3 = \{$число очков при трех бросаниях$\}$.

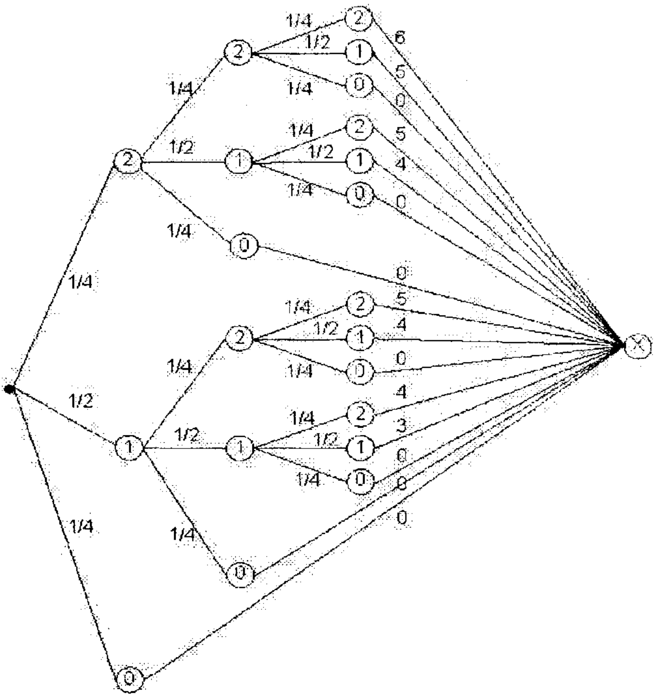


Рис. 4

$$M[X_3] = 6 \cdot \tfrac{1}{64} + 5 \cdot \tfrac{1}{32} + 0 \cdot \tfrac{1}{64} + 5 \cdot \tfrac{1}{32} + 4 \cdot \tfrac{1}{16} + 0 \cdot \tfrac{1}{32} + 0 \cdot \tfrac{1}{16} +$$
$$+5 \cdot \tfrac{1}{32} + 4 \cdot \tfrac{1}{16} + 0 \cdot \tfrac{1}{32} + 4 \cdot \tfrac{1}{16} + 3 \cdot \tfrac{1}{8} + 0 \cdot \tfrac{1}{16} + 0 \cdot \tfrac{1}{8} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} = 1,6875.$$

Так как за три хода ожидаемый выигрыш больше, чем за два, то продолжаем играть.

Аналогично вычислим математические ожидания сумм очков:

– за 4 хода: $M[X_4] = 1,6875$. Ожидаемый выигрыш за 4 хода не превосходит выигрыша за 3 хода;

– за 5 ходов: $M[X_5] \approx 1,582$. Так как $M[X_5] < M[X_4]$, то делать 5-й ход не рекомендуется.

Значит, следует делать не более 3 или 4-х бросков.

**Сравним эффективность** предложенных **двух подходов** в определении стратегии по количеству набранных очков и по количеству подбрасываний в серии. Для этого найдем математические ожидания набранных очков в серии.

1. Стратегия по сумме набранных очков. Прекратим испытания при появлении, по крайней мере, 4-х очков в серии. Построим вероятностное дерево исходов:

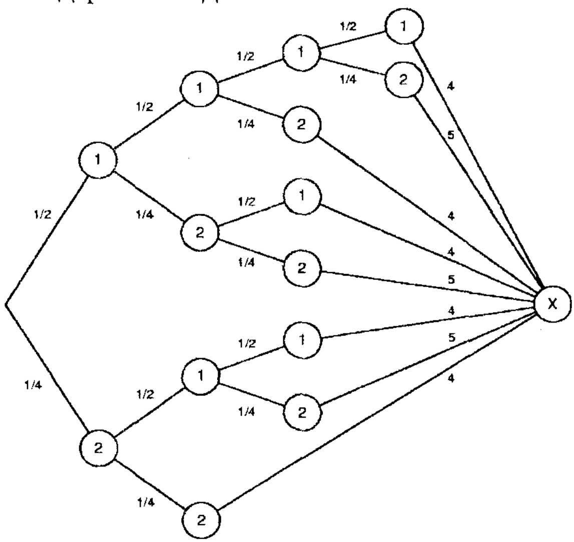



Рис. 5

$$M[X] = 4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+4\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}+5\cdot\frac{1}{32}+4\cdot\frac{1}{16} = \frac{20}{16}+\frac{15}{32} = \frac{55}{32} \approx 1,72.$$

2. Стратегия по числу бросков. Чтобы вычислить математическое ожидание суммы набранных очков, следует учитывать, что после сгорания ход передается сопернику. Поэтому необходимо построить полный граф с учетом сгорания очков, как было сделано во втором способе решения. При определении стратегии мы нашли, что ожидаемая сумма очков для 3 и для 4 бросков равна 1,6875.

Таким образом, так как 1,72 >1,6875, то стратегия по сумме набранных очков в серии является более эффективной.

## Игры на моду

Напомним, что те значения случайной величины, которые имеют наибольшую вероятность, называются модой этой случайной величины. Такое название возникло, по-видимому, по аналогии с чаще всего встречающимися и, следовательно, модными изделиями.

**Пример 3.** Два игрока пишут на листе бумаги, при каком бросании игральной кости они ожидают первого появления шестерки. Затем производится серия подбрасываний кости. Если подбрасывание, на котором впервые выпадает шестерка, совпадает с номером, записанным игроком, то игрок получает одно очко. Выигрывает тот, кто первым наберет 5 очков. Какое бы число вы записали?

**Решение.** Порядковый номер подбрасывания, при котором выпадет шесть очков, является случайной величиной $X$. Построим граф распределения случайной величины $X$.

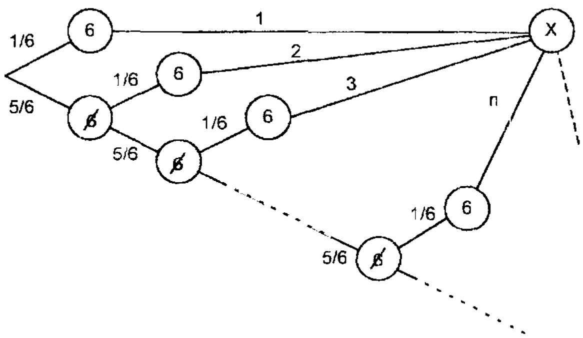



Рис. 6

Вычислим вероятности первого выпадения шестерки.

Для первого бросания $P_1 = \frac{1}{6} \approx 0,1667$. Для второго бросания $P_2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36} \approx 0,1389$. Для $n$-го бросания $P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$.

Таким образом, максимальная вероятность выигрыша ожидается, если записывать число "1", что является модой случайной величины $X$.

**Пример 4.** Имеется игровой стол, на котором размечена прямоугольная таблица для ставок, по вертикали от 0 до 2 и по горизонтали от 2 до 12. Участники игры ставят монеты одного достоинства на одну из клеток таблицы игрового стола, причем две монеты не могут находиться в одной клетке. Затем проводятся два испытания. Первое испытание состоит в подбрасывании двух монет и определении числа выпавших "гербов", а второе испытание состоит в подбрасывании двух игральных кубиков и в определении суммы выпавших очков. Если результаты экспериментов совпали с координатами клетки, на которую поставил игрок, то он забирает все остальные ставки. На какую клетку выгоднее всего ставить свою монету?

**Решение.** Вероятность выигрыша на определенной клетке равна произведению вероятностей наступления определенного события при одном испытании и при другом испытании. Следовательно, чтобы вероятность выигрыша была максимальной, нужно, чтобы произведение было максимальным, что достигается, когда оба сомножителя максимальны.

Рассмотрим две случайные величины:
$X$ = {число гербов при подбрасывании двух монет},
$Y$ = {сумма очков при подбрасывании двух игральных костей}.
Составим законы распределения этих случайных величин:

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

| $Y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ | $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ |

Очевидно, что максимальные сомножители соответствуют максимальным вероятностям, то есть монету следует ставить на клетку с координатами, соответствующими модам случайных величин, т.е. на клетку с координатами (1,7).

## Игры на вероятностную медиану

Одной из важнейших числовых характеристик случайной величины является медиана. **Медианой** дискретной случайной величины $X = \{x_i\}$ $(P\{X = x_i\} = p_i)$ называется такое значение $x_k$, что $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i \geq \frac{1}{2}$ и $\sum\limits_{i=k}^{n} p_i \geq \frac{1}{2}$(или $\sum\limits_{i=k}^{\infty} p_i \geq \frac{1}{2}$ для бесконечной случайной величины), то есть, что процесс почти равновероятно закончится до $x_k$ или продолжится после.

Таким образом, вероятностная медиана делит закон распределения на две равновероятностные (или почти равновероятностные) части, чем напоминает нам геометрическую медиану. Этот аналог будет способствовать при конструировании игр на вероятностную медиану.

**Пример 5.** Игроку предлагается купить жетоны по 2 рубля за каждый. Затем подбрасывается игральная кость. За каждое выпавшее очко на каждый купленный жетон выплачивается по 3 рубля, а если жетонов больше, чем выпало очков, то за каждый оставшийся жетон выплачивают уже только по 1 рублю. Сколько нужно купить жетонов, чтобы выигрыш был максимальным?

**Решение.** Так как на кости может выпасть от одного до шести очков, то покупать жетонов больше шести нет смысла. Составим граф испытания и таблицу платы за покупку жетонов, величину выигрыша и прибыли игрока.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Плата | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Выигрыш | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| Прибыль | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Плата | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| Выигрыш | 5 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 6 | 8 | 10 | 12 | 12 | 12 |
| Прибыль | -1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | -2 | 0 | 2 | 4 | 4 | 4 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Плата | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| Выигрыш | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 15 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| Прибыль | -3 | -1 | 1 | 3 | 5 | 5 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

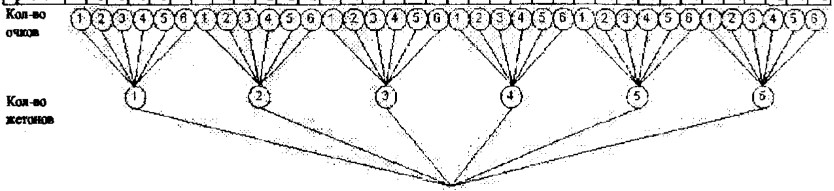



Рис. 7

Вычислим математическое ожидание величины прибыли при покупке определенного числа жетонов.

| Сумма очков $i$ \ Кол-во жетонов $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -4 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |
| 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 4 |
| 6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Мат. ожидание прибыли $M_j$ | 1 | 1,67 | 2 | 2 | 1,67 | 1 |

Если купили, например, 6 жетонов, то

$$M_6 = (-4)\cdot\frac{1}{6} + (-2)\cdot\frac{1}{6} + 0\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 1,$$

а если купили 5 жетонов, то

$$M_5 = \frac{1}{6}\left((-3) + (-1) + 1 + 3 + 5 + 5\right) \approx 1,67.$$

Аналогично находим, что $M_4 = 2$, $M_3 = 2$, $M_2 = 1,67$, $M_1 = 1$.

Максимальная ожидаемая прибыль будет, если покупать 3 или 4 жетона. Заметим, что для числа очков, выпадающих на игральной кости, значения 3 и 4 являются медианами. Можно предположить, что для любого эксперимента, как с независимыми исходами, так и с зависимыми, этот вывод будет истинным. Доказательство этого общего утверждения предложено авторами в [2].

Некоторые специалисты определяют медиану только для непрерывных случайных величин или допускают только однозначное ее существование. Полученный результат является убедительным примером в пользу принятого авторами и другими математиками определения медианы, допускающего существование даже двух медиан для дискретных случайных величин.

## Библиографический список


1. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей в вопросах и задачах: Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. 250 с.
2. *Афанасьев В.В., Суворова М.А.* Вероятностные игры на медиану // Успехи современного естествознания. М., 2005. № 8. С. 25–27.

## Возможности использования различных видов мышления в школьном математическом образовании

*В.А. Гусев, В.М. Шевченко*

Говоря о мышлении, следует рассмотреть наиболее важные *виды мышления*, которые выделены в психологии и с которыми мы постоянно имеем дело при обучении математике.

В книге С.Л. Рубинштейна "Основы общей психологии" читаем: "Мышление человека включает в себя мыслительные операции различных *видов* и уровней... Специфические особенности различных видов мышления обусловлены у разных людей прежде всего специфичностью задач, которые им приходится разрешать; они связаны также с индивидуальными особенностями, которые у них складываются в зависимости от характера их деятельности. В психологии распространена следующая простейшая и несколько условная классификация видов мышления: *наглядно-действенное, наглядно-образное* и *словесно-логическое (теоретическое)* мышление" [12. С. 334].

Охарактеризуем отдельно каждый из данных видов мышления. В.П. Зинченко и Н.Ю. Вергилес о ***наглядно-действенном*** мышлении пишут следующее: "При наглядно-действенном мышлении формируются такие мыслительные операции, как постановка цели, анализ данных условий, соотнесение результатов преобразований с поставленными целями и т.п. Его основная особенность заключается в том, что объектом непосредственных мысленных преобразований служит реальная ситуация. Эта форма мышления является основной и первой ступенью для развития других форм мыслительной деятельности" [4. С. 470].

Наглядно-действенное мышление рассматривается чаще всего как наиболее характерный тип мыслительной деятельности у детей дошкольного и младшего школьного возраста. Отметим при этом, что наряду с наглядно-действенным в этот период развиваются и другие виды мышления.

Вот что по этому поводу пишет Б.А. Сосновский: "...наглядно-действенное мышление может иметь место только в том случае, если ребенок непосредственно воспринимает предмет и совершает с ним практические действия. Решение задачи происходит на основе реального преобразования ситуации или предмета".

Можно выделить следующие основные характеристики наглядно-действенного мышления:

1) основой для процесса формирования наглядно-действенного мышления служит реальная ситуация; этот вид мышления формируется в процессе реального преобразования ситуаций или предметов,

2) в процессе наглядно-действенного мышления учащийся непосредственно воспринимает предмет и совершает с ним практические действия,

3) при формировании наглядно-действенного мышления основные приемы мыслительной деятельности (анализ, синтез, сравнение, обобщение) осуществляются как практические действия.

За последние годы накоплен существенный опыт развития наглядно-действенного мышления при изучении геометрического материала в начальной школе. В книге "Методика обучения геометрии" [6] описан такой опыт, накопленный Н.С. Подходовой в Санкт-Петербурге, а также В.А. Панчищиной в Томске. Вместе с тем, предстоит сделать очень много, чтобы понять суть наглядно-действенного мышления и организовать его формирование и использование на уроках математики. В этом процессе, например, при изучении геометрии чрезвычайно важно сформировать у учащихся зрительные образы основных геометрических фигур и дать им первые представления об их изображении.

Перейдем к рассмотрению ***наглядно-образного*** вида мышления. А.Б. Сосновский разграничивает первый и второй вид мышления следующим образом: "В отличие от наглядно-действенного мышления человек оперирует не самим предметом, а элементами его образа, которые могут быть представлены в виде рисунка, схемы, модели или внутреннего психического образа объекта. Поиск неизвестного осуществляется через выявление скрытых свойств, связей и возможных преобразований элементов образа объекта. Теперь, чтобы сложить самолет из отдельных частей, ребенку не обязательно манипулировать с ними. Он может сделать это, рассматривая рисунок конечной фазы или опираясь на динамическую картину последовательных преобразований своих представлений о желаемой цели" [9. С. 212].

О.К. Тихомиров отмечает: "...наглядно-образное мышление играет важную роль в формировании у детей понимания процессов изменения и развития предметов и явлений" [13. С. 9].

Имеется также большое количество исследований, посвященных наглядно-образному мышлению, у И.С. Якиманской: "Поскольку образное мышление рассматривалось в педагогической психологии в основном лишь в генетическом плане – как определенная стадия развития мышления, – это привело к недооценке самостоятельной роли этой формы мышления в умственном развитии учащихся. Не учитывалось, что образное мышление само развивается, что оно является равноценной формой интеллектуальной деятельности, имеет довольно сложные формы проявления и разнообразные функции" [16. С. 14].

А. Пуанкаре, анализируя особенности образного мышления, подчеркивал, что оно является наиболее существенным свойством человеческого мышления вообще. В частности, "...способность действовать в соответствии с представлением, умение свободно оперировать образами рассматривается как одно из профессионально важных качеств, необходимых для овладения и успешного осуществления самых разнообразных видов деятельности" [10. С. 112].

Не зря в течение последних лет именно наглядно-образное мышление закладывается в основу изучения школьного курса геометрии, в то время как в течение предыдущих десятилетий были попытки вывести на первое место элементы логического мышления в отрыве от образного.

Все сказанное необходимо осмыслить для применения, например, в преподавании геометрии, черчения, рисования. Ясно одно, что чертежу (рисунку) необходимо уделить больше внимания, чертежи должны быть большие и красивые, выполненные по специальным правилам. Так, в учебниках геометрии В.А. Гусева [1, 2] чертежи даются исключительно в динамике, все проводимые построения никогда не выполняются на одном чертеже. Уже этот простой подход дает большой положительный эффект в восприятии и усвоении учебного материала.

И.С. Якиманская пишет: "Систематизация исследований в данной области позволяет выделить *четыре этапа* функционирования образного мышления: 1) *создание первичного образа* (на основе некоторого наглядного материала), 2) *создание вторичного образа* по памяти, 3) *оперирование образами* и 4) *творческое создание новых образов*" [15. С. 12].

В соответствии с исследованиями И.С. Якиманской, опишем четыре этапа наглядно-образного мышления.

"*Создание первичного образа* на уровне чувственного восприятия не является просто "мысленным фотографированием" реального объекта, "абсолютным" отражением его свойств. В образе закрепляются те признаки объекта, которые воспринимающий субъект считает (сознательно или неосознанно) самыми важными...

...На следующем этапе образного мышления происходит *создание вторичного образа.* Как правило, оно осуществляется по памяти (при отсутствии реального объекта восприятия или при сознательном отказе от его использования в качестве наглядной опоры)... В результате вторичный образ отражает признаки уже целого класса объектов, т.е., по существу, приближается к понятию...

...На третьем этапе *оперирования образами* происходит активное преобразование созданных или воспроизведенных по памяти образов. Направление и способы этих преобразований задаются проблемной ситуацией (требованиями задачи) и личными установками воспринимающего субъекта... Это означает, что на этом этапе речь не идет о создании новых образов – они все те же, только меняются комбинации составляющих их элементов...

...На этапе *создания новых образов* мысленное оперирование образами может стать как бы "самоцелью". Образы преобразуются под влиянием некоторых ассоциаций, аналогий и т.п. В результате рождаются новые образы, обладающие часто совершенно неожиданными качествами. В этом случае можно говорить об образном воображении" [15. С. 12–14].

Итак, мы рассмотрели обширный материал о двух видах мышления - наглядно-действенном и наглядно-образном для того, чтобы понять сущность и важность этих видов мыслительной деятельности в процессе математического образования. Приведем некоторые примеры, связанные с использованием этих видов мышления при обучении геометрии в школе.

Прежде всего, отметим, что во-первых, очень трудно провести четкие границы между наглядно-действенным и наглядно-образным мышлением, а во-вторых, нелегко разграничить этапы функционирования самого наглядно-образного мышления, указанные выше. Совершенно ясно, что при наглядно-действенном мышлении и на первых этапах формирования наглядно-образного мышления у учащихся должны сложиться наглядные представления о различных геометрических фигурах, а также умения выполнять простейшие чертежи, на которых эти фигуры будут изображаться.

Не так давно, анализируя систему обычных учебных задач при изучении курса геометрии в основной школе, пришлось констатировать тот факт, что в подавляющем большинстве существующих учебников по геометрии основные понятия формируются плохо. Так, например, иногда система задач по этой теме начинается с задач о свойствах средней линии трапеции, что, конечно, довольно странно. Безусловно, у ученика прежде всего должен быть сформирован *образ трапеции*, причем практика показывает, что он должен представлять, по крайней мере, два вида трапеции: "высокую" (рис. 1 а) и "длинную" (рис. 1 б).

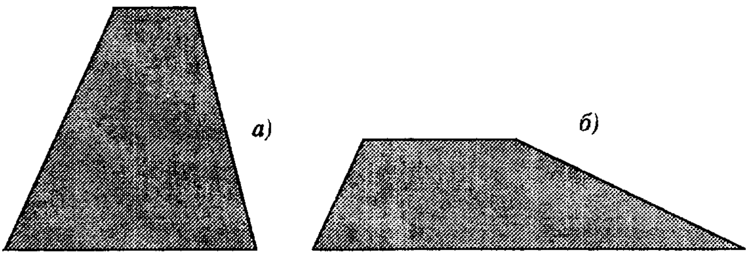



Рис. 1

Если образы этих видов трапеции у ученика не сформированы, то возникают трудности при решении, например, задач такого вида: “В трапеции проведена биссектриса одного из ее углов...” Причем в условии задачи не обсуждается вопрос о том, какую из сторон трапеции пересекает эта биссектриса. А ведь в случае, изображенном на рис. 1 а), она пересечет боковую сторону трапеции (рис. 2 а), а в случае, изображенном на рис. 1 б), биссектриса пересечет верхнее основание трапеции (рис. 2 б).

Кроме этого, уже применяя анализ, мы приходим к третьему случаю – когда биссектриса совпадает с диагональю трапеции (рис. 2 в). В геометрии имеется большое число задач на этот случай.

Представляется, что это убедительный пример удачного использования наглядного образа при изучении свойств основных геометрических фигур.

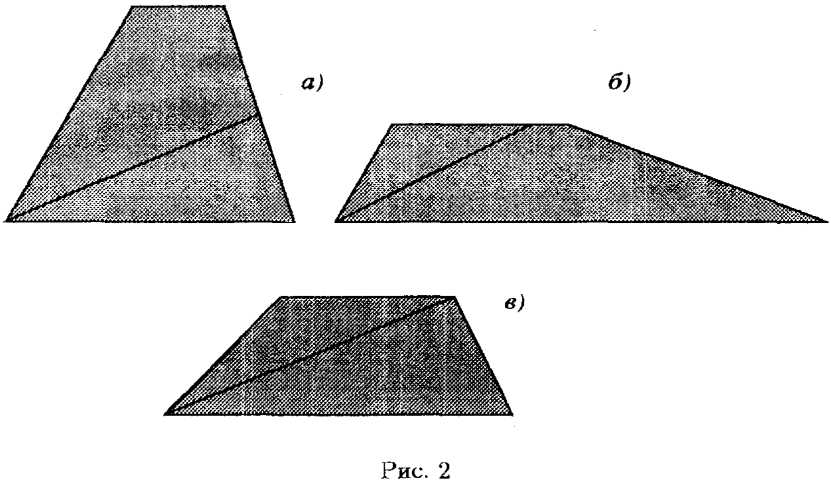
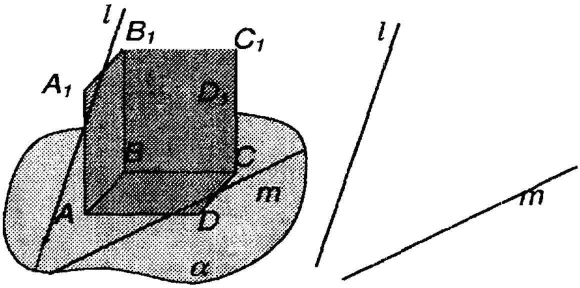



Рис. 2

Приведем примеры, когда в школьном курсе геометрии довольно рано необходимо формировать “*новые образы*”, например, скрещивающихся прямых или трехгранного угла.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть трудности, связанные с недостаточно развитым геометрическим воображением учащихся. Он состоит в следующем: если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то следует ее связать с каким-нибудь вспомогательным телом, например с кубом.

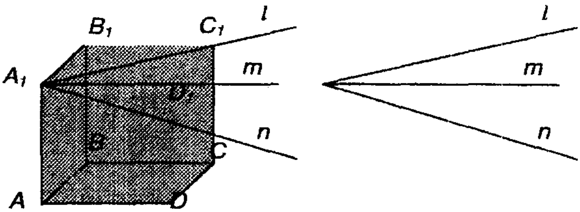
На рис. 3 а хорошо видно, что прямые $l$ и $m$ являются скрещивающимися. Убрали куб (рис. 3 б), и пространственная наглядность исчезла – мы видим пересекающиеся прямые $l$ и $m$ на плоскости.




а) б)

Рис. 3

Другой пример. Три луча $l$, $m$ и $n$ выходят из одной вершины $A_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4 а). Ясно, что они представляют собой ребра трехгранного угла. На рис. 4 б куба нет, поэтому картина стала плоской. Чтобы увидеть на ней тот же трехгранный угол, мы должны заставить свое воображение трудиться.




а) б)

Рис. 4

Приведенные примеры полезно рассматривать в обратном порядке. Можно нарисовать рис. 3 б и 4 б и спросить: какие фигуры изображены на этих рисунках и какими свойствами они обладают? Можно себе представить радость ученика, если он сам или с помощью учителя догадается рассмотреть "*вспомогательный куб*" и получить рис. 3 а и 4 а.

Необходимо продолжать исследования проблем, связанных с развитием у учащихся наглядно-действеннного и наглядно-образного видов мышления при обучении геометрии, так как от этого во многом зависит успех геометрического образования в целом.

Перейдем к рассмотрению третьего вида мышления – ***словесно-логического*** *(теоретического)*. Б.А. Сосновский по этому поводу пишет следующее: "Данный вид мышления характеризуется еще более глубоким отрывом мышления от реального объекта. Человек начинает оперировать понятиями и логическими конструкциями, функционирующими на базе языка. Он овладевает основными логическими операциями мышления, которые становятся его внутренними мыслительными операциями. К ним относятся анализ, синтез, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация" [9. С. 212].

Парадокс заключается в том, что если по наглядно-действенному и наглядно-образному видам мышления все же имеются довольно убедительные исследования, то по поводу словесно-логического мышления, которое пронизывает все обучение математике в школе и вузе, чрезвычайно мало исследований, которые бы могли дать практические рекомендации при обучении математике.

Необходимо тщательно исследовать возможности формирования словесно-логического мышления при изучении математики на разных этапах изучения курса, в разных аспектах его дифференцированного изучения.

Можно привести еще одну классификацию видов мышления, которая довольно близка к приведенной выше. Это классификация Ж. Пиаже, в основании которой лежат возрастные рамки и возрастные особенности учащихся.

Ж. Пиаже выделяет следующие стадии развития мышления:

"1) *сенсомоторное мышление* (до 2-х лет);

2) *дооперационное* (до 7 лет);

3) *конкретные операции* или *операционные группировки* (до 12 лет);

4) *формальные операции* или *формальное мышление* (до 16

лет)" [7. С. 205].

Мы видим, что предложенная классификация Пиаже, с одной стороны, довольно похожа на предложенную выше, а с другой стороны, напрямую связана с возрастными особенностями. Кроме того, Ж. Пиаже и его сторонники накопили интересный материал о развитии мышления (интеллекта) на первых годах жизни ребенка: 20% интеллекта он приобретает к концу первого года жизни, 50% – к четырем годам, 80% – к восьми годам, 92% закладывается до 13 лет. Это доказывает, что уже в таком возрасте возможна высокая предсказуемость будущих достижений человека, его индивидуальных особенностей.

Психолог Я.А. Пономарев [8. С. 42] считал, что пик интеллектуального развития достигается уже в 12 лет, но его нельзя смешивать с пиком творческой продуктивности, который наступает много позже, так как высокая продуктивность невозможна без большого багажа знаний, жизненного опыта, целеустремленности и ряда других качеств, которыми еще не обладает подросток.

Из всего сказанного ясно одно: мышление формируется и развивается очень рано. Нам представляется, что мы полностью не оценили этой ситуации, в частности, обучение математике в начальной школе должно включать в себя не какой-либо дополнительный материал, не соответствующий возрастным особенностям учащихся, а должно обязательно содержать материал, который формирует и развивает мыслительную деятельность учащихся. Мы не призываем к увеличению объема изучаемого материала, а считаем необходимым создание соответствующей системы задач и технологии обучения.

Помимо видов мышления, рассмотренных выше, в психологии выделяют интуитивное, теоретическое, практическое, критическое, творческое, дивергентное, конвергентное и другие виды мышления. Материал по этим видам мышления часто очень противоречив и иногда плохо согласуется с процессом математического образования.

Рассмотрим более подробно ***творческое мышление***, т.к. именно оно самым непосредственным образом связано с процессом математической деятельности.

Характеризуя творческое мышление, Б.А. Сосновский отмечает: "Существует подход, при котором критерием творческого мышления считается создание человеком новых продуктов, обладающих общественной значимостью (объективная новизна). Если с этим согласиться, то подавляющая часть людей окажется в группе "нетворческих". Более правомерно рассматривать новизну результата по отношению к самому мыслящему человеку (субъективная новизна). Но и этот критерий не отражает всех аспектов творческого мышления, так как не касается особенностей процесса мышления" [9. С. 215].

Безусловно, творческая деятельность, творческое мышление играют огромную роль в различных аспектах математического образования. В этом направлении большой интерес представляют исследования польского математика и педагога М. Клякля: "С одной стороны на математику можно смотреть как на некие "готовые знания", которые проявляются как набор теорий, понятий, теорем и их доказательств, примеров, алгоритмов и т.п... Читая такие исследования, мы часто увлекаемся красотой, сжатостью, простотой логической конструкции этого "готового здания математических знаний".

Иногда, к сожалению, именно только такие знания, такая "готовая математика" преподается в школе для заучивания наизусть...

Но у математики есть и другое воплощение, другой облик, когда эта наука понимается как некая тонкая, специфическая интеллектуальная деятельность, результатом которой и является "готовая математика".

По крайней мере, эти два воплощения математики надо уметь различать, если мы хотим охарактеризовать творческое мышление в области математики" [5. С. 34].

В заключение приведем выделенные М. Клякля виды творческой математической деятельности, т.к., на наш взгляд, они создают наиболее полную и ясную картину творческого вида мышления, о котором, как это ни странно, математики говорят очень мало.

1) К первому виду творческой математической деятельности М. Клякля относит *выдвижение гипотез* и *их проверку*: "Самой важной характеристикой творческой математической деятельно-

сти, связанной с выдвижением гипотез, является понимание учениками того, что разнообразные эмпирические действия, такие, как, например, вычисления или использование рисунков, конкретных моделей или рассуждений по аналогии, могут давать право лишь на выдвижение гипотез. Развитие такого понимания требует создания таких ситуаций, чтобы в момент, когда учащиеся убеждены в том, что все происходит "несомненно так, как видно", оказалось бы, что это не так. Именно такие ситуации порождают некую осторожность и ведут к образованию подхода, свойственного математикам: пока у меня нет доказательства, я могу выдвинуть только гипотезу" [5. С. 53].

2) Существенную роль в творческой математической деятельности играет *творческое восприятие, переработка и использование информации*. "Творческое восприятие информации заключается в отборе среди многих, одновременно воспринимаемых факторов, такого их множества, которое дает возможность их преобразования в новую информацию, которая становится элементом знаний нового качества. В свою очередь, нестандартное использование приобретенных знаний, например в других, новых задачах, является также характерным свойством для каждого творчества, в особенности математического" [5. С. 55].

3) К третьему виду творческой математической деятельности М. Клякля относит *перенос (трансферт) метода:* "Исходной точкой третьего вида творческой математической деятельности является некоторая проблемная задача. Учащиеся сами или с помощью учителя находят ее решение, которое опирается на какую-то новую идею. Анализ этой идеи позволяет выделить из нее основу, отбрасывая несущественные обстоятельства. Это ведет к осознанию учащимися целого класса задач, для решения которых можно применить полученную идею решения. Для этого класса задач исходный замысел (идея) является надежным методом их решения. Полученный таким образом метод действия можно попытаться применить в других ситуациях, вводя необходимые существенные модификации в предложенный метод. Эти задачи могут быть более общими или только похожими на исходную проблему. Это могут быть также частные или предельные случаи.

В геометрических задачах применение этого вида творческой математической деятельности часто сводится к повышению (или понижению) размерности (например, переход из плоскости в пространство)" [5. С. 56].

4) Последним, но очень важным видом творческой математической деятельности учащихся является *дисциплина и критичность мышления.* "...она направлена на преодоление конфликта между требованиями формального мышления и другими его аспектами, например, интуицией, внушением, моделью или частным случаем, которые мы используем в рассуждениях. Особенно этот вид творческой математической деятельности проявляется в ситуации, когда в рассуждениях (например, в доказательствах) надо пользоваться новыми для учащихся определениями, активно реагировать на появляющиеся противоречия, контролировать свои либо чужие рассуждения как с логической, так и с математической точек зрения" [5. С. 56].

О.К. Тихомиров показал, что спецификой творческого мышления является "...самостоятельное формирование личностью по ходу мыслительной деятельности новых целей, гипотез, планов, оценок и других *новообразований.* Под их влиянием исходная цель, сформулированная в вопросе, многократно преобразуется в соответствии с результатами анализа условий задачи. Поиск идет в различных направлениях. Такое мышление именуется дивергентным, в противоположность конвергентному, когда человек ограничивается одним вариантом решения" [13. С 23].

В своем высказывании О.К. Тихомиров говорит о двух, очень важных видах мышления: дивергентном и конвергентном. Следует отметить, что исследованию этих типов мышления посвящено большое количество работ зарубежных психологов. Вот что по этому поводу написано в "Большом толковом психологическом словаре" А. Ребера: "...*дивергентное мышление* ... характеризуется процессом "движения в разных направлениях", расхождением идей с тем, чтобы охватить различные аспекты, имеющие отношение к данной проблеме. Такое мышление часто связано с творчеством, так как оно нередко дает новые идеи и решения...

...*Конвергентное мышление* ... характеризуется сведением вместе или синтезом информации и знаний, сосредоточением на решении проблемы. Такое мышление часто связано с решением задач, особенно с проблемами, которые имеют только одно правильное решение" [11. С. 469].

Сформулируем для полноты картины еще одну точку зрения – Дж. Гилфорда: "Дивергентное мышление – процесс создания оригинальных и необычных идей с помощью многовариативного поиска решения проблемы" [17. С. 34].

Представленное краткое описание самой сущности творческого мышления и его разновидностей (дивергентного и конвергентного мышления) показывает, что эти виды мышления, а особенно их применение, чрезвычайно характерны практически для всех видов математической деятельности.

В книге "Психолого-педагогические основы обучения математике" написано, что "...формирование дивергентного мышления не идет само собой, тем более что "командный стиль обучения", который преобладал (да и преобладает еще) в системе математического образования, вовсе не способствует развитию такого мышления. Этим вопросом следует специально заниматься" [3. С. 50].

## Библиографический список

1. *Гусев В.А.* Геометрия. 5–6 классы: Учебное пособие. М.: Русское слово, 2002. 256 с.
2. *Гусев В.А.* Геометрия. 7 класс. М.: Русское слово, 2003. 240 с.
3. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум-М, 2003. 432 с.
4. *Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю.* Формирование зрительного образа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 106 с.
5. *Клякля М.* Формирование творческой математической деятельности учащихся в классах с углубленным изучением математики в школах Польши. Плоцк: Риттер, 2003. 223 с.
6. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. / Под ред. В.А. Гусева. М.: Академия, 2004. 368 с.

7. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М.: Просвещение, 1969. 659 с.
8. *Пономарев А.Я.* Психология творчества и педагогика. М.: Педагогика, 1976.
9. Психология: Учебник для педагогических вузов / Под ред. Б.А. Сосновского. М.: Юрайт-Издат, 2005. 660 с.
10. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1990. 735 с.
11. *Ребер А.* Большой толковый психологический словарь: В 2 т. М.: АСТ, 2003. Т.1. 591 с.
12. *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии. СПб.: Питер Ком, 1999. 720 с.
13. *Тихомиров О.К.* Психология мышления. М.: Академия, 2002. 288 с.
14. *Хинчин А.Я.* Педагогические статьи. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. 204 с.
15. *Якиманская И.С.* Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления. М.: Педагогика, 1989. 221 с.
16. *Якиманская И.С.* Образное мышление и его место в обучении // Советская педагогика. 1968. № 12. С. 62–71.
17. *Guilford J.* The Nature of Human Intelligence. New York: Gray Hill, 1968. 284 p.

## О методологических проблемах преподавания элементов комбинаторики и теории вероятностей студентам гуманитарных специальностей

*С.Н. Бычков*

Новыми образовательными стандартами элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в обязательную программу средней школы. Теория вероятностей довольно существенно отличается от геометрии и других разделов школьной программы, поэтому сложные методологические проблемы, сопровождавшие эту научную дисциплину на всем пути ее исторического развития, становятся весьма актуальными для преподавания ее учащимся, не обладающим неординарными математическими способностями.

В том, что эти проблемы действительно нетривиальны, можно убедиться хотя бы на примере переписки между А.Д. Александровым и А.Н. Колмогоровым в связи с подготовкой основоположником современной теории вероятностей статьи [1] для сборника "Математика, ее содержание, методы и значение".

Хотя выдающийся специалист в области теории вероятностей А.Я. Хинчин и написал в своем отзыве на первый вариант статьи, что "написанная на очень высоком научном уровне, без всяких скидок на неподготовленность читателя, она в то же время доступна пониманию широкого круга лиц, интересующихся математикой" [2. С. 111], ответственный редактор книги А.Д. Александров, область научных интересов которого не была связана непосредственно с этой дисциплиной, пришел к другому мнению. Признавая, что статья "Вероятность" в БСЭ по простоте и, вместе с тем, глубине изложения не имеет себе равных, в отношении статьи для сборника написал прямо противоположное: "В настоящем ее виде Ваша статья трудна, и с ее появлением может даже создаться представление, будто основы теории вероятностей и нельзя понять « простому смертному»" [Там же. С. 112].

Следует отдать должное ответственному редактору, который нашел возможность смягчить суровую оценку: "Для того, чтобы Ваши глубокие и важные, а вместе с тем, простые идеи стали достоянием возможно более широкого круга читателей, я просил бы Вас перестроить Вашу статью с тем, чтобы, начав с указания на объективный характер статистических закономерностей, дав краткую характеристику субъективизма, сразу перейти к указанию на связь явления с условиями и развернуть Ваше понимание вероятности, чтобы оно не затерялось за детерминистической схемой или какими-либо выкладками. В соединении глубины с простотой изложения Ваша статья станет лучшим украшением нашей монографии" [Там же. С. 112].

В ответе на высказанные замечания Андрей Николаевич согласился пояснить на примерах понятия случайной величины, математического ожидания и дисперсии, а также более подробно изложить ряд других важных моментов, но вместе с тем высказал сомнения по поводу принципиальных методологических вопросов: "Менее ясен для меня вопрос о перестройке всей статьи и отказе от того, чтобы вводить вероятностные схемы путем противопоставления их детерминистическим...

Основная трудность при освещении философских вопросов теории вероятностей начинается с ясного изложения и диалектического объединения двух положений:

1. Существует объективная случайность.
2. Не существует ничего абсолютно случайного.

Я понимаю, что с точки зрения отстаивания права на существование теории вероятностей (а, как Вы знаете, эта тема не совсем беспредметна) наиболее существенно первое. Но мне представляется, что в сколь угодно популярной статье необходимо говорить об обеих сторонах дела" [Там же. С. 113].

Расхождение в оценках узловых вопросов двух крупных математиков – специалиста в области стохастических методов и неспециалиста – не случайно. "Интерпретационная схема, предложенная Колмогоровым в 1933 г., – пишет известный исследователь в области философско-методологических проблем теории вероятностей А.А. Григорян, – не разъясняла, почему приложение теоретико-мерной теории вероятностей к решению естественнонаучных проблем должно давать хорошие результаты, однако удивительным образом рецепт применения, предложенный Колмогоровым, никогда не подводил. Поэтому в течение нескольких десятилетий после создания аксиоматики основные усилия ее сторонников были сосредоточены на получении далеко идущих математических результатов, в то время как проблема обоснованности применений стояла на втором плане" [3. С. 395–396].

В работе [1] А.Н. Колмогоров впервые "вполне определенно ставит и пытается анализировать онтологические и гносеологические проблемы, связанные с определением понятий случайности и необходимости, со статусом вероятностных и статистических закономерностей в структуре реальности" [3. С. 397].

С такого рода проблемами сталкиваются и студенты тех гуманитарных специальностей, в профессиональной подготовке которых существенная роль отводится изучению статистических методов (речь идет о психологах, социологах и политологах). Еще более важны подобные проблемы для преподавателей математики. Без отчетливого понимания их сути едва ли можно надеяться добиться у учащихся *понимания* статистических утверждений, на что ориентируют педагогов принятые образовательные стандарты школьного образования. Наработанные в преподавании студентам естественно-научных и технических специальностей методики изучения статистических методов, основанные на непосредственном использовании языка современной теории вероятностей, вряд ли в состоянии помочь в решении этой задачи.

Констатация этого факта содержится в написанной около двадцати лет назад работе [4]. Анализ знаний повышавших свою квалификацию выпускников технических и экономических вузов показал, что, спустя определенное время после изучения курсов теории вероятностей и математической статистики, "имевшиеся (и то далеко не у всех) представления о способах постановки и проверки статистических гипотез не шли далее небольшого набора рецептурных схем без какой бы то ни было связи с условиями применимости тех или иных критериев" [4. С. 54]. Рекомендуя далее для преодоления указанных недостатков при формальном изложении теории вероятностей в технических вузах аксиоматику А.Н. Колмогорова, автор замечает, что "непосредственное использование этой аксиоматики в учебном процессе может... повлечь за собой определенные неудобства, особенно в тех случаях, когда речь идет о курсах прикладной направленности" [Там же. С. 59].

Именно такую направленность имеют курсы статистических методов для студентов вышеназванных гуманитарных специальностей. При этом следует иметь в виду, что даже сугубо формальное усвоение рецептов теории вероятностей студентами технических и экономических специальностей, ставящееся им в вину, едва ли достижимо их "более гуманитарными" коллегами, поскольку большинство из них еще со средней школы испытывает неприязнь к чисто алгебраическим выкладкам, не подкрепленным содержательными представлениями из их собственной предметной области.

Абстрактно-дедуктивное изложение вероятностно-статистических методов не препятствует самым сильным в математическом отношении студентам-гуманитариям усваивать необходимые формальные рецепты, но даже они теряются при ответах на самые простые вопросы качественного характера.

Автор настоящей статьи на протяжении десяти лет читал курс "Математическое моделирование политических процессов" студентам-политологам РГГУ, взяв изначально за основу замечательное учебное пособие [5] для студентов естественных специальностей университетов и пединститутов. Выбранная В.Н. Тутубалиным последовательность изложения позволяет следующим образом построить вероятностную часть математического курса для политологов в соответствии с принципом нисхождения от общего к частному:

элементы комбинаторики → основные теоремы элементарной теории вероятностей → испытания Бернулли → числовые характеристики случайной величины → формула Муавра-Лапласа → предсказание исхода выборов на основе социологических опросов.

Перенос акцента с локальной на интегральную формулу Муавра-Лапласа позволяет при данном способе изложения избежать громоздких выкладок, связанных с формулой Стирлинга. Наиболее сложной в техническом отношении оказывается на этом пути формула дисперсии суммы для независимых случайных величин, однако и она усваивается наиболее подготовленными студентами. Вместе с тем, даже таких студентов после изложения соответствующего общего материала ставит в тупик вопрос: во сколько раз больше нужно опросить респондентов для повышения точности прогноза исхода выборов с 3% до 1%?

Возможно, преподаватель и рад был бы услышать естественный с точки зрения "здравого смысла" ответ: "В три раза", чтобы продемонстрировать оправданность предшествовавших длинных вычислений с дисперсией для обоснования правильного ответа, но надежда на это невелика. Ожидающие подвоха в вопросе преподавателя студенты могут сказать: "В десять раз", или: "В сто раз", или даже: "Во много раз", но вероятность услышать числа "3", а тем более "9", немногим больше нуля.

Вывод напрашивается сам собой: логическая убедительность утверждений математической теории вероятностей не связана напрямую с пониманием причин удивительной эффективности ее методов в приложениях. Это обстоятельство отмечал и В.Н. Тутубалин, сравнивая естественно-научное и формально-математическое определения испытаний Бернулли: "Старое определение не вполне ясно, но с его помощью можно узнавать, в каких конкретных ситуациях речь идет об испытаниях Бернулли. Испытаниями Бернулли будут, например, бросания монеты (герб – успех), стрельба в цель нескольких одинаково метких стрелков (попадание – успех), наблюдения за погодой, проводимые в данный день... каждого года (дождь – успех, нет дождя – неудача). Определению испытаний Бернулли не будут удовлетворять бросания по-разному искривленных монет (от бросания к бросанию меняется вероятность успеха), стрельба в цель при наличии корректировки (нет независимости результатов отдельных выстрелов и постоянства вероятности успеха), наблюдения за погодой в последовательные дни одного года (нет независимости)" [5. С. 35–36]. Хотя абстрактное определение "ясно и удобно для математических выводов, но, если строго им ограничиться, то оно совершенно не дает пути применения схемы Бернулли" [Там же. С. 36].

Следует отметить, что вопрос касательно зависимости между точностью опроса и количеством респондентов не является второстепенным для теории вероятностей. Говоря о пропорциональности точности действия вероятностных закономерностей корню квадратному из числа наблюдений – "законе квадратного корня из $n$", Колмогоров упоминает о его толковании (в связи с работами П.Л. Чебышева) даже как основном законе теории вероятностей [1. С. 266]. Это замечание А.Н. Колмогорова может быть использовано для такого построения курса "Математическое моделирование политических процессов", при котором изложение в целом будет подчинено выработке интуитивного понимания этого закона.

Главной методической трудностью на этом пути оказывается использование понятия дисперсии случайной величины. Если вводить его обычным способом, т.е. посредством абстрактного определения, то прежние проблемы формального "понимания" (или, что то же самое, – непонимания), останутся. Если бы эта числовая характеристика естественным образом возникала при анализе проблемы точности опроса, то это существенно бы упростило понимание учащимися процесса моделирования.

К счастью, подобная возможность существует. Идея для ее реализации содержится в гл. 6 книги [6]. Для геометрической интерпретации испытаний Бернулли в виде случайного блуждания на прямой полезна замена значения 0 числа благоприятных исходов в каждом отдельном испытании на $-1$. На языке политологии это означает, что вместо подсчета абсолютного числа голосов за кандидата вычисляется перевес одного из кандидатов по отношению к другому[1]. Для упрощения выкладок далее достаточно рассмотреть случай $p = q = 1/2$ (интуитивно очевидно, что закон корня квадратного из $n$ не зависит от величины параметра $p$).

Среднюю величину модуля суммы результатов отдельных испытаний[2]

$$|X_1 + X_2 + X_3 + X_4| \tag{1}$$

оценить сложно (не ясно, как даже к этому подступиться с помощью стандартных средств школьной алгебры), поэтому естественно вместо величины (1) попытаться оценить среднее значение ее квадрата:

$$\begin{gathered}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \\ +2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_1X_4 + 2X_2X_3 + 2X_2X_4 + 2X_3X_4.\end{gathered} \tag{2}$$

Каждое из первых четырех слагаемых равно 1 (уже здесь проявляется преимущество замены стандартного бернуллиевского слагаемого симметричными значениями). Следующие шесть слагаемых распределены по тому же самому закону, что и $X_1$ (и здесь налицо преимущество с вычислительной точки зрения по сравнению с

[1] Для второго тура голосования это совершенно естественно.

[2] Студенты-гуманитарии не любят использования символов суммирования для произвольного числа слагаемых, поэтому достаточно рассмотреть случай $n = 4$.

несимметричными значениями 0 и 1). Поэтому среднее значение случайной величины (2) равно, как легко видеть, 4.

Само собой разумеется, что для произвольного числа $n$ проголосовавших квадрат величины перевеса первого над вторым для равных по популярности кандидатов равен $n$ (необходимость извлечения квадратного корня из этой величины, дающего оценку перевеса одного кандидата над другим, вытекает из "соображений размерности"). При этом важно, что здесь не предполагается доказательство общей теоремы о среднем значении двух независимых случайных величин.

Погрешность оценки популярности кандидата на основе опроса общественного мнения может быть далее найдена по классическому образцу [7. С. 112–113].

Конечно, приведенного анализа формально недостаточно для проверки статистических гипотез о корректности проведения выборов с точки зрения их согласованности с результатами предварительных опросов общественного мнения. Но последующий путь с использованием нормального приближения биномиального распределения связан с трудностями сугубо аналитического характера, не имеющими отношения к стохастической природе "основного закона теории вероятностей". Это будет лишь количественным уточнением хорошо усвоенного качественного результата. Полученный же элементарными "вероятностно-алгебраическими" средствами "закон квадратного корня из $n$" для погрешности популярности кандидата будет тем ключевым примером из специфической предметной области, на базе которого естественно формулируются (и в некоторых случаях доказываются) универсальные утверждения теории вероятностей, уже не связанные с политологией.

Ход изложения будет, таким образом, уже не нисхождением от общего к частному, а, наоборот, *восхождением* от частного к общему. Общие законы теории вероятностей получают тем самым *предметный* характер. Но в таком случае и вводный раздел, содержащий основные правила комбинаторики, необходимо излагать подобным же предметным образом[1].

[1] Демократические процедуры в Древней Греции, как известно, проводились при помощи псефосов.

Правило умножения комбинаторики лучше с этой точки зрения излагать без использования понятия декартова произведения множеств, взяв, например, следующий его вариант: "Если предметы первого типа можно выбрать $m$ способами, а после каждого такого выбора предметы второго типа[1] можно выбрать одним и тем же числом $k$ способов, то последовательный выбор предметов двух типов можно осуществить $mk$ способами".

Для доказательства рисуется таблица из $m$ строк и $k$ столбцов, в клетки которой выкладываются поочередно пары предметов в фиксированном порядке[2]. После заполнения всех $mk$ клеток мы имеем в наличии все возможные упорядоченные пары предметов двух типов.

Аналогичным образом излагаются правило сложения комбинаторики, формулы числа размещений предметов (с повторениями и без повторений), перестановок и сочетаний. Этого достаточно для "предметного" же изложения формул элементарной теории вероятностей и схемы Бернулли.

В результате все изложение статистического моделирования процедуры предсказания исходов будущих выборов становится максимально наглядным и органичным образом согласуется с процедурами формирования репрезентативных выборок.

## Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей // Математика, ее содержание, методы и значение. М., 1956. Т. 2. С. 252–284.
2. Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х кн. Кн. 1. Истина – благо. Биобиблиография / Ред.-составитель А.Н. Ширяев. М., 2003.
3. *Григорян А.А.* Алгоритмическая теория вероятностей: здравый смысл и проблема обоснования применимости теоретико-

[1]Различение предметов по типу носит чисто формальный характер. В частности, наборы предметов двух типов могут полностью совпадать между собой, хотя могут и полностью отличаться друг от друга.

[2]Для этого полезно предположить возможность брать "копии" предметов второго типа в случае, когда наборы из $k$ предметов при различных выбранных первых предметах имеют повторяющиеся элементы.

мерной теории к реальным случайным событиям // Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. М., 2003. С. 395–415.

4. *Матюшкин-Герке А.А.* О содержании и методике преподавания теории вероятностей и математической статистики (для технических специальностей) // Методологические проблемы преподавания математики. Сборник научных трудов. М., 1987. С. 53–62.
5. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. М., 1972.
6. *Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М., 1982.
7. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1970. Изд. 7, доп.

# Глава 2

# Математика в ее многообразии

## Однородные супермногообразия над грассманианом $\mathrm{Gr}_{4,2}$ [1]

*А.Л. Онищик*

### Введение

В работе рассматривается следующая задача: для заданного комплексного флагового многообразия $M = G/P$, где $G$ – полупростая комплексная группа Ли и $P$ – ее параболическая подгруппа, описать с точностью до изоморфизма все однородные комплексные супермногообразия $(M, \mathcal{O})$, имеющие $M$ в качестве своей редукции. Эта задача была поставлена Ю.И. Маниным в книге [4] в случае, когда $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$ – грассманиан 2-плоскостей в $\mathbb{C}^4$. Мы также изучаем здесь только этот частный случай.

Мы решаем задачу при существенных ограничениях на представление $\varphi$ подгруппы $P$, определяющее ретракт супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. В расщепимом случае (т.е. в случае, когда $(M, \mathcal{O})$ изоморфно своему ретракту) решение дается для всех вполне приводимых представлений $\varphi$ (см. теорему 4), а в нерасщепимом случае предполагается, что $\varphi$ неприводимо. Мы доказываем (см. теорему 6), что при этом предположении существует лишь одно нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие с редукцией $\mathrm{Gr}_{4,2}$ – это так называемый П-симметрический суперграссманиан $\Pi\,\mathrm{Gr}_{4|4,2|2}$, построенный в [4]. Наши методы применимы также в случае, когда $\varphi$ вполне приводимо, но нуждаются в существенной модификации, если это условие не выполняется. Примеры, приведенные в [4], показывают, что задача обладает решениями такого типа. Мы надеемся позже вернуться к изучению этого вопроса.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-01-00647), а также гранта НШ-1910.2003.1.

Для других флаговых многообразий задача изучалась при более сильных ограничениях, например, когда фиксируется не только $M$, но и ретракт искомых супермногообразий $(M, \mathcal{O})$, или когда нечетная часть $m$ размерности $n|m = \dim(M, \mathcal{O})$ не превышает заданного числа (обзор некоторых результатов и публикаций см. в [9]). Упомянем здесь только классификацию всех супермногообразий с ретрактом $(M, \Omega)$, где $M$ – произвольное неприводимое компактное эрмитово симметрическое пространство и $\Omega$ – пучок голоморфных дифференциальных форм на $M$, и выделение однородных супермногообразий этого вида (см. [6]). По-видимому, методы, использованные в настоящей работе, позволят классифицировать все однородные супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ в случае, когда $M$ – неприводимое компактное эрмитово симметрическое пространство, а представление $\varphi$, определяющее ретракт, неприводимо.

## 1. Предварительные сведения о супермногообразиях

Мы рассматриваем здесь комплексно аналитические супермногообразия, т.е. $\mathbb{Z}_2$-градуированные окольцованные пространства $(M, \mathcal{O})$, локально изоморфные парам вида $(D, \bigwedge_{\mathcal{F}_n}(\xi_1, \dots, \xi_m))$, где $D$ – область в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{F}_n$ – пучок голоморфных функций в $D$ (подробности см. в [4]). Такой локальный изоморфизм отождествляет стандартные координаты $x_i$, $i = 1, \dots, n$, в $D$ и элементы $\xi_j$, $j = 1, \dots, m$, с некоторыми, соответственно четными и нечетными, локальными сечениями пучка $\mathcal{O}$, которые называются четными и нечетными локальными координатами на $(M, \mathcal{O})$. Пучок $\mathcal{O}$ называется *структурным пучком* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Пространство $M$ обладает естественной структурой комплексного многообразия размерности $n$ (см. ниже); оно называется *редукцией* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Пара $n|m$ называется *размерностью* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Простейший способ получить супермногообразие состоит в следующем. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – комплексное многообразие размерности $n$ и $\mathbf{E} \to M$ – голоморфное векторное расслоение ранга $m$. Тогда пучок $\mathcal{E}$ голоморфных сечений расслоения $\mathbf{E}$ есть локально свободный аналитический пучок на $M$. Полагая $\mathcal{O} = \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, мы получим супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ размерности $n|m$. В качестве локальных координат на $(M, \mathcal{O})$ можно взять обычные локальные координаты $x_i, \dots, x_n$ в координатной окрестности на $M$ вместе с некоторым базисом сечений $\xi_1, \dots, \xi_m$ пучка $\mathcal{E}$ над той же окрестностью. Супермногообразие называется *расщепимым*, если оно изоморфно супермногообразию такого вида. Структурный пучок $\mathcal{O}$ расщепимого супермногообразия обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой $\mathcal{O} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathcal{O}_p$, где $\mathcal{O}_p = \bigwedge_{\mathcal{F}}^p \mathcal{E}$. В дальнейшем мы часто будем опускать нижний индекс $\mathcal{F}$ в обозначении внешних степеней, тензорных произведений и т.д. пучков $\mathcal{F}$-модулей.

Имеется важная конструкция, связывающая с произвольным супермногообразием $(M, \mathcal{O})$ некоторое расщепимое супермногообразие. Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ – подпучок идеалов, порожденный нечетными элементами. Рассмотрим фильтрацию

$$\mathcal{O} = \mathcal{J}^0 \supset \mathcal{J}^1 \supset \mathcal{J}^2 \supset \dots \tag{1}$$

пучка $\mathcal{O}$. Присоединенный градуированный пучок

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{O} = \bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{gr}_p \mathcal{O},$$

где $\mathrm{gr}_p \mathcal{O} = \mathcal{J}^p / \mathcal{J}^{p-1}$, определяет расщепимое супермногообразие $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$. Действительно, $\mathrm{gr}\, \mathcal{O} \simeq \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, где $\mathcal{F} = \mathrm{gr}_0 \mathcal{O}$ – структурный пучок редукции $M = (M, \mathcal{F})$, и $\mathcal{E} = \mathrm{gr}_1 \mathcal{O}$. Очевидно, $(M, \mathcal{O})$ и $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$ имеют одну и ту же размерность. Супермногообразие $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$ называется *ретрактом* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$.

Пусть $(M, \mathcal{O})$ – произвольное супермногообразие. Обозначим через $\mathcal{T} = \mathcal{D}er\, \mathcal{O}$ пучок дифференцирований структурного пучка $\mathcal{O}$; он называется *касательным пучком* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Касательный пучок обладает естественной структурой $\mathbb{Z}_2$-градуированного левого $\mathcal{O}$-модуля. С другой стороны, его можно рассматривать как пучок комплексных супералгебр Ли относительно градуированной скобки Ли

$$[u, v] = uv + (-1)^{p(u)p(v)+1} vu. \tag{2}$$

Сечения пучка $\mathcal{T}$ (*голоморфные векторные поля* на $(M, \mathcal{O})$) составляют супералгебру Ли $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) = \Gamma(M, \mathcal{T})$; она конечномерна, если $M$ компактно.

Сделаем теперь несколько замечаний, касающихся векторных полей на расщепимых супермногообразиях. Если $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, то $\mathbb{Z}$-градуировка пучка $\mathcal{O}$ определяет естественную $\mathbb{Z}$-градуировку в пучке $\mathcal{T}$, превращающую его в $\mathbb{Z}$-градуированный пучок супералгебр Ли. Кроме того, $\mathcal{T}$ можно рассматривать как локально свободный аналитический пучок на комплексном многообразии $M$. Действительно, $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$, и поэтому $\mathcal{T}$ – пучок $\mathcal{F}$-модулей, т.е. аналитический пучок на $M$. Мы имеем следующую точную последовательность локально свободных аналитических пучков на $M$ (см. [5]):

$$0 \to \mathcal{E}^* \otimes \bigwedge \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\alpha} \Theta \otimes \bigwedge \mathcal{E} \to 0, \tag{3}$$

где $\Theta = \mathcal{D}er\,\mathcal{F}$ – касательный пучок многообразия $M$. Отображение $\alpha$ – это ограничение дифференцирования пучка $\mathcal{O}$ на $\mathcal{F}$, а $i$ отождествляет каждый гомоморфизм пучков $\mathcal{E} \to \bigwedge \mathcal{E}$ с его продолжением до дифференцирования, равного нулю на $\mathcal{F}$. Отсюда выводится, что аналитический пучок $\mathcal{T}$ локально свободен. Значит, $\mathcal{T}$ является пучком голоморфных сечений некоторого ($\mathbb{Z}$-градуированного) голоморфного векторного расслоения над $M$; мы называем его *суперкасательным расслоением* и обозначаем через $\mathbf{ST}$.

Для определения понятия однородного супермногообразия мы используем классический инфинитезимальный подход, принадлежащий С. Ли. Пусть заданы супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ и точка $x \in M$. Обозначим через $m_x$ максимальный идеал локальной супералгебры $\mathcal{O}_x$. Векторное суперпространство $T_x(M, \mathcal{O}) = (m_x/m_x^2)^*$ называется *касательным пространством* к $(M, \mathcal{O})$ в точке $x$. Его четная часть $T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{0}}$ отождествляется с голоморфным касательным пространством $T_x(M) = T_x^{1,0}(M)$, а нечетная часть $T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ – с векторным пространством $E_x^*$, двойственным к слою $E_x$ векторного расслоения $\mathbf{E}$ над $M$, связанного с ретрактом. Мы имеем естественное линейное отображение $\mathrm{ev}_x : \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \to T_x(M, \mathcal{O})$. В случае, когда $M$ компактно, мы будем говорить, что супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ *однородно*, если отображение $\mathrm{ev}_x$ сюръективно для любой $x \in M$. Легко доказать (см. [11]), что ретракт однородного супермногообразия также является однородным супермногообразием. Пусть $(M,\mathcal{O})$ – расщепимое супермногообразие, связанное с векторным расслоением $\mathbf{E}\to M$, и пусть $H$ – односвязная комплексная группа Ли, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{v}(M,\mathcal{O})_{\bar{0}}$. Если $(M,\mathcal{O})$ однородно, то $\mathbf{E}$ – $H$-однородное векторное расслоение, т.е. на $\mathbf{E}$ существует голоморфное действие группы $H$ автоморфизмами векторного расслоения, индуцирующее транзитивное действие на $M$. Кроме того, двойственное однородное векторное расслоение $\mathbf{E}^*$ порождается своими глобальными голоморфными сечениями. Обратно, любое однородное голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E}\to M$, такое, что $M$ компактно и что $\mathbf{E}^*$ порождается глобальными голоморфными сечениями, определяет расщепимое однородное супермногообразие $(M,\bigwedge\mathcal{O})$ (см. [11]). Например, пусть $\mathbf{E}=\mathbf{T}(M)^*$ – кокасательное расслоение компактного комплексного однородного многообразия $M$. Тогда касательное расслоение $\mathbf{E}^*=\mathbf{T}(M)$ порождается глобальными голоморфными векторными полями. Таким образом, расщепимое супермногообразие $(M,\Omega)$, где $\Omega$ – пучок голоморфных форм на $M$, является однородным.

Предположим, что задано голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E}\to M$ над некоторым комплексным многообразием $M$. Рассмотрим соответствующее расщепимое супермногообразие $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, где $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}=\bigwedge\mathcal{E}$. Возникает следующая естественная задача: классифицировать с точностью до изоморфизма все супермногообразия $(M,\mathcal{O})$ с ретрактом $(M,\mathrm{gr}\,\mathcal{O})\simeq(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ (все изоморфизмы супермногообразий считаются тождественными на $M$). Простейший ответ на этот вопрос дается в терминах множества 1-когомологий $H^1(M,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ со значениями в следующем подпучке пучка автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$:

$$\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}=\{a\in\mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}\mid a(f)-f\in\mathcal{J}^2\}.$$

А именно, теорема Грина [3] утверждает, что классы изоморфных супермногообразий с ретрактом $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ находятся в биективном соответствии с орбитами естественного действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathbf{E}$ нашего расслоения на $H^1(M,\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В наших работах [7, 8] была предложена интерпретация этого множества неабелевых когомологий в виде множества $H^1(K)$ 1-когомологий некоторого нелинейного комплекса $K$, аналогичного классическому комплексу Дольбо. Множество $Z^1(K)$ 1-коциклов этого комплекса состоит из гладких дифференциальных форм $z$ типа $(0,1)$ на $M$ со значениями в векторном расслоении $\bigoplus_{p\geq 1} \mathbf{ST}^{2p}$, удовлетворяющих условию $\bar{\partial}z - \frac{1}{2}[z, z] = 0$, где $[\ ,\ ]$ – специальным образом определенная операция на формах, связанная с (2).

Укажем одно применение этого комплекса. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – супермногообразие. *Действие* группы $G$ на $(M, \mathcal{O})$ – это по определению гомоморфизм $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(M, \mathcal{O})$, где $\mathrm{Aut}(M, \mathcal{O})$ – группа биголоморфных автоморфизмов супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ (рассматриваемого как окольцованное пространство). Если $G$ – вещественная или комплексная группа Ли, то действие предполагается вещественно (соответственно комплексно) аналитическим в естественном смысле. Любое действие $\Phi : G \to \mathrm{Aut}(M, \mathcal{O})$ сохраняет фильтрацию (1) и индуцирует некоторое действие $\bar{\Phi} : G \to \mathrm{Aut}(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку структурного пучка. В этой ситуации мы говорим, что действие $\bar{\Phi}$ *поднимается до действия* $\Phi$ (или *поднимается на* $(M, \mathcal{O})$). Важной задачей является описание тех действий на $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, которые сохраняют $\mathbb{Z}$-градуировку и поднимаются на $(M, \mathcal{O})$. Заметим, что действие на $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку, определяет действие на соответствующем расслоении $\mathbf{E}$, а также на соответствующем комплексе $K$. Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Пусть задано аналитическое действие $\Psi$ компактной группы Ли $G$ на расщепимом супермногообразии $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ касательный пучок супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – супермногообразие с ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, соответствующее заданному классу $\zeta \in H^1(K)$. Тогда*

1) *$\Psi$ поднимается на $(M, \mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда класс $\zeta$ содержит некоторый $G$-инвариантный коцикл $z \in Z^1(K)$.*

2) *Если в этой ситуации $(M, \mathcal{O})$ нерасщепимо, то $G$-инвариантный коцикл в классе $\zeta$ можно выбрать так, чтобы*

$$z = \sum_{k \geq p} z_{2k},$$

*где $p \geq 1$, $z_{2k}$ – форма со значениями в $\mathbf{ST}^{2k}$, причем форма $z_{2p}$ удовлетворяет условию $\bar\partial z_{2p} = 0$ и определяет ненулевой элемент пространства $H^1(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})^G$.*

Утверждение 1) этой теоремы доказано в [10], а 2) доказывается при помощи техники из [7, 8] и инвариантного интегрирования по группе $G$.

## 2. Многообразие Грассмана и линейные представления

Мы используем стандартную технику корней полупростых комплексных групп Ли и весов их линейных представлений (см., например, [13]). Подробности о флаговых многообразиях и параболических подгруппах и подалгебрах см. в [1].

Пусть $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$ – многообразие Грассмана двумерных подпространств в $\mathbb{C}^4$. Хорошо известно, что связная компонента единицы $(\mathrm{Bih}\, M)^\circ$ в группе $\mathrm{Bih}\, M$ биголоморфных автоморфизмов многообразия $M$ совпадает с образом стандартного действия группы $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ на нем. Это действие транзитивно, и соответствующая групповая модель однородного пространства $\mathrm{Gr}_{4,2}$ имеет вид $G/P$; здесь $P$ – подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$, где $A$, $B$, $C$ – матрицы размера $2 \times 2$ и $(\det A)(\det B) = 1$. Группа $G$ не содержит собственных комплексных подгрупп Ли, действующих на $M$ транзитивно. Однородные векторные расслоения над $M$ определяются голоморфными линейными представлениями подгруппы $P$; обозначим через $\mathbf{E}_\varphi$ векторное расслоение, соответствующее представлению $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$.

Компактная вещественная форма $K = \mathrm{SU}_4$ группы $G$ действует на $M$ транзитивно, и ее стационарная подгруппа $L = K \cap P$ есть подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $A$, $B \in \mathrm{U}_2$ и $(\det A)(\det B) = 1$. Таким образом, $\mathrm{Gr}_{4,2} \simeq_K K/L$.

При изучении однородных супермногообразий с редукцией $\mathrm{Gr}_{4,2}$ нам потребуется описание конечномерных линейных представлений групп $P$ и $G$. Введем для этого следующие стандартные обозначения:

$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ (где $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$) – подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ группы $G$, состоящая из диагональных матриц.

$\Delta$ – соответствующая система корней группы $G$.

$B_- \subset G$ и $\mathfrak{b}_- \subset \mathfrak{g}$ – борелевская подгруппа и борелевская подалгебра группы $G$ и алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно, состоящие из нижних треугольных матриц.

$\Delta_+ \supset \Pi$ – подсистемы положительных и простых корней из $\Delta$, отвечающие борелевской подгруппе $B_+$ группы $G$, которая состоит из верхних треугольных матриц. Имеем $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\alpha_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$.

$\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ – фундаментальные веса группы $G$; это базис решетки весов группы $G$, определенный формулами

$$\varpi_1 = x_1, \ \varpi_2 = x_1 + x_2, \ \varpi_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Любой вес $\lambda$ группы $G$ однозначно представляется в виде

$$\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2 + a_3\varpi_3,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$; вес $\lambda$ называется *доминантным*, если $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$.

Подгруппу $P$ можно охарактеризовать как максимальную параболическую подгруппу группы $G$, содержащую $B_-$ и отвечающую простому корню $\alpha_2$. Соответствующая максимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ допускает разложение Леви

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{r} + \mathfrak{n}_-,$$

где

$$\mathfrak{r} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \mid \mathrm{tr}\, X + \mathrm{tr}\, Y = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответствующее разложение Леви подгруппы $P$ имеет вид $P = RN_-$, где

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid (\det A)(\det B) = 1 \right\}, \quad N_- = \left\{ \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ C & E_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Введенная выше подгруппа $L$ – это компактная вещественная форма редуктивной комплексной группы $R$.

Мы будем использовать следующий изоморфизм алгебр Ли $\gamma$ : $\tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \to \mathfrak{r}$:

$$\gamma(X, Y, w) = \begin{pmatrix} X + wE_2 & 0 \\ 0 & Y - wE_2 \end{pmatrix}.$$

Он соответствует гомоморфизму алгебраических групп $g$ : $\tilde{R} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \to R$, заданному формулой

$$g(A, B, c) = \begin{pmatrix} cA & 0 \\ 0 & c^{-1}B \end{pmatrix};$$

это накрытие с ядром $\mathrm{Ker}\, g = \{(E_2, E_2, 1), (-E_2, -E_2, -1)\}$.

Пусть $\mathfrak{t}_1 = \{\mathrm{diag}(u_1, u_2)\}$ и $\mathfrak{t}_2 = \{\mathrm{diag}(v_1, v_2)\}$ – подалгебры Картана двух слагаемых $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{r}}$ (здесь $u_2 = -u_1$ и $v_2 = -v_1$). В этих обозначениях изоморфизм подалгебр Картана $\gamma : \tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathbb{C} \to \mathfrak{t}$ записывается формулой

$$\gamma(\mathrm{diag}(u_1, u_2), \mathrm{diag}(v_1, v_2), w) = \mathrm{diag}(u_1 + w, u_2 + w, v_1 - w, v_2 - w).$$

Любой вес $\lambda$ группы $\tilde{R}$ имеет вид

$$\lambda = au_1 + bv_1 + cw, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Он является доминатным как вес группы $\tilde{R}$ или $R$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, $b \geq 0$. В координатах $x_i$ имеем

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + c)x_1 + \frac{1}{2}(-a + c)x_2 + \frac{1}{2}bx_3 - \frac{1}{2}bx_4,$$

а выражение веса $\lambda$ через фундаментальные веса имеет вид

$$\lambda = a\varpi_1 + \frac{1}{2}(c - a - b)\varpi_2 + b\varpi_3. \tag{5}$$

**Лемма 1.** 1) *Вес $\lambda$ группы $\tilde{R}$, заданный формулой* (4), *является весом группы $R$ тогда и только тогда, когда $a + b - c \in 2\mathbb{Z}$.*

*В этом случае $\lambda$ доминантен как вес группы $G$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq a+b$.*

2) *Предположим, что вес $\lambda$, заданный формулой (4), является старшим весом неприводимого представления $\varphi$ группы $\tilde{R}$. Тогда старший вес сопряженного представления $\varphi^*$ имеет вид*

$$\lambda^* = au_1 + bv_1 - cw = \frac{1}{2}(a-c)x_1 + \frac{1}{2}(-a-c)x_2 + \frac{1}{2}bx_3 - \frac{1}{2}bx_4.$$

*Он доминантен как вес группы $G$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \leq -(a+b)$.*

**Доказательство.** Утверждение 1) следует из (5). Для доказательства утверждения 2) заметим, что все линейные представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ самосопряжены, и затем используем 1).

Пусть $\varphi$ – неприводимое представление группы $\tilde{R} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ со старшим весом $\lambda$, заданным формулой (4). Очевидно,

$$\varphi = \rho_1^{(a)} \otimes \rho_2^{(b)} \otimes \zeta^c, \tag{6}$$

где $\rho_1^{(a)}$ и $\rho_2^{(b)}$ – неприводимые представления первого и второго сомножителей $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ размерностей $a+1$ и $b+1$ соответственно и $\zeta$ – тождественный характер группы $\mathbb{C}^\times$. В частности, $\dim\varphi = (a+1)(b+1)$. В дальнейшем мы будем записывать представление $\varphi$ группы $R$ в виде (6), отождествляя его с представлением $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ группы $\tilde{R}$.

Важным для нас примером является представление изотропии $\tau : P \to \mathrm{GL}(T(M)_o)$ подгруппы $P$ в точке $o \in M$. Это представление неприводимо, так как любое многообразие Грассмана – это неприводимое эрмитово симметрическое пространство. Поэтому ограничение $\tau|N_-$ тривиально, и мы будем отождествлять $\tau$ с его ограничением на $R$. То же относится к сопряженному представлению $\tau^*$. Из теории эрмитовых симметрических пространств известно, что старший вес представления $\tau$ совпадает со старшим корнем $\delta = x_1 - x_4$ группы $G$, а его младший вес – с корнем $\alpha_2$. Значит, старший вес представления $\tau^*$ есть $\Lambda = -\alpha_2 = -x_2 + x_3$, а его младший вес есть $-\delta$. Выражение (4) весов $\delta$ и $\Lambda$ имеет вид

$$\delta = u_1 + v_1 + 2w, \quad \Lambda = u_1 + v_1 - 2w.$$

Используя запись (6), получаем отсюда

$$\tau = \rho_1^{(1)} \otimes \rho_2^{(1)} \otimes \zeta^2, \quad \tau^* = \rho_1^{(1)} \otimes \rho_2^{(1)} \otimes \zeta^{-2}.$$

## 3. Теоремы классификации

Перейдем теперь к нашей основной задаче. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – однородное супермногообразие с редукцией $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$. Рассмотрим сначала случай, когда $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, т.е. когда $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}$ для некоторого голоморфного векторного расслоения $\mathbf{E}$ над $M$. Как мы видели в разделе 1, $(M, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: векторное расслоение $\mathbf{E}$ однородно, т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ для некоторого голоморфного представления $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$; двойственное расслоение $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными голоморфными сечениями.

Второе условие изучалось в работе [12] для однородных векторных расслоений $\mathbf{E}_\varphi$ над произвольными флаговыми многообразиями, и там был дан критерий его выполнимости в терминах представления $\varphi$. В простейшем случае, когда $\varphi$ неприводимо, этот критерий утверждает (см. также [5]), что $\mathbf{E}_\varphi$ порождается глобальными голоморфными сечениями тогда и только тогда, когда старший вес представления $\varphi$ доминантен как вес группы $G$. Если $\varphi$ вполне приводимо, то этот критерий следует применить ко всем неприводимым компонентам представления $\varphi$. Используя лемму 1, получаем отсюда следующую теорему, которая дает описание всех расщепимых однородных супермногообразий $(M, \mathcal{O})$ для $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$, определяемых вполне приводимыми представлениями подгруппы $P$.

**Теорема 2.** *Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – неприводимое представление со старшим весом*

$$\Lambda = au_1 + bv_1 + cw, \quad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

*(см. (4)), где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a+b-c \in 2\mathbb{Z}$. Соответствующее расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O})$, где $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}_\varphi$, однородно тогда и только тогда, когда $c \leq -(a+b)$. Если $\varphi$ вполне приводимо, то соответствующее расщепимое супермногообразие однородно тогда*

*и только тогда, когда все старшие веса представления $\varphi$ удовлетворяют этому условию.*

Пусть теперь дано нерасщепимое однородное супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ с редукцией $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$, и пусть $\mathbf{E}$ – голоморфное векторное расслоение над $M$, определяющее его ретракт $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Тогда расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ также однородно. Значит, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ для некоторого представления $\varphi$ подгруппы $P$, и если предположить, что $\varphi$ вполне приводимо, то его старшие веса удовлетворяют условиям теоремы 2. Далее, теорема 1 подсказывает следующее дополнительное условие: $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G \neq \{0\}$ для некоторого $p \geq 1$, где $\mathcal{T}$ – касательный пучок супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Изучение этих групп инвариантных когомологий приводит к следующему результату.

**Теорема 3.** *Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – такое неприводимое представление, что расслоение $\mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными сечениями. Тогда $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G = \{0\}$ для всех $p \geq 2$, а также для $p = 1$ и $\varphi \not\simeq \tau^*$. Далее, $\dim H^1(M, \mathcal{T}_2)^G = 2$ для $\varphi \simeq \tau^*$.*

Из-за ограничения объема статьи мы не даем здесь полного доказательства этой ключевой теоремы. Наметим лишь его основные этапы.

Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – некоторое голоморфное представление. Мы используем данную в [2] интерпретацию комплекса $(A^{0,*}(\mathbf{E}_\varphi)^K, \bar\partial)$ $K$-инвариантных форм типа $(0,*)$ на $M$ со значениями в $\mathbf{E}_\varphi$ в качестве комплекса $(C^*(\mathfrak{n}_-, E), \delta)$ коцепей алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$ со значениями в пространстве $E$. Из нее следует изоморфизм градуированных пространств когомологий

$$H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^G = H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^K \simeq H^*(\mathfrak{n}_-, E)^L = H^*(\mathfrak{n}_-, E)^R. \tag{7}$$

Если $\varphi$ вполне приводимо, то $d\varphi(\mathfrak{n}_-) = 0$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{n}_-$ коммутативна, отсюда следует, что $\delta = 0$. В результате получаем изоморфизмы

$$H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^G = H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^K \simeq A^{0,*}(\mathbf{E}_\varphi)^K. \tag{8}$$

Из существования $K$-инвариантной эрмитовой метрики на $M$ следует, что представление изотропии группы $L$ (или $R$) в пространстве $T^{0,1}(M)_o$ изоморфно $\tau^*$. Поэтому из (8) следует, в частности, что $\dim H^1(M,\mathcal{E}_\varphi)^G$ равна кратности неприводимого представления $\tau^*$ в $\varphi$, если $\varphi$ вполне приводимо.

Для доказательства теоремы 3 используется $(2p)$-компонента точной последовательности (3) аналитических пучков на $M$. В нашем случае все члены этой точной последовательности связаны с однородными расслоениями, причем пучки, стоящие слева и справа, имеют вид $\mathcal{E}_\psi$, где $\psi = \varphi^* \bigwedge^{2p+1}\varphi$ и $\tau \bigwedge^{2p}\varphi$ соответственно. Если $\varphi$ неприводимо, то все представления $\psi$ вполне приводимы, что позволяет найти неприводимые представления $\varphi$, для которых инвариантные 1-когомологии этих пучков нетривиальны. Для вычисления соответствующих пространств $H^1(M,\mathcal{T}_{2p})^G$ используются точная последовательность когомологий и $G$-эквивариантность гомоморфизмов $i$ и $\alpha$ из (3). В случаях $\varphi = \rho_1^{(2)}\otimes\zeta^{-2}$, $\rho_2^{(2)}\otimes\zeta^{-2}$ доказать тривиальность пространства $H^1(M,\mathcal{T}_2)^G$ этим способом не удается, и вычисления проводятся в коцепном комплексе алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$ (см. изоморфизм (7)). Это самая трудная часть доказательства.

Выведем теперь из сказанного выше наш основной результат.

**Теорема 4.** *Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – неприводимое голоморфное представление. Нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие $(M,\mathcal{O})$ с ретрактом $(M,\bigwedge\mathcal{E}_\varphi)$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi \simeq \tau^*$. Любое однородное комплексное супермногообразие с ретрактом $(M,\bigwedge\mathcal{E}_{\tau^*}) = (M;\Omega)$ изоморфно $\Pi$-симметрическому суперграссманиану $\Pi\,\mathrm{Gr}_{4|4,2|2}$.*

**Доказательство.** Пусть $(M,\mathcal{O})$ – однородное комплексное супермногообразие с ретрактом $(M,\bigwedge\mathcal{E}_\varphi)$. Тогда супермногообразие $(M,\bigwedge\mathcal{E}_\varphi)$ также однородно. В частности, $(M,\bigwedge\mathcal{E}_\varphi)$ допускает градуированное аналитическое действие компактной группы Ли $\mathrm{SU}(4)$, которое индуцирует ее стандартное действие на $M$ и поднимается до аналитического действия на $(M,\mathcal{O})$. Если $(M,\mathcal{O})$ не расщепимо, то по теореме 1 имеем $H^1(M,\mathcal{T}_{2p})^G \neq \{0\}$ для некоторого $p \geq 1$. Кроме того, расслоение $\mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными голоморфными сечениями. Поэтому из теоремы 3 следует, что $\varphi \simeq \tau^*$. Таким образом, ретракт изоморфен супермногообразию $(M,\Omega)$. Все супермногообразия с этим ретрактом описаны в

[6] для произвольного неприводимого эрмитова симметрического пространства $M$. В частности, там доказано, что для многообразий Грассмана $M = \mathrm{Gr}_{n,k}$ с условием $1 < k < n-1$ любое нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие с ретрактом $(M, \Omega)$ изоморфно П-симметрическому суперграссманиану $\Pi\,\mathrm{Gr}_{n|n,k|k}$, построенному в [4].

## Библиографический список


1. *Akhiezer D.N.* Lie group Actions in Complex Analysis. Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1995.
2. *Bott R.* Homogeneous vector bundles // Ann. Math. 1957. V. 66. P. 203–248.
3. *Green P.* On holomorphic graded manifolds //Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 85. P. 587–590.
4. *Манин Ю.И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука. 1984.
5. *Онищик А.Л.* Транзитивные супералгебры Ли векторных полей / Яросл. ун-т. Ярославль, 1986. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 12.06.86, № 4329-В86.
6. *Onishchik A.L.* Non-split supermanifolds associated with the cotangent bundle. Université de Poitiers, Département de Math., № 109. Poitiers, 1997.
7. *Onishchik A.L.* Non-abelian cohomology and supermanifolds. SFB 288, Preprint № 360. Berlin, 1998.
8. *Onishchik A.L.* On the classification of complex analytic supermanifolds //Lobachevskii J. Math. 1999. V. 4. P. 47–70 (electronic).
9. *Онищик А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразий // Математика в Ярославском университете. Ярославль: ЯрГУ, 2001. С. 7–33.
10. *Onishchik A.L.* Lifting of holomorphic actions on complex supermanifolds // Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations. Adv. Studies in Pure Math. 37. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2002. P. 317–335

11. *Онищик А.Л., Платонова О.В.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством: I, II // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 2. С. 111–136; Т. 189, № 3. С. 421–441.

12. *Snow D.M.* Spanning homogeneous vector bundles // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. P. 395–400.

13. *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: УРСС, 1995. Изд. 2. 344 с.

## Т-стабильность на категории, порожденной исключительной парой

*А.Л. Городенцев, С.А. Кулешов, А.Н. Рудаков*

### 1. Мотивация понятия стабильности

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой. Для построения многообразия модулей свободных от кручения пучков с фиксированными топологическими инвариантами на основании геометрической теории инвариантов вводится понятие (полу)стабильного пучка, а именно, *наклон* пучка положительного ранга определяется как

$$\mu(E) = \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E},$$

где rk – ранг, а deg – степень пучка на кривой.

Пучок без кручения $E$ называется *(полу)стабильным*, если для любого его собственного подпучка $F \subset E$ выполнено условие

$$\mu(F) < \mu(E), \qquad (\mu(F) \le \mu(E)).$$

Наклон пучка на кривой – отношение двух аддитивных функций, т.е. для любой точной тройки пучков $0 \to E \to F \to G \to 0$ выполнено равенство $\deg E + \deg G = \deg F$, $\operatorname{rk} E + \operatorname{rk} G = \operatorname{rk} F$. Поэтому простое наблюдение

$$\frac{\deg}{\operatorname{rk}} < \frac{\deg'}{\operatorname{rk}'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \deg & \deg' \\ \operatorname{rk} & \operatorname{rk}' \end{vmatrix} < 0$$

влечет

*Свойство качелей.* Для любой точной тройки пучков $0 \to E \to F \to G \to 0$ выполнены следующие эквивалентности

$$\begin{array}{lcl} \mu(E) < \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) < \mu(G), \\ \mu(E) = \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) = \mu(G), \\ \mu(E) > \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) > \mu(G). \end{array}$$

Свойство качелей позволяет вывести важные следствия:

(i) $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$, если $E$ и $F$ $\mu$-полустабильны, и $\mu(E) > \mu(F)$;

(ii) любой свободный от кручения пучок $X$ допускает каноническую фильтрацию Гардера-Нарасимхана:

$$\begin{tikzcd} X = F^0X \arrow[d] & F^1X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, hook'] & F^nX \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^{n+1}X = 0, \arrow[l, hook'] \\ G_0 & G_1 & & G_n & \end{tikzcd}$$

(вертикальные отображения здесь – это правые стрелки точных последовательностей: $0 \to F^{i+1}X \to F^iX \to G_i \to 0$), где все факторы $G_i = F^iX/F^{i+1}X$ – $\mu$-полустабильны и $\mu(G_i) < \mu(G_j)\ \forall i < j$.

## 2. Абстрактное определение стабильности на абелевой категории

А. Рудаков [1] предложил следующее определение стабильности для произвольной абелевой категории.

**Определение** (А. Рудаков). Структурой стабильности на абелевой категории $\mathcal{A}$ называется предпорядок $\preceq$ на множестве $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$, со свойством качелей: $\forall\ 0 \to A \to B \to C \to 0$ выполнено

1) $A \prec B \Leftrightarrow A \prec C \Leftrightarrow B \prec C$;

2) $A \succ B \Leftrightarrow A \succ C \Leftrightarrow B \succ C$;

3) $A \asymp B \Leftrightarrow A \asymp C \Leftrightarrow B \asymp C$.

Ненулевой объект $A \in \mathcal{A}$ называется полустабильным, если для всякого собственного подобъекта $B \subset A$ выполнено неравенство: $B \preceq A$.

**Теорема** (А. Рудаков). *Если на абелевой категории $\mathcal{A}$ задана структура стабильности, то*

1) $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$ *для всех полустабильных* $A$, $B$ *с* $A \prec B$;

2) *если цепочки объектов из* $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ll} A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, & \text{с } A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \ldots \\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, & \text{с } A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \ldots \\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, & \text{с } A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ \ldots \end{array}$$

*стабилизируются, то* $\forall X \in \mathcal{A}$ *существует каноническая фильтрация Гардера-Нарасимхана объекта* $X$ *с полустабильными факторами* $G_i$ *и неравенствами* $G_i \prec G_{i+1}$ $\forall i$.

Итак, предпорядок на объектах абелевой категории, обладающий свойством качелей, с некоторыми естественными условиями конечности позволяет определить класс полустабильных объектов и построить для каждого ненулевого объекта каноническую фильтрацию Гардера-Нарасимхана. В частности, классическое понятие стабильности, имеющее смысл лишь для пучков без кручения, продолжается на все пучки. Единственно, что для этого нужно, – это упорядочить все объекты категории. Традиционным инструментом такого упорядочивания является векторный наклон.

**Определение.** Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория и $K_0(\mathcal{A})$ – ее группа Гротендика. Линейно независимая система аддитивных функций $(x_0, \ldots, x_r)$ $K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ называется *положительной*, если $\forall A \in \mathcal{A}$ выполнены условия:

$$\begin{array}{l} x_0(A) \geq 0, \\ x_0(A) = 0 \Rightarrow x_1(A) \geq 0, \\ x_0(A) = x_1(A) = 0 \Rightarrow x_2(A) \geq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0(A) = \cdots = x_{r-1}(A) = 0 \Rightarrow x_r(A) > 0. \end{array}$$

Положительная система *полна*, если $x_0(A) = \cdots = x_r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Имея положительную систему аддитивных функций $\{x_i\}$ на $\mathcal{A}$ (не обязательно полную), определим *наклон* ненулевого объекта $A \in \mathcal{A}$ относительно этой системы как вектор

$$\gamma(A) = \left(\underbrace{+\infty, \ldots, +\infty}_{s}, \frac{x_{s+1}(A)}{x_s(A)}, \ldots, \frac{x_r(A)}{x_s(A)}\right),$$

где $s = \min_i\{x_i(A) \neq 0\}$, и введем на множестве таких векторов лексикографический порядок. Предпорядок на $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ вводится по правилу:

$$A \prec B \Leftrightarrow \gamma(A) < \gamma(B).$$

На $\mathcal{A}$ возникает структура стабильности, *индуцированная наклоном*.

Например, $(\mathrm{rk}\,, \deg)$ – полная положительная система на категории когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой; $(\mathrm{rk}\,, \deg, \chi(\mathcal{O}_S, \cdot\,))$ полная положительная система на категории когерентных пучков на гладкой алгебраической поверхности $S$ с числом Пикара 1.

Хотелось бы обобщить понятие стабильности на триангулированные категории. Важный пример таких категорий – производные категории.

### 3. Ограниченная производная категория

Основная идея производной категории – замена объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ подходящими классами эквивалентности их резольвент. Более точно, объекты в ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$ – это конечные комплексы

$$0 \longrightarrow C^n \longrightarrow C^{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^m \longrightarrow 0,$$

с $C^i \in \mathcal{A}$. Такие комплексы изоморфны в $D^b(\mathcal{A})$, если существует морфизм $f : C^\bullet \to C'^\bullet$, индуцирующий изоморфизм когомологий $f^* : H^\bullet(C^\bullet) \simeq H^\bullet(C'^\bullet)$. В частности, гомотопическая эквивалентность комплексов – изоморфизм. При этом невозможно корректно определить понятия ядра, коядра, подобъекта и факторобъекта в $D^b(\mathcal{A})$. Однако там есть хороший аналог точных последовательностей, а именно, отмеченные треугольники.

На $D^b(\mathcal{A})$ определен функтор сдвига

$$T : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A}) \quad X \mapsto X[1].$$

Если $C^\bullet$ – комплекс, представляющий объект из $D^b(\mathcal{A})$, то $B^\bullet = C^\bullet[1]$ определяется как $B^i = C^{i+1}$.

Для каждого морфизма $f : A \to B$ в $D^b(\mathcal{A})$ существует конус $C(f)$ и отмеченный треугольник отображений

$$\cdots \longrightarrow A[i] \xrightarrow{f[i]} B[i] \xrightarrow{g[i]} C(f)[i] \xrightarrow{\delta_i} A[i+1] \cdots,$$

где $A[0] = A$, $B[0] = B$, $C(f)[0] = C(f)$, $A[i] = T^i A$, и $g[i] \circ f[i] = \delta_i g[i] = f[i+1]\delta_i = 0$. Обычно этот треугольник (последовательность отображений) обозначается как

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & C(f) \arrow[dr] & \\ B \arrow[ur, "g"] & & A \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

В некотором смысле класс отмеченных треугольников в производной категории заменяет класс точных троек в абелевой. В частности, для любого объекта $D \in D^b(\mathcal{A})$ возникают две точных последовательности

$$\cdots \quad \to \mathrm{Hom}^i(D,A) \to \mathrm{Hom}^i(D,B) \to \mathrm{Hom}^i(D,C) \to \\ \to \mathrm{Hom}^{i+1}(D,A) \to \cdots$$

$$\cdots \quad \to \mathrm{Hom}^i(C,D) \to \mathrm{Hom}^i(B,D) \to \mathrm{Hom}^i(A,D) \to \\ \to \mathrm{Hom}^{i+1}(D,A) \to \cdots,$$

где $\mathrm{Hom}^i(D,A) = \mathrm{Hom}(D, A[i])$.

Поскольку объекты $D = D^b(\mathcal{A})$ реализуются комплексами, существуют когомологические функторы $H^i : D \to \mathcal{A}$, сопоставляющие объекту его когомологии.

### 3.1. t-структура

В любой производной категории можно выделить две подкатегории:

$$D^{\geq n} = \{C \in D^b(\mathcal{A}) |\ H^i(C) = 0 \text{ для } i < n\},$$

$$D^{\leq n} = \{C \in D^b(\mathcal{A}) |\ H^i(C) = 0 \text{ для } i > n\}.$$

При этом

(1) $D^{\leq 0} \subset D^{\leq -1} = D^{\leq 0}[1]$, $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 1} = D^{\geq 0}[-1]$;

(2) $\mathrm{Hom}^0(D^{\leq 0}, D^{\geq 1}) = 0$;

(3) $\forall X \in D$ включается в отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\geq 1} & \\
X \arrow[ur, "q"] & & X_{\leq 0} \arrow[ll, "p"] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

с $X_{\geq 1} \in D^{\geq 1}$ и $X_{\leq 0} \in D^{\leq 0}$.

(4) $\forall X \in D$ найдутся такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что

$$X \in D^{\geq m} \cap D^{\leq n}.$$

Более того, пересечение $D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ совпадает с абелевой категорией $\mathcal{A}$. Эта пара подкатегорий $D^{\leq 0}$, $D^{\geq 0}$ называется стандартной ограниченной t-структурой на $D$.

Можно определять и другие t-структуры на $D$, выбирая пару подкатегорий $T^{\leq 0}$, $T^{\geq 0}$, со свойствами (1)–(4).

К одной из классических задач теории производных и триангулированных категорий относится классификация ограниченных t-структур. Мы предлагаем метод ее решения, который оказывается эффективным по крайней мере для $D^b(\mathcal{A})$, когда гомологическая размерность $\mathcal{A}$ равна 1.

Определение t-стабильности сформулировано для триангулированных категорий, обобщающих класс производных категорий. Но для наглядности я ограничусь производными категориями.

## 4. Т-стабильность

Наше определение стабильности на $D = D^b(\mathcal{A})$ обобщает определение Бриджленда [2, 3]. Однако, экономя время, я не буду напоминать первоначальную версию, а перейду сразу к нашему варианту.

**Определение.** t-стабильность на $D = D^b(\mathcal{A})$ состоит из линейно упорядоченного множества $\Phi$ и полных подкатегорий $\Pi_\varphi$ $\forall \varphi \in \Phi$, таких что

(1) $\exists$ биекция $\tau : \Phi \to \Phi$ с $\tau(\varphi) \geq \varphi$ $\forall \varphi \in \Phi$ и $\Pi_{\tau(\varphi)} = \Pi_\varphi[1]$;

(2) $\forall \varphi > \psi$ $\mathrm{Hom}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = 0$;

(3) $\forall X \in D$, $X \neq 0$ $\exists$ $\varphi_0 < \cdots < \varphi_n \in \Phi$ и система Постникова

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_{\varphi_0} \arrow[dr] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr] & \\ X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2X \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0, \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

где $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$. $\Phi$ – *множество наклонов*. $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi}$ – *полустабильный объект* наклона $\varphi$, последовательность отмеченных треугольников называют фильтрацией Гардера–Нарасимхана объекта $X$ (ГН-фильтрация).

Введем короткое обозначение для этой фильтрации: $X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n})$.

**Предложение.** *Фильтрация Гардера-Нарасимхана объекта $X$ определена однозначно с точностью до единственного изоморфизма систем Постникова.*

## 4.1. Функториальность ГН-фильтрации

Фиксируем t-стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_\varphi \in \Phi)$ на производной категории $D$ и будем рассматривать множество наклонов $\Phi$ как категорию с одной стрелкой $\varphi \longleftarrow \psi$ для каждого неравенства $\varphi < \psi$. Тогда ГН-фильтрацию

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & X_{\varphi_0} \arrow[dr] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr] & \\ X = F^0 \arrow[ur, "g_0"] & & F^1X \arrow[ll, "f_1"] \arrow[ur, "g_1"] & & F^2X \arrow[ll, "f_2"] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "g_n"] & & 0 \arrow[ll, "f_{n+1}"] \end{tikzcd}$$

можно считать локально постоянным непрерывным слева ковариантным функтором $\Phi \xrightarrow{F_X} D$:

$$\begin{aligned} F_X(\gamma) &= 0, && \text{при} \quad \varphi_n < \gamma, \\ F_X(\gamma) = F_X(\varphi_0) &= X, && \text{при} \quad \gamma \le \varphi_0, \\ F_X(\gamma) &= F_X(\varphi_i), && \text{при} \quad \varphi_{i-1} < \gamma \le \varphi_i, \\ F_X(\alpha \leftarrow \beta) &= f_k \circ \cdots \circ f_m, && \text{при} \quad \varphi_{k-1} < \alpha \le \varphi_k, \\ & && \qquad\quad \varphi_m < \beta \le \varphi_{m+1}. \end{aligned}$$

С этой точки зрения множество всех ГН-фильтраций – полная подкатегория $\mathcal{F}(\Phi, D) \subset \mathcal{F}un(\Phi, D)$ в категории функторов $\Phi \to D$. Морфизм $\eta : F_X \to F_Y$ в $\mathcal{F}(\Phi, D)$ – естественное преобразование функторов, т.е. семейство отображений $F_X(\varphi) \xleftarrow{\eta(\varphi)} F_Y(\varphi)$ с очевидным коммутативным квадратом для каждого неравенства $\varphi < \psi$.

**Предложение.** *Сопоставляя функтору $F_X$, представляющему ГН-фильтрацию объекта $X$, сам объект $X$, мы получаем функтор $\mathcal{F}(\Phi, D) \xrightarrow{ev} D$. В частности, ГН-фильтрация объекта $X$ функториальна по $X$.*

### 5. Примеры t-стабильности

1. Любая ограниченная t-структура $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ индуцирует t-стабильность с $\Phi = \mathbb{Z}$, и $\Pi_n = D^{\geq -n} \cap D^{\leq -n}$.

2. **t-стабильность, индуцированная с абелевой категории.** Пусть на абелевой категории $\mathcal{A}$ фиксирована структура стабильности, индуцированная наклоном $\gamma$ с множеством значений $\Gamma$. Определим $\Phi = \mathbb{Z} \times \Gamma$ с лексикографическим порядком и введем набор подкатегорий

$$\Pi_{(n,\gamma)} = \{A[n] \mid A \in \mathcal{A} - \text{полустабилен}, \gamma(A) = \gamma\}.$$

Тогда $\Phi$ и $\{\Pi_\varphi\}$ задают t-стабильность на $D^b(\mathcal{A})$. Действительно, $\mathrm{Hom}(\Pi_{(k,\mu)}, \Pi_{(n,\mu')}) = 0$ при $(k, \gamma) > (n, \gamma')$, $0 \neq X \in D$ канонически фильтруется своими когомологиями

$$\begin{tikzcd}
 & X_{i_0} & & X_{i_1} \arrow[dl] & & & & X_{i_n} \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ul] & & F^2X \arrow[ll] \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

с $X_{i_j} \in \mathcal{A}[i_j]$, и $\forall X_{i_j} \rightsquigarrow (X_{i_j}^0, \dots X_{i_j}^{n_j})$ имеет ГН-фильтрацию как сдвинутый объект из $\mathcal{A}$. Комбинируя эти фильтрации, получаем искомую ГН-фильтрацию для $X$.

3. **Исключительная t-стабильность.** $\mathcal{A}$ – категория когерентных пучков на $\mathbb{P}^n$ и $D = D^b(\mathcal{A})$. По теореме Бейлинсона любой ненулевой $X \in D$ функториально представляется в виде

$$\begin{tikzcd}
 & G^0 & & G^1 & & G^n & & \\
X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ul] \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ll] & & F^nX \arrow[ll] \arrow[ul] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd},$$

где

$$G^i = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_i^k \otimes \mathcal{O}(i)[-k]$$

с подходящими векторными пространствами $V_i^k$. Положим $\Pi_i = \{U^\bullet \otimes \mathcal{O}(i)\}$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где $U^\bullet$ – градуированное векторное пространство. Так как для любых $k$ и $m$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(i)[k], \mathcal{O}(j)[m]) = \mathrm{Ext}^{m-k}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)) = 0$$

при $0 \leq j < i \leq n$, мы получаем t-стабильность с $n+1$ полустабильными подкатегориями. Будем называть такую t-стабильность *исключительной*.

## 6. Связь t-стабильности с t-структурами

Мы видели, что ограниченная t-структура индуцирует t-стабильность. Покажем, что t-стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ определяет семейство t-структур.

Фиксируем $\psi \in \Phi$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} D^{\leq 0} &= \{X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}) | \ \varphi_0 \geq \psi\}, \\ D^{\geq 1} &= \{X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}) | \ \varphi_n < \psi\}. \end{aligned}$$

Тогда $\mathrm{Hom}(D^{\leq 0}, D^{\geq 1}) = 0$. Для построения отмеченного треугольника

$$X_{\leq 0} \to X \to X_{\geq 1}$$

с $X_{\geq 1} \in D^{\geq 1}$ и $X_{\leq 0} \in D^{\leq 0}$ из определения t-структуры рассмотрим ГН-фильтрацию $X \rightsquigarrow (Y_{\psi_0}, \ldots, Y_{\psi_n})$.

$$\begin{aligned} &\psi_n < \psi \Rightarrow X = X_{\geq 1}, X_{\leq 0} = 0, \\ &\psi_0 \geq \psi \Rightarrow 0 = X_{\geq 1}, X_{\leq 0} = X, \\ &\psi_i \geq \psi > \psi_{i-1} \Rightarrow \\ &X_{\leq 0} \rightsquigarrow (X_{\psi_i}, \ldots, X_{\psi_n}), \ X_{\geq 1} \rightsquigarrow (X_{\psi_0}, \ldots, X_{\psi_{i-1}}). \end{aligned}$$

Таким образом, зная все t-стабильности, мы знаем все t-структуры, и наоборот.

## 7. Частичное упорядочение t-стабильностей

$(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ t-стабильность на $D$. Предположим, мы нашли в некоторой $\Pi_\varphi$ две подкатегории $\Pi_{\pm\varphi} \subset \Pi_\varphi$ с условием: $\mathrm{Hom}(\Pi_{+\varphi}, \Pi_{-\varphi}) = 0$ и

$$\forall X \in \Pi_\varphi \ \exists \text{отм. тр. } X_+ \to X \to X_- \text{ с } X_\pm \in \Pi_{\pm\varphi}.$$

Тогда можно построить новую t-стабильность с $\Phi' = \{-\varphi, +\varphi\} \cup (\Phi \setminus \{\varphi\})$ с очевидным порядком. Это наблюдение можно обобщить.

**Определение.** Пусть $(\Phi, \Pi_\varphi)$, $(\Psi, P_\psi)$ – t-стабильности на $D$, а функтор сдвига действует на $\Phi$ и $\Psi$ автоморфизмами $\tau_\Phi$ и $\tau_\Psi$. Скажем, что t-стабильность $\Phi$ *тоньше*, чем $\Psi$ (а $\Psi$ *грубее* $\Phi$), обозначив $\Phi \preceq \Psi$, если существует такое наложение $r\ \Phi \to \Psi$, что

1) $r\tau_\Phi = \tau_\Psi r$;

2) $\varphi' > \varphi'' \Leftrightarrow r(\varphi') \geq r(\varphi'')$;

3) $\forall$ $\Psi$-полустабильного $X_\psi$ ГН-фильтрация отн. $\Phi$ имеет вид

$$X_\psi \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}), \quad \varphi_i \in r^{-1}(\psi).$$

## 7.1. Тончайшая t-стабильность

Можно сказать, что грубая t-стабильность получается из более тонкой «склеиванием» рядом стоящих полустабильных категорий в одну. Отношение тоньше–грубее задает частичный порядок на множестве всех t-стабильностей данной категории. Минимальный элемент относительно этого порядка называется *тончайшей* t-стабильностью. Очевидно, что тончайшие t-стабильности несут в себе наиболее полную информацию о t-структурах.

**Предложение.** *Т-стабильность* $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ *на* $D^b(\mathcal{A})$, *индуцированная структурой стабильности (в смысле А. Рудакова) на абелевой категории* $\mathcal{A}$ *измельчается до тончайшей стабильности.*

**Следствие.** *Модулярная* t-*стабильность на производной категории когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой, т.е.* t-*стабильность, обобщающая стабильность Мамфорда-Такемото когерентных пучков, измельчается до тончайшей* t-*стабильности.*

## 8. Категория, порожденная исключительной парой

Фиксируем векторное пространство $H$, $\dim H = h$ и рассмотрим абелеву категорию модулей Кронекера с объектами $V_1 \xrightarrow{\psi} H \otimes$

$V_2$, где $V_i$ – конечномерные векторные пространства. Морфизмы в ней – это коммутативные квадраты:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \longrightarrow & H\otimes V_2 \\ {\scriptstyle f_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle id_H\otimes f_2} \\ V_1' & \longrightarrow & H\otimes V_2' \end{array}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_h$ производную категорию от категории модулей Кронекера. Пусть $E_0 = (\mathbb{C} \to H\otimes 0)$ и $E_1[-1] = (0 \to H\otimes\mathbb{C})$. Объекты $E_0$ и $E_1$ образуют исключительную hom-пару, т.е.

$$\overset{\bullet}{\mathrm{Hom}}(E_i, E_j) = \begin{cases} \mathrm{Hom}^0(E_i, E_i) = \mathbb{C}, & i = j, \\ \mathrm{Hom}^0(E_0, E_1) = H = \mathbb{C}^h, & i = 0,\ j = 1, \\ 0, & i = 1,\ j = 0. \end{cases}$$

Известно, что $\mathcal{P}_h$ порождена парой $(E_0, E_1)$ как триангулированная категория. При $h = 2$ $\mathcal{P}_2$ эквивалентна $D^b(Coh\mathbb{P}^1)$.

Как следствие, любой объект $X \in \mathcal{P}_h$ получается как конус морфизма

$$X \longrightarrow V_0^\bullet \otimes E_0 \longrightarrow V_1^\bullet \otimes E_1, \qquad (1)$$

где $V_i^\bullet$ – градуированные векторные пространства, а $V^\bullet \otimes E = \bigoplus_i V^i \otimes E[-i]$. Таким образом, на $\mathcal{P}_h$ возникает исключительная t-стабильность с множеством наклонов $\{0, 1\}$ и полустабильными категориями $\Pi_i = \{E_i[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Мы можем размножать исключительные пары (и исключительные t-стабильности) рекуррентным образом:

$$E_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_n, E_{n+1}) \otimes E_n \longrightarrow E_{n+1},$$

$$E_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_{n-1}, E_n)^* \otimes E_n \longrightarrow E_{n+1}.$$

При этом $\forall n, k \in \mathbb{Z}$ $(E_n[k], E_{n+1}[k])$ – исключительная hom-пара и может быть подставлена в (1) вместо $(E_0, E_1)$. Других исключительных hom-пар в $\mathcal{P}_h$ нет. Все исключительные t-стабильности (с точностью до измельчения и переупорядочивания наклонов) параметризуются целым числом $n$.

### 8.1. Тончайшая исключительная t-стабильность

Факторы ГН-фильтрации в (1) можно переставить так, что согласно нумерации факторов будут выполняться неравенства:

$$\cdots < V_0^0 \otimes E_0 < V_1^1 \otimes E_1[-1] < V_0^{-1} \otimes E_0[1] < V_1^1 \otimes E_1 \cdots$$

И мы получаем t-стабильность с множеством наклонов $\mathbb{Z}$ и полустабильными категориями

$$\Pi_k = \begin{cases} \{V \otimes E_0[n]\}, & k = 2n, \\ \{V \otimes E_1[n-1]\}, & k = 2n+1, \end{cases}$$

где $V$ – конечномерные векторные пространства. Сдвиг действует на $\mathbb{Z}$ автоморфизмом $\tau : n \mapsto n+2$. Очевидно, это тончайшая t-стабильность.

Посмотрим на t-структуру и ее ядро, индуцированную такой t-стабильностью.

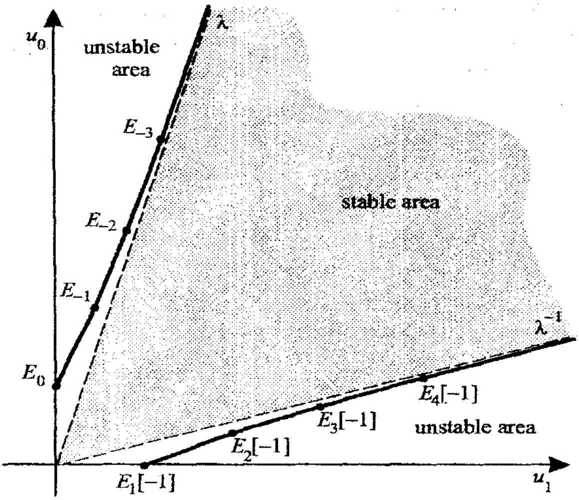
$$\begin{array}{l} D^{\leq 0} = \{X \rightsquigarrow (X_{k_0}, \ldots, X_{k_n}) |\ k_0 \geq 0\},\ X_{k_i} \in \Pi_{k_i}; \\ D^{\geq 0} = \{X \rightsquigarrow (X_{k_0}, \ldots, X_{k_n}) |\ k_n < 2\}. \end{array}$$

$$\mathcal{A} = D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0} = \{X \rightsquigarrow (X_0, X_1)\}.$$

$$X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow V_1 \otimes E_1[-1] \to X \to V_0 \otimes E_0,$$

То есть $\mathcal{A}$ – категория модулей Кронекера с $H = \mathrm{Hom}(E_0, E_1)$. На $\mathcal{A}$ есть две аддитивные функции $u_0 = \dim V_0$, $u_1 = \dim V_1$. И возникают два наклона: $\varepsilon = \frac{u_1}{u_0}$ и $\mu = \frac{u_0}{u_1}$. Любопытно, что любой наклон $\gamma$ эквивалентен одному из этих, т.е. $\gamma$-полустабильный модуль Кронекера либо $\nu$-, либо $\mu$-полустабилен.

Существует только 2 $\nu$-стабильных модуля Кронекера: $E_0$ и $E_1[-1]$, т.е. $\nu$-стабильность – исключительна. А $\mu$-стабильность совпадает со стабильностью модулей Кронекера, приходящей из геометрической теории инвариантов, и мы можем строить модули $\mu$-полустабильных объектов. Причем можно указать все классы в $K_0(\mathcal{A})$, реализующиеся $\mu$-полустабильными объектами.




Можно доказать, что любая другая t-стабильность на $\mathcal{P}_h$ получается огрублением (измельчением) или переупорядочиванием полустабильных категорий этих двух.

## Библиографический список

1. *Rudakov A.* Stability for an abelian category. J. Algebra 197 (1997). № 1. P. 231–245.
2. *Bridgeland T.* Stability conditions on triangulated categories. arXiv:math.AG / 0212237.
3. *Bridgeland T.* Stability conditions on K3 surfaces. arXiv:math.AG /0307164. V. 1.

## Перестройки стабильных систем на поверхностях

*Б.В. Карпов*

### Введение

Пусть $S$ – гладкая проективная поверхность над $\mathbb{C}$, $H$ – обильный дивизор на $S$ такой, что $H \cdot K_S < 0$. Конечно, существование такого обильного дивизора накладывает сильные ограничения на поверхность; этим ограничениям удовлетворяют, в частности, поверхности дель Пеццо, рациональные линейчатые поверхности, а также некоторые другие классы поверхностей (например, разрешения особенностей особых поверхностей дель Пеццо).

В данной статье мы описываем конструкцию перестроек систем стабильных пучков на поверхности $S$, являющуюся в известном смысле обобщением перестроек исключительных пучков ([1, 2, 4, 8]), и некоторые применения этой конструкции. Используемое понятие стабильности – стабильность по Гизекеру относительно $H$.

В отличие от исключительных пучков, перестройки стабильных систем определены не всегда, и условия, которые естественно наложить, являются арифметическими, а не когомологическими. Самый ранний известный автору источник, где используются аналогичные арифметические условия при работе с расслоениями на кривых и где доказываются простейшие аналоги предложений 1 и 2 (см. ниже), – статья [10].

Пусть $\mathcal{E}$ – когерентный пучок на $S$. *Степенью* и *наклоном* пучка $\mathcal{E}$ назовем соответственно величины

$$\deg(\mathcal{E}) = \deg_H(\mathcal{E}) := c_1(\mathcal{E}) \cdot H \quad \text{и} \quad \mu(\mathcal{E}) := \frac{\deg(\mathcal{E})}{\operatorname{rk}(\mathcal{E})},$$

а образ $\mathcal{E}$ в $K_0(S)$ мы будем задавать вектором

$$vEv(\mathcal{E}) = (\operatorname{rk}(\mathcal{E}), c_1(\mathcal{E}), -\chi(\mathcal{E})) \in \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic} S \oplus \mathbb{Z}.$$

Для произвольного элемента $v \in \mathbb{Z} \oplus \operatorname{Pic} S \oplus \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{M}(v)$ многообразие модулей (возможно, пустое) полустабильных пучков $\mathcal{E}$ с $v(\mathcal{E}) = v$.

Если $\mathcal{E}$ – пучок без кручения (каковыми по определению являются полустабильные пучки), то имеет место каноническое вложение пучка $\mathcal{E}$ в его рефлексивную оболочку $\mathcal{E}^{\vee\vee}$. Положим $Q_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, это пучок с носителем на нульмерной подсхеме поверхности $S$.

**Описание перестроек**

**Определение 1.** Назовем *блоком* упорядоченный набор $\widehat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_m)$ стабильных пучков, имеющих одинаковые ранги, одинаковые степени и попарно неизоморфные рефлексивные оболочки. Числа $m$, $\mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) := \mathrm{rk}(\mathcal{E}_i)$ и $\deg(\widehat{\mathcal{E}}) := \deg(\mathcal{E}_i)$ назовем соответственно *длиной*, *рангом* и *степенью* блока $\widehat{\mathcal{E}}$.

Этому определению удовлетворяет, в частности, блок исключительных расслоений на поверхности дель Пеццо в смысле [4].

**Определение 2.** *Блочной системой (стабильных пучков)* назовем триаду вида $\widehat{\sigma} = (\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{F}}, (V_{ij}))$, в которой $\widehat{\mathcal{E}}$ – блок длины $m$, $\widehat{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$ – блок длины $n$ и $(V_{ij})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, – набор векторных пространств, если выполнено одно из следующих условий.

a) $\deg(\widehat{\mathcal{F}})\,\mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) - \deg(\widehat{\mathcal{E}})\,\mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{F}}) = 1$, и зафиксированы вложения $V_{ij} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j)$. В этом случае $\widehat{\sigma}$ называется *системой типа* hom.

b) $\deg(\widehat{\mathcal{F}})\,\mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) - \deg(\widehat{\mathcal{E}})\,\mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{F}}) = -1$, и зафиксированы вложения $V_{ij} \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j)$. В этом случае $\widehat{\sigma}$ называется *системой типа* ext.

Левую перестройку такой системы можно представлять себе как "перенос налево" пучков $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ через блок $\widehat{\mathcal{E}}$; при этом возникают новые пучки $\mathcal{C}_j$, которые могут, в свою очередь, образовывать блок $\widehat{\mathcal{C}}$.[1]

Таким образом, ключевым моментом является "перенос пучка через блок", и для левой перестройки достаточно рассмотреть систему $\widehat{\sigma}$ при $n = 1$; при этом мы будем писать $\mathcal{F}$ вместо $\mathcal{F}_1$ и $V_i$ вместо $V_{i1}$.

Итак, пусть имеется блочная система стабильных пучков

$$\widehat{\sigma} = (\widehat{\mathcal{E}}, \mathcal{F}, (V_i)); \tag{1}$$

положим $r = \mathrm{rk}(\widehat{\mathcal{E}})$ и $r' = \mathrm{rk}\,\mathcal{F}$.

**Предложение 1.** *Пусть $\widehat{\sigma}$ – система типа hom. Рассмотрим соответствующие морфизмы $\varphi_k : V_k \otimes \mathcal{E}_k \to \mathcal{F}$ и их сумму $\varphi : \bigoplus_{k=1}^{m}(V_k \otimes \mathcal{E}_k) \longrightarrow \mathcal{F}$. Имеют место следующие утверждения.*

[1] Однако возможны ситуации, когда пучки $\mathcal{C}_j$ оказываются попарно изоморфными.

*1) При* $\sum_{k=1}^{m} \dim V_k < r'/r$ *морфизм* $\varphi$ *инъективен, подпучок кручения* $T(\operatorname{coker}\varphi) \subset \operatorname{coker}\varphi$ *является подпучком* $\bigoplus_{k=1}^{m}(V_k \otimes Q_{\mathcal{E}_k})$ *и фактор-пучок* $(\operatorname{coker}\varphi)/T(\operatorname{coker}\varphi)$ *стабилен.*

*2) При* $\sum_{k=1}^{m} \dim V_k > r'/r$ *морфизм* $\varphi$ *сюръективен в коразмерности 1 и пучок* $\ker\varphi$ *стабилен.*

При $m = 1$ в случае, когда $\mathcal{E}_1$ локально свободен, доказательство с очевидными изменениями повторяет доказательство п. (2) леммы 2.1 статьи [9]. При не локально свободном $\mathcal{E}_1$ используется каноническое вложение в рефлексивную оболочку и далее применяется индукция по $m$. Отметим, что в условиях п. 1) если все $\mathcal{E}_i$ локально свободны, то все $Q_{\mathcal{E}_i} = 0$, откуда $T(\operatorname{coker}\varphi) = 0$ и пучок $\operatorname{coker}\varphi$ стабилен.

**Предложение 2.** *Пусть* $\widehat{\sigma}$ *– система типа ext. Рассмотрим соответствующее набору подпространств* $(V_1, \ldots, V_m)$ *расширение*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{m}(V_k \otimes \mathcal{E}_k) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

*Тогда для стабильности пучка* $\mathcal{C}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$V_k \cap \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_k, Q_{\mathcal{F}}) = \{0\}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

*где пересечения рассматриваются внутри пространств* $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_k, \mathcal{F})$. *В частности, если* $\mathcal{F}$ *локально свободен, то* $\mathcal{C}$ *стабилен.*

Случай $m = 1$ разобран в [5, 6]. Доказательство проводится индукцией по $m$.

Сформулированные выше два предложения позволяют определить левую перестройку системы (1).

**Определение 3.** Левой перестройкой системы $\widehat{\sigma}$ называется система $L\widehat{\sigma} = (\mathcal{C}, \widehat{\mathcal{E}}, (V_i^\vee))$, задаваемая следующим образом.

1. Если система $\widehat{\sigma}$ – типа hom и $\sum_{i=1}^{m} \dim V_i > r'/r$, то $\mathcal{C}$ задается как ядро канонического отображения $\varphi$, а $V_i^\vee$ естественно отождествляются с подпространствами в $\operatorname{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_i)$, так что $L\widehat{\sigma}$ имеет тип hom.

2. Если $\widehat{\sigma}$ – система типа hom и $\sum_{i=1}^{m} \dim V_i > r'/r$, то левая перестройка определена только при отсутствии кручения у пучка

$\mathcal{C} := \operatorname{coker}\varphi$. При этом $V_i^\vee$ естественно отождествляются с подпространствами в $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{C}, \mathcal{E}_i)$ и система $L\widehat{\sigma}$ имеет тип ext.

3. Если $\widehat{\sigma}$ – система типа ext, то левая перестройка определена при условии (3), и $\mathcal{C}$ получается в результате расширения (2). Пространства $V_i^\vee$ естественно отождествляются при этом с подпространствами в $\operatorname{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{E}_i)$, так что $L\widehat{\sigma}$ имеет тип hom.

По аналогии с перестройками исключительных пучков в случаях 1, 2 и 3 перестройку называют соответственно *делением*, *отскоком* и *расширением*.

Достаточным условием существования левой перестройки системы $\widehat{\sigma}$ в случае 2 является локальная свобода пучков $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \dots, m$, а в случае 3 – локальная свобода пучка $\mathcal{F}$.

Правые перестройки систем вида $(\mathcal{C}, \widehat{\mathcal{E}}, (V_i^\vee))$ (т. е. "перенос пучка направо через блок") определяются аналогично.

## Примеры и применения

Внимательное рассмотрение самого простого случая $m = 1$, т.е. когда имеется не "блочная", а "простая" система стабильных пучков $\sigma = (\mathcal{E}, \mathcal{F}, V)$, приводит к следующей теореме об оценке числа глобальных гомоморфизмов $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \dim \operatorname{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

**Теорема 1.** *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – стабильные пучки, имеющие $v(\mathcal{E}) = (r, c_1, \delta)$ и $v(\mathcal{F}) = (r', c_1', \delta')$, причем $\deg(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) = 1$ и $H \cdot K_S < \mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{F}) < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $\mathcal{E}$ локально свободен, $1 < r < r'$ и $\delta'/\delta < \lfloor r'/r \rfloor$, то во всех случаях, кроме*

$$c_1 \cdot H = -1 \quad \text{и} \quad v(\mathcal{F}) = v(\mathcal{O}_S) + \lceil \delta'/\delta \rceil \, v(\mathcal{E}),$$

*имеет место оценка*

$$h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant \lfloor \delta'/\delta \rfloor .$$

2) *Если $\delta'/\delta > \lceil r'/r \rceil$ или $\delta' > 0$, $\delta = 0$, то во всех случаях, кроме*

$$c_1 \cdot H = 1 + rH \cdot K_S \quad \text{и} \quad v(\mathcal{F}) = \lceil r'/r \rceil \, v(\mathcal{E}) - v(K_S),$$

*имеет место оценка*

$$h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant \lfloor r'/r \rfloor .$$

3) *Если* $r > r' > 1$ *и* $\delta/\delta' < \lfloor r/r' \rfloor$, *то во всех случаях, кроме*

$$c_1' \cdot H = 1 + r'H \cdot K_S \quad \text{и} \quad v(\mathcal{E}) = v(K_S) + \lceil \delta/\delta' \rceil \, v(\mathcal{F}),$$

*имеет место оценка*

$$h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant \lfloor \delta/\delta' \rfloor .$$

4) *Если* $\mathcal{E}$ *локально свободен и* $\delta/\delta' > \lceil r/r' \rceil$ *или* $\delta' = 0$, $\delta > 0$, *то во всех случаях, кроме*

$$c_1' \cdot H = -1 \quad \text{и} \quad v(\mathcal{E}) = \lceil \delta'/\delta \rceil \, v(\mathcal{F}) - v(\mathcal{O}_S),$$

*имеет место оценка*

$$h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant \lfloor r/r' \rfloor .$$

Доказательство опирается на следующий простой факт, вытекающий из свойств стабильности.

**Лемма 1** (о неотрицательности). *Пусть* $C$ – *стабильный пучок, удовлетворяющий одному из трех условий:*

*a)* $H \cdot K_S < \mu(C) < 0$,

*b)* $\mathrm{rk}(C) = 1$, $\deg(C) = 0$ *и* $C \neq \mathcal{O}_S$,

*c)* $\mathrm{rk}(C) = 1$, $\deg(C) = H \cdot K_S$ *и* $C \neq K_S$.

*Тогда* $-\chi(C) \geqslant 0$.

При $1 < r < r'$, если отношение $\delta'/\delta$ заключено (нестрого) между нижней и верхней целыми частями $r'/r$, то общие методы доказательства теоремы 1 не применимы, и оценка $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F})$ становится нетривиальной задачей. Однако в некоторых случаях эта задача решается посредством применения перестроек систем стабильных пучков.

Пусть $S = \mathbb{P}^2$, $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, заданную рекуррентным соотношением и начальными условиями

$$r_{n+1} + r_{n-1} = 3\,r_n\,, \qquad r_{-1} = r_0 = 1\,. \tag{4}$$

Элементам этой последовательности соответствуют исключительные расслоения $E_n$, задаваемые аналогичным образом в категории пучков. А именно, начальные условия имеют вид

$$E_{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2), \qquad E_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1), \tag{5}$$

а роль рекуррентного соотношения играет каноническая точная последовательность

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{ev^*} E_n \otimes \mathrm{Hom}(E_n, E_{n+1}) \xrightarrow{ev} E_{n+1} \longrightarrow 0\,, \tag{6}$$

задающая как левые $\Big((E_n, E_{n+1}) \overset{L}{\longmapsto} (E_{n-1}, E_n)\Big)$, так и правые $\Big((E_{n-1}, E_n) \overset{R}{\longmapsto} (E_n, E_{n+1})\Big)$ перестройки в силу канонического изоморфизма

$$\mathrm{Hom}(E_n, E_{n+1}) = \mathrm{Hom}(E_{n-1}, E_n)^{\vee}.$$

Имеем:

$$h^0(E_n, E_{n+1}) = h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\big) = h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) = 3,$$

и при $n = 0$ тройка (6) является точной последовательностью Эйлера, подкрученной на $(-2)$. В частности, $E_1 = T\mathbb{P}^2(-2) = \Omega\mathbb{P}^2(1)$.

Пользуясь начальными данными (5) и последовательностью (6), легко показать, что

$$\mathrm{rk}(E_n) = r_n, \qquad c_1(E_n) = -r_{n-1} \qquad \text{и} \qquad -\chi(E_n) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} r_n & r_{n+1} \\ r_{n-1} & r_n \end{vmatrix} = -1\,,$$

из которого следует, что последовательность наклонов $\mu(E_n) = -r_{n-1}/r_n$ возрастает. Разрешая рекуррентное соотношение из (4), нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to-\infty}\mu(E_n) = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, откуда

$$-3 < \mu(E_n) < 0, \quad \forall n.$$

Таким образом, наклоны всех исключительных расслоений $E_n$ зажаты между наклоном канонического класса $\mathbb{P}^2$ и нулем, и в силу стабильности исключительных расслоений мы имеем:

$$H^0(E_n) = H^2(E_n) = 0, \qquad H^1(E_n) = 0,$$

последнее равенство – следствие обращения в нуль эйлеровой характеристики (см. (7)).

Каждое из расслоений $E_n$ в свою очередь является начальным членом последовательности многообразий модулей

$$\mathcal{M}_n(\delta) := \mathcal{M}(r_n, -r_{n-1}, \delta), \quad \delta = 0, 1, 2, \ldots ,$$

где

$$\dim \mathcal{M}_n(\delta) = 2r_n\delta.$$

При этом $\mathcal{M}_n(0)$ состоит из одной точки $E_n$. По последовательностям многообразий модулей определяются степенные ряды, участвующие в математическом тестировании гипотезы $S$-двойственности (см. [3]).

Основным случаем будет $n \geqslant 0$, тогда $2 \leqslant \frac{r_{n+1}}{r_n} < \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$. Случай $n \leqslant -1$ является в некотором смысле двойственным.

**Предложение 3.** *Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_n(\delta)$, $F \in \mathcal{M}_{n+1}(\delta')$, причем $\mathcal{E}$ локально свободен. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$ *при* $\delta'/\delta < 1$;
2) $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant 1$ *при* $1 \leqslant \delta'/\delta < 2$;
3) $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant 2$ *при* $\delta'/\delta \geqslant 2$ *и при* $\delta = 0$, $\delta' > 0$;
4) $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 3$ *при* $\delta = \delta' = 0$.

**Доказательство.** Утверждения 1) и 2) следуют из п. 1) теоремы 1. Оценка утверждения 3) при $\delta'/\delta > 3$ и при $\delta' > 0$, $\delta = 0$ следует из п. 2) той же теоремы. Пусть $2 \leqslant \delta'/\delta \leqslant 3$, и $V$ – трехмерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Тогда левые перестройки системы $\sigma = (\mathcal{E}, \mathcal{F}, V)$ в силу рекуррентного соотношения из (4) приводят к пучкам, ранги которых принимают последовательно значения $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots$ . Точнее, если $L^k\sigma = (\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k-1}, W_k)$, то $\dim W_k = 3$, $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_k) = r_{n-k}$ и $c_1(\mathcal{E}_k) = -r_{n-k-1}$. Поскольку $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ локально свободен, то таковыми являются и все $\mathcal{E}_k$, $k \geqslant 0$, в частности, $\mathcal{E}_n$, имеющий $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_n) = r_0 = 1$ и $c_1(\mathcal{E}_n) = -r_{-1} = -1$.

Таким образом, $\mathcal{E}_n = \mathcal{O}(-1)$ и $-\chi(\mathcal{E}_n) = 0$. Это обстоятельство поможет привести к противоречию, т.к. по условию $0 < -\chi(\mathcal{E}) < -\chi(\mathcal{F})$. Действительно, рассмотрим наименьшее $k$ такое, что $-\chi(\mathcal{E}_k) = 0$, тогда $-\chi(\mathcal{E}_{k-1}) > 0$ и из точной тройки, задающей левую перестройку системы $L^k\sigma$, следует, что $-\chi(\mathcal{E}_{k+1}) < 0$. Это невозможно из соображений стабильности.

Утверждение 3) доказывается аналогично 2) при $\delta'/\delta > 3$: предположение о наличии трехмерного подпространства $V \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ левой перестройкой системы $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, V)$ приводится к противоречию. Утверждение 4) – известный факт из теории исключительных расслоений, оно приведено для полноты картины.

Опишем теперь некоторые применения перестроек стабильных систем к изучению геометрии многообразий модулей. Пусть $\mathrm{Jump}_k(v, v')$ – локус на произведении многообразий модулей $\mathcal{M}(v) \times \mathcal{M}(v')$, состоящий из пар пучков $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ таких, что $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \geqslant k$. Рассмотрим естественные морфизмы

$$\Phi_k : \mathrm{Jump}_k(v, v') \longrightarrow \mathcal{M}(v), \qquad (\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xmapsto{\Phi_k} \mathcal{E},$$

$$\Psi_k : \mathrm{Jump}_k(v, v') \longrightarrow \mathcal{M}(v'), \qquad (\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xmapsto{\Psi_k} \mathcal{F}.$$

Пусть $\Psi_k^{(0)}$ – ограничение $\Psi_k$ на прообраз $\Phi_k^{-1}(\mathcal{M}^{(0)}(v))$ открытого подмножества, состоящего из локально свободных пучков.

Всюду далее мы будем предполагать, что

$$v = (r_n, -r_{n-1}, \delta) \qquad \text{и} \qquad v' = (r_{n+1}, -r_n, \delta'),$$

считая по-прежнему $n \geqslant 0$.

**Предложение 4.** 1) *при* $1 \leqslant \delta'/\delta < 2$ *отображение* $\Psi_1^{(0)}$ *является вложением;*

2) *при* $\delta' > 3\delta$ *отображение* $\Psi_2$ *является вложением, а относительно* $\Psi_1$ *каждая точка из* $\mathcal{M}(v')$ *может иметь не более двух прообразов.*

**Доказательство.** Докажем от противного первое утверждение. Предположим, что найдутся такие $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{M}^{(0)}(v)$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(v')$, что $h^0(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Зафиксируем одномерные подпространства $V_i \subset \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})$ и рассмотрим блочную систему

$$\sigma = \big(\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}, \mathcal{F}, \{V_1, V_2\}\big) \tag{8}$$

типа hom. Поскольку $\mathcal{E}_i$ локально свободны и $\operatorname{rk}(\mathcal{E}_1) + \operatorname{rk}(\mathcal{E}_2) = 2r_n < r_{n+1} = \operatorname{rk}(\mathcal{F})$, левая перестройка системы $\sigma$ определена и имеет тип отскок. Это означает, что канонический морфизм

$$\varphi : (\mathcal{E}_1 \otimes V_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes V_2) \longrightarrow \mathcal{F} \tag{9}$$

инъективен и в системе

$$L\sigma = \big(C, \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}, \{V_1^\vee, V_2^\vee\}\big)$$

пучок $C = \operatorname{coker} \varphi$ стабилен. Но тогда $-\chi(C) = \delta' - 2\delta < 0$. Противоречие.

Чтобы во втором утверждении доказать, что $\Psi_2$ является вложением, достаточно показать, что не существует систем (8) типа hom, где уже $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ не обязательно локально свободны, $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_2 = 1$. Пусть существует такая система. Поскольку

$$\operatorname{rk}\Big((V_1 \otimes \mathcal{E}_1) \oplus (V_2 \otimes \mathcal{E}_2)\Big) = 3r_n > r_{n+1},$$

левая перестройка системы $\sigma$ – деление, морфизм (9) сюръективен в коразмерности 1 и пучок $C = \ker \varphi$ стабилен. Но тогда $-\chi(\operatorname{im} \varphi) \geqslant \delta'$ и $-\chi(C) \leqslant 3\delta - \delta' < 0$, т.е. мы опять получаем противоречие.

Остается показать, что в п. 2) каждая точка из $\mathcal{M}(v')$ может иметь не более двух прообразов относительно $\Psi_1$, т.е. исключить существование систем

$$\tau = \left(\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}, \mathcal{F}, \{V_1, V_2, V_3\}\right)$$

типа hom, где $\dim V_i = 1$. Если такая система существует, то в силу неравенства

$$\operatorname{rk}\left(\bigoplus_{k=1}^{3}(V_k \otimes \mathcal{E}_k)\right) = 3r_n > r_{n+1},$$

левая перестройка $\tau$ является делением, это приводит к противоречию так же, как и в предыдущем рассуждении.

## Библиографический список


1. *Городенцев А.Л.* Исключительные расслоения на поверхностях с подвижным антиканоническим классом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 740–757.
2. *Gorodentsev A.L., Rudakov A.N.* Exceptional Vector Bundles on Projective Spaces // Duke Math. J., 54 (1987) 115–130.
3. *Карпов Б.В.* Тестирование $S$-двойственности и исключительные расслоения // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 1. С. 107–122.
4. *Карпов Б.В., Ногин Д.Ю.* Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 3–38.
5. *Кулешов С.А.* Стабильные расслоения на K3-поверхности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1994. Т. 54. № 1. С. 213–220.
6. *Kuleshov S.A.* Moduli Spaces of sheaves necessary for testing $S$-duality conjecture. Preprint MPI 97–32.
7. *Кулешов С.А., Орлов Д.О.* Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58 (3) 1994. С. 53–87.
8. *Рудаков А.Н.* Исключительные расслоения на квадрике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 782–812.

9. *Yoshioka K.* Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces // J. reine angew. Math. 515 (1999). P. 97–123.

10. *Тюрин А.Н.* Аналог теоремы Торелли для многомерных векторных расслоений на произвольной алгебраической кривой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. № 2. С. 343–370.

## Дистрибутивность решетки интервальных округлений

*Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова*

Истоки алгебраической теории округлений содержатся в работе Кулиша [1], который рассматривает их как отображения $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям. Более удобной и наглядной базой для построения теории округлений является интервальная арифметика [2].

**Определение** [3]. *Интервальным округлением* (I-округлением) называется отображение $\varphi : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $(\forall A \in \mathbf{IR})\,(A \subseteq \varphi(A))$,
2. $(\forall A,\ B \in \mathbf{IR})\,(A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B))$,
3. $\varphi^2 = \varphi$.

Примерами интервальных округлений служат следующие отображения:

1. $\varphi^{(k,l)}([a;b]) = \left[a_k^-; b_l^+\right]$, где $a_k^-$ – (соответственно $b_l^+$) – результат обычного (числового) округления $a(b)$ до $k$-го ($l$-го) десятичного разряда по недостатку (по избытку) ($k, l$ – любые целые числа). Такие I-округления называются *регулярными*. Множество всех регулярных округлений, дополненное тождественным отображением $\varepsilon$ и отображениями $\varphi^{(k,\infty)}([a;b]) = \left[a_k^-; b\right]$ и $\varphi^{(\infty,l)}([a;b]) = \left[a; b_l^+\right]$, обозначим $\Phi^{(\mathbf{Z})}$.

2. $\varphi_M(A) = [-\max(|a|, |b|);\ \max(|a|, |b|)]$.

3. Пусть $U = [u;v]$ фиксированный отрезок, содержащий нуль: $u < 0 < v$. Положим

$$\varphi_U([a;b]) = \begin{cases} [a;b], & \text{если } [a;b] \cap U = \emptyset, \\ [\min(a,u); \max(b,v)], & \text{если } [a;b] \cap U \neq \emptyset. \end{cases}$$

4. Выберем и зафиксируем действительное число $\delta > 0$, тогда результат округления определяется формулой:

$$\varphi([a,b]) = \begin{cases} [\delta, b], & \text{если } a \geqslant \delta, \\ [a, -\delta], & \text{если } b \leqslant -\delta, \\ [a, b], & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Примеры 2, 3, 4 показывают, что множество $\Phi$ всех I-округлений весьма обширно: кроме естественно понимаемых округлений, в нем содержатся отображения, мало похожие на округления, понимаемые в естественном смысле. Поэтому возникает задача отсекания из множества $\Phi$ подобных патологических отображений. Подходы к решению этой задачи связаны с заданием на множестве $\Phi$ некоторых алгебраических и порядковых структур и содержатся в работах [3] и ряде сообщений авторов [4–6].

Легко убедиться в том, что произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ двух регулярных округлений $\varphi$ и $\psi$ совпадают и являются регулярными округлениями, иными словами, алгебра $\langle \Phi^{(\mathbf{Z})}, \cdot \rangle$ является коммутативной полугруппой. В то же время округления $\varphi_M$ и $\varphi_U$ с регулярными округлениями не коммутируют и, следовательно, не попадут ни в какую коммутативную полугруппу I-округлений, содержащую множество $\Phi^{(\mathbf{Z})}$. Это обстоятельство показывает, что при изучении множеств I-округлений целесообразно рассматривать на них алгебраическую структуру, связанную, в частности, с операцией умножения (композиции) отображений. Разумеется, при этом нужно потребовать замкнутости такого множества относительно рассматриваемых операций. В работе [3] показано, что

$1^0$. Если I-округления $\varphi_1$, $\varphi_2$ коммутируют: $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$, то их произведение является I-округлением.

$2^0$. Если оба произведения $\varphi_1\varphi_2$ и $\varphi_2\varphi_1$ двух I-округлений являются I-округлениями, то $\varphi_1$, $\varphi_2$ коммутируют.

$3^0$. Отображение $\varphi : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, действующее по правилу $\varphi(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$, где $\varphi_1$, $\varphi_2$ – I-округления, является I-округлением.

В этой же работе показано, что, задавая на множестве $\Phi$ всех I-округлений отношение порядка $\leqslant$ условием

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \Longleftrightarrow (\forall A)(\varphi_2(A) \subseteq \varphi_1(A)),$$

мы получим верхнюю полурешетку, в которой $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$.

Пусть $\Psi$ – подмножество в множестве $\Phi$ всех I-округлений, удовлетворяющее условиям:

– любые два округления, содержащиеся в $\Psi$, коммутируют,

– $\Phi^{(\mathbf{Z})} \subseteq \Psi$,

– $\Psi$ замкнуто относительно операций

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(A) = \varphi_2(\varphi_1(A)), \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A).$$

Назовем такое множество $\Psi$ R-множеством. R-множества в множестве $\Phi$ существуют: примером может служить $\Phi^{(\mathbf{Z})}$. Разумеется, само $\Phi$ R-множеством не является. Опираясь на лемму Куратовского-Цорна, легко показать, что существуют максимальные R-множества. Обозначим через $\overline{\Phi}$ одно из них.

**Теорема 1.** *Максимальное* R-*множество* $\overline{\Phi}$ *является решеткой.*

В самом деле, алгебра $\langle\overline{\Phi}, \cdot\rangle$ является коммутативной полугруппой идемпотентов. В такой полугруппе, как хорошо известно, можно ввести так называемое отношение естественного порядка $\leqslant_1$ условием

$$\varphi_1 \leqslant_1 \varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_1\varphi_2 = \varphi_1,$$

относительно которого $\overline{\Phi}$ является нижней полурешеткой, в которой операция $\wedge$ определяется условием $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_1\varphi_2$. В работе [3] показано, что в полугруппе $\langle\overline{\Phi}, \cdot\rangle$ отношение естественного порядка $\leqslant_1$ и отношение $\leqslant$ (см. $3^0$) совпадают. Так как $\overline{\Phi}$ замкнуто относительно сложения и так как $(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)(A)$, то $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \overline{\Phi}$.

**Теорема 2.** *Решетка* $\langle\overline{\Phi}, \vee, \wedge\rangle$ *дистрибутивна.*

Действительно,

$$\begin{gathered}(\varphi \wedge (\psi \vee \chi))(A) = (\varphi(\psi \vee \chi))(A) = (\psi \vee \chi)(\varphi(A)) = \\ = \psi(\varphi(A)) \cap \chi(\varphi(A)) = (\varphi\psi)(A) \cap (\varphi\chi)(A) = (\varphi\psi \vee \varphi\chi)(A) = \\ = ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))(A),\end{gathered}$$

следовательно, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.

## Библиографический список

1. *Kulisch U.* An axiomatic Approach to Rounded Computations / U. Kulisch // Numer. Math. 1971. № 18. P. 1–17.
2. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. М.: Мир, 1987. 356 с.
3. *Каминский Т.Э.* К теории интервальных округлений / Т.Э. Каминский // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. 2000. С. 23–36.
4. *Kaminsky T.E.* Interval rounding off lattice / T.E. Kaminsky // Intern. Congress on Computer Systems and Applied Math. Abstracts. St. Petersburg, 1993.
5. *Крюкова А.Л.* О полугруппе интервальных округлений /А.Л. Крюкова // Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург, 2004. С. 34–37.
6. *Крюкова А.Л.* Идемпотентное полукольцо интервальных округлений / А.Л. Крюкова // V Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 2004. С. 23.

## Об одной задаче классификации матриц

*Ю.И. Большаков, Б. Райхштейн*

В настоящей работе речь пойдет о следующей задаче классификации матриц. Пусть $G_0$ – группа унипотентных верхних треугольных теплицевых матриц, т.е. матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \dots & -x_{n-1} \\ 0 & 1 & -x_1 & -x_2 & \dots & -x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами $x_i \in \mathbb{C}$.

Мы будем обозначать эти матрицы символом

$$Tp\,(1,\ -x_1,\ -x_2,\ -x_3,\ \ldots,\ -x_{n-1}).$$

Множество $X$, на котором действует группа, представляет собой некоторое подмножество $n \times n$ матриц, именно, $X = \{H \in \mathbf{C}^{n\times n} \,/\, H^* = H,\ detH \neq 0\}$. Группа $G_0$ действует на множестве $X$ по следующему правилу: $(H)T = T^t H \bar{T}$, где $T \in G_0$, $H \in X$. Для всякой матрицы $H \in X$ мы определим пару чисел $(k, l)$ следующим образом: для номера $k$ : $h_{ij} = 0$ для всех $i + j \leqslant k$, но существует индекс $i$, для которого $h_{i,k-i+1} \neq 0$; номер $l = min\{i/h_{i,k-i+1} \neq 0\}$. Заметим, что $k = k(H)$, $l = l(H)$,но, как показывает непосредственный подсчет, числа $k$, $l$, и $h_{k,l}$ являются инвариантами при действии группы $G_0$ на множестве $X$, что следует из матричного соотношения $F = T^t H \bar{T}$ или в скалярной форме:

$$f_{pq} = h_{pq} - \sum_{\beta=1}^{\beta=p-1} h_{p-\beta,\,q} x_\beta - \sum_{\gamma=1}^{\gamma=q-1} h_{p,q-\gamma} \bar{x}_\gamma + \sum_{\beta=1}^{\beta=p-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=q-1} h_{p-\beta,q-\gamma} x_\beta \bar{x}_\gamma. \tag{1}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} f_{l,q} = 0, \quad q = k+2-l,\ k+3-l,\ \ldots,\ n, \\ f_{k+1-l,\,t} = 0, \quad t = n+2l-k,\ n+2l-k+1,\ \ldots,\ n. \end{cases} \tag{2}$$

Из этой системы можно достаточно легко найти следующие параметры:

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ \ldots,\ x_{n-l} = x_{n-l}^0,$$

при следующем ограничении:

$$k < \frac{n+3l-1}{2}. \tag{3}$$

Случаи $l = 1$ и $l = 2$ очевидны. Рассмотрим лишь $l = 3$ и $l = 4$.

**Лемма.** *Всякая теплицева матрица* $T = Tp(1,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1})$ *может быть однозначно представлена в виде:* $T = PQ = QP$ , *где*

$$P = Tp\,(1\,0\,\ldots\,0\,z_m\,z_{m+1}\,\ldots\,z_{n-1}),\ Q = Tp\,(1\,z_1\,\ldots\,z_{m-1}\,0\ldots\,0).$$

Формула (1) может быть переписана (с учетом $g_{p-\beta,q-\gamma}=0$) в следующем виде:

$$f_{pq}=g_{pq}-\sum_{\beta=n-l+1}^{\beta=p-1} g_{p-\beta,q}z_\beta-\sum_{\gamma=n-l+1}^{\gamma=q-1} g_{p,q-\gamma}\bar{z}_\gamma. \tag{4}$$

Формула (4) не содержит переменных $z_j$ степени два при всех $j\geqslant n-l+1$, однако $g_{pq}=g_{pq}(z_1,z_2,\ldots,z_{n-l})=g_{pq}(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_{n-l}^0)$.

**Случай** $l=3$. Прежде всего заметим, что каноническая форма $F$ содержит элементы $f_{i,j}$, которые удовлетворяют (2). Число $m$ единственным образом определяется из условий: $g_{k+1,1}=g_{k+2,1}=\ldots,=g_{m-1,1}=0$, но $g_{m,1}\neq 0$.

(3.1) Пусть число $m$ удовлетворяет двойному неравенству $k+1\leqslant m\leqslant n-2$, тогда мы потребуем, чтобы $f_{m,n-1}=0$, $f_{m,n}=0$, откуда однозначно найдем пару чисел $z_{n-2}=z_{n-2}^0$ и $z_{n-1}=z_{n-1}^0$ соответственно. И каноническая форма $F$ имеет два дополнительных нуля $f_{m,n-1}=0$, $f_{m,n}=0$. Здесь $St(F)=I$.

(3.2) Пусть $m=n-1$, тогда мы определим число $r$ следующим образом: $g_{k,2}=g_{k+1,2}=\ \ldots\ =g_{r-1,2}=0$, но $g_{r,2}\neq 0$. Если число $r$ удовлетворяет двойному неравенству $k\leqslant r\leqslant n-2$, то мы положим $f_{r,n}=0, f_{n-1,n}=0$ и найдем переменные $z_{n-2}=z_{n-2}^0$ и $z_{n-1}=z_{n-1}^0$ соответственно. И каноническая форма $F$ имеет два дополнительных нуля $f_{r,n}=0$, и $f_{n-1,n}=0$. Здесь $St(F)=I$.

(3.3) Пусть $m=r=n-1$, т.е. $g_{i,1}=g_{j,2}=0$ для $k+1\leqslant i\leqslant n-2$; $k\leqslant j\leqslant n-2$; но $g_{n-1,1}\neq 0$, $g_{n-1,2}\neq 0$. Положим $f_{n-1,n-1}=0$ и получим, что $z_{n-2}=at+b$, $t\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$, равенство же $f_{n-1,n}=0$ дает значение $z_{n-1}=ct+d$; $c,d\in\mathbf{C}$, $c\neq 0$. Может случиться, что $f_{n,n}(z_{n-2},z_{n-1})=const$, тогда в подобной ситуации каноническая форма имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n-1}=0$ и $f_{n-1,n}=0$. Здесь $St(F)=Tp(1,0,\ldots,at,ct)$, где $a\neq 0, t\in\mathbf{R}$. Если же $f_{n,n}(z_{n-2},z_{n-1})=ut+v\in\mathbf{R}$, $u\neq 0$, то $\exists!\,t_0$, удовлетворяющий соотношению $f_{n,n}=ut_0+v=0$. Тогда каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{n-1,n-1}=0$, $f_{n-1,n}=0$ и $f_{n,n}=0$. Здесь $St(F)=I$.

(3.4) Если $m=n-1$, $r=n$, то возникает ситуация, полностью аналогичная пункту (3.3).

(3.5) Пусть теперь параметр $m = n$, т.е. $g_{i1} = 0$, если $k+1 \leqslant i \leqslant n-1$, но $g_{n,1} \neq 0$. Если $r$ удовлетворяет двойному неравенству $k \leqslant r \leqslant n-2$, то мы положим последовательно $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и найдем соответственно $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at+b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. И каноническая форма $F$ имеет два дополнительных нуля $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, 0, at), a \neq 0, t \in \mathbf{R}$.

(3.6) Пусть $m = n$, $r = n-1$.

a) Если при этом, $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$,тогда $\exists! z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и такой, что имеет место $f_{n-1,n} = 0$. Равенство $f_{n,n} = 0$ дает $z_{n-1} = at+b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Тогда каноническая форма $F$ содержит два дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. При этом $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at), t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

b) Если же $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$, то $\exists!$ элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$ и такой, что $|f^0_{n-1,n}| = dist(0,\ Imf_{n-1,n})$, и $z_{n-2} = at+b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Равенство $f_{n,n} = 0$ приводит к следующему выражению $z_{n-1} = p\tau + qt + s$, $\tau$, $t \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$. Каноническая форма $F$ имеет дополнительно как один экстремальный элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0,\ Imf_{n-1,n})$, так и нулевой элемент $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1,\ 0, \ldots,\ 0, p\tau + qt,\ at)$. Заметим, что случай $m = r = n$ исключен, поскольку $det\ G \neq 0$. Пусть числа $m$ и $r$ удовлетворяют следующим условиям: $h_{k+1,1} = h_{k+2,1} = \ldots = h_{m-1,1} = 0$, $h_{m1} \neq 0$; $h_{k2} = h_{k+1,2} = \ldots = h_{r-1,2} = 0$, $h_{r2} \neq 0$.

**Случай** $l = 4$. Каноническая форма $F$ содержит такие $f_{i,j}$, которые удовлетворяют равенствам(2). Определим три натуральных $s, r$ и $m$ следующими соотношениями:

$$g_{k-1,3} = g_{k,3} = \ldots = g_{s-1,3} = 0, \text{ но } g_{s,3} \neq 0;\ k-1 \leqslant s \leqslant n;$$

$$g_{k,2} = g_{k+1,2} = \ldots = g_{r-1,2} = 0, \text{ но } g_{r,2} \neq 0;\ k \leqslant r \leqslant n;$$

$$g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots = g_{m-1,1} = 0, \text{ но } g_{m,1} \neq 0;\ k+1 \leqslant m \leqslant n;$$

(4.1) Пусть $m$ есть произвольное натуральное, удовлетворяющее двойному неравенству $k+1 \leqslant m \leqslant n-3$, тогда мы потребуем, чтобы $f_{m,n-2} = 0$, $f_{m,n-1} = 0$, и $f_{m,n} = 0$, что сразу приведет к решению $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. Поэтому каноническая форма $F$ содержит дополнительно три нуля $f_{m,n-2} = 0$, $f_{m,n-1} = 0$ и $f_{m,n} = 0$. В этом случае $St(F) = I$.

(4.2) Пусть элемент $m = n-2$ , т.е. $g_{j,1} = 0$ для всех $k+1 \leqslant j \leqslant n-3$, $g_{n-2,1} \neq 0$. Если для параметра $r$ выполняется двойное неравенство $k \leqslant r \leqslant n-3$, то, полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-2,n} = 0$, мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$ соответственно. И каноническая форма $F$ имеет дополнительно еще три нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.3) Пусть $m = n-2$ , $n-2 \leqslant r \leqslant n$, $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$, тогда, полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$, мы однозначно найдем тройку чисел $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$, . И каноническая форма $F$ получит три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.4) Пусть $m = n-2$ и $r$ – элементы, удовлетворяющие неравенствам $n-2 \leqslant r \leqslant n$, $n-2 \leqslant s \leqslant n$, тогда мы положим $f_{n-2,n-2} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$ и найдем тройку чисел $z_{n-3} = at+b$, $z_{n-2} = pt+q$ и $z_{n-1} = ut+v$, где $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если, далее,все три параметра $f_{n-1,n-1}$, $f_{n-1,n}$ и $f_{n,n}$ не зависят от $t \in \mathbf{R}$ , то каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{n-2,n-2} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, pt, ut)$. Если же, например, $f_{n-1,n}$ зависит от $t$ , то $\exists!\, t_0 \in \mathbf{R}$ такое, что $|f_{n-1,n}(t_0)| = dist(0, Im f_{n-1,n})$, и наличие экстремального элемента $f_{n-1,n}(t_0)$ служит четвертым дополнительным условием для вида канонической формы $F$. Здесь $St(F) = I$.

(4.5) Пусть $m = n-1$, а параметр $r$ удовлетворяет двойному неравенству $k \leqslant r \leqslant n-3$, тогда, полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы однозначно найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.6) Пусть $m = n-1$, $r = n-2$, а элемент $s$ удовлетворяет двойному неравенству $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$, тогда, полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы однозначно найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.7) Пусть $m = n-1$, $r = n-2$ и $s \geqslant n-2$. Если $|g_{1,n-1}| \neq |g_{n-2,2}|$, тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы найдем однозначно неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$. Если $|g_{n,n-1}| = |g_{n-2,2}|$, то, согласно одной из теорем Дополнения $\exists!\, f^0_{n-2,n-1}$ обладающий свойством $|f^0_{n-2,n-1}| = dist(0, Im f_{n-2,n-1})$ и, за счет этого, $z_{n-3} = at + b$, $a \neq 0$. Тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы найдем неизвестные: $z_{n-2} = pt + q$ и $z_{n-1} = ut + v$. Если оба элемента $f_{n-1,n-1}$ и $f_{n,n}$ не зависят от параметра $t \in \mathbf{R}$, тогда каноническая форма $F$ имеет два нуля $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ и еще один экстремальный элемент $f_{n-2,n-1} = f^0_{n-2,n-1}$, для которого $|f^0_{n-2,n-1}| = dist(0, Im f_{n-2,n-1})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, pt, ut)$, $a \neq 0$. Если, например, $f_{n-1,n-1}$ зависит от $t$, то $\exists t_0 \in \mathbf{R}, f_{n-1,n-1} = 0$. Это четвертое дополнительное условие для канонической формы $F$. Здесь $St(F) = I$.

(4.8) Пусть $m = n-1$, $r \geqslant n-1$. Полагая последовательно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = at + b$ и $z_{n-1} = ct + d$, где $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если элемент $f_{n,n}$ не зависит от параметра $t \in \mathbf{R}$, то каноническая форма $F$ имеет дополнительно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, ct)$, $a \neq 0$. Если же $f_{n,n}$ зависит от $t$, тогда $\exists! t_0 \in \mathbf{R}$ такое, что $f_{n,n} = 0$. Каноническая форма $F$ имеет четвертое дополнительное условие $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.9) Пусть $m = n$, $k \leqslant r \leqslant n-2$. Полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $fn, n = 0$, мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = kt + b$, $k \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Каноническая форма $F$ имеет дополнительно три нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, kt)$.

(4.10) Пусть $m = n$, $r = n-1$, $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$ и пусть $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$. Полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$, мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. И каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at)$. Если же $m = n$, $r = n-1$, $k-1 \leqslant$

$s \leqslant n-3$ и $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$, то, полагая $f_{s,n} = 0$, мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$ и по ( 1) $\exists!$ элемент $f^0_{n-1,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$, что приводит к значению $z_{n-2} = at+b, a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Требование $f_{n,n} = 0$ по ( 1) дает значение $z_{n-1} = \tau p + tq + r$, $p \neq 0, p \perp q$ и $t \in \mathbf{R}$. И каноническая форма $F$ имеет дополнительно два нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и, кроме того, содержит элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$, удовлетворяющий соотношению $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, p\tau + qt)$.

(4.11) Пусть, наконец, $m = n$, $r = n-1, s = n-2$.

a) Если $|g_{1,n}| \neq |g_{n-2,3}|$ и $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$, тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$, мы найдем переменные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at+b$, $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. И каноническая форма имеет дополнительно три нулевых элемента $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, 0, at)$.

b) Если $|g_{1,n}| \neq |g_{n-2,3}|$, $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$, тогда, полагая $f_{n-2,n} = 0$, мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, тогда $\exists! f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$ и $z_{n-2} = at+b$. Требование $f_{n,n} = 0$ по второй части теоремы 5 дает значение $z_{n-1} = \tau p + tq + r$, $p \neq 0$, $p \perp q$, $t \in \mathbf{R}$. И каноническая форма $F$ имеет дополнительно два нуля $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и, кроме того, элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, p\tau + qt)$.

c) Если $|g_{1,n}| = |g_{n-2,3}|, |g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$, тогда $\exists! f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$, обладающее свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$ и $z_{n-3} = at+b$, $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

c.1) Если $f_{n-1,n-1} = const$, тогда, полагая последовательно $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ по ( 1) мы получим $z_{n-2} = mt+n$ и по второй части Теоремы 5 $z_{n-1} = \tau p + tq + r$. И каноническая форма $F$ имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$, она содержит элемент $f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, mt, p\tau + qt)$.

c.2) Если $f_{n-1,n-1} = ut + v \in \mathbf{R}$, $u \neq 0$, тогда, очевидно, $\exists! t_0 \in \mathbf{R} : f_{n-1,n-1} = 0$. Полагая последовательно $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$, мы найдем неизвестные $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = p\tau + q$, $p \neq 0$, $\tau \in \mathbf{R}$. И каноническая форма $F$ имеет три дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и $f_{n-1,n-1} = 0$, и она содержит четвертый дополнительный элемент $f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1,\ 0,\ \ldots,\ p\tau)$.

d) Если $|g_{1,n}| = |g_{n-2,3}| = |g_{n-1,2}|$, тогда существует единственный элемент $f^0_{n-2,n}$ с $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$ и по ( 1) $z_{n-3} = pt + q$, $p \neq 0$, $p \perp q$, $t \in \mathbf{R}$.

d.1) Пусть $f_{n-1,n-1} = const$ и $f_{n-1,n} = -g_{1,n}z_{n-2} - g_{n-1,2}\bar{z}_{n-2} + tu + v$. Если векторы $u$ и $e^{i\varphi}$ ($\varphi = \frac{1}{2}(arg\ g_{1,n} + arg\, g_{n-1,2})$) линейно независимы, то по ( 1) существует единственный параметр $t_0$, обладающий свойством $f_{n-1,n} = 0$. Кроме того, $z_{n-2} = a\sigma + b$ ($a \neq 0$, $a \perp b$, $\sigma \in \mathbf{R}$). Требование $f_{n,n} = 0$ по ( 1) получим $z_{n-1} = \tau w + \sigma\tau + s$, $w \neq 0$, $\tau$, $\sigma \in \mathbf{R}$. Каноническая форма $F$ имеет дополнительно два нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и обладает третьим дополнительным элементом $f^0_{n-2,n}$, что $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, f_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1,\ 0,\ \ldots,\ \sigma a,\ \tau w + \sigma\tau)$.

Если $u = \lambda_0 e^{i\varphi}$, то по ( 1) существует единственное число $f^0_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n}(t = 0))$ и $z_{n-2} = \delta q + tm + l$, $q \neq 0$, $\delta$, $t \in \mathbf{R}$. Требование $f_{n,n} = 0$ по ( 1) получаем $z_{n-1} = a\sigma + bt + c\delta + d$, $a \neq 0$, $\sigma$, $t$, $\delta \in \mathbf{R}$. Каноническая форма $F$ имеет дополнительно один нуль $f_{n,n} = 0$, и она имеет два дополнительных элемента $f^0_{n-2,n}$ и $f^0_{n-1,n}$ с условиями $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$; $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n}(t = 0))$. Здесь $St(F) = Tp(1,\ 0\ \ldots,\ 0,\ pt,\ q\delta + mt,\ a\sigma + bt + c\delta)$.

d.2) Пусть теперь $f_{n-1,n-1} = ut + v \in \mathbf{R}$, $u \neq 0$, тогда существует единственное вещественное число $t = t_0$ и такое, что $f_{n-1,n-1} = 0$. Далее, существует единственный элемент $f^0_{n-1,n} \in Imf_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Кроме того, $z_{n-2} = p\tau + q$. Тогда, по ( 1), требование $f_{n,n} = 0$ дает нам $z_{n-1} = u\delta + v\tau + w$. Каноническая форма $F$ имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и два дополнительных элемента $f^0_{n-2,n}$ и $f^0_{n-1,n}$, обладающих свойствами $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$ ; $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь

$$St(F) = Tp(1,\ 0,\ \ldots,\ p\tau,\ u\sigma + v\tau).$$

Используя инварианты $n$, $k$, $l$, $m$, $r$ и $s$, нетрудно показать, что в списке канонических форм, приведенном выше, нет двух эквивалентных.

## Библиографический список

1. *Большаков Ю.И.* Некоторые свойства функции $y = ax + b\bar{x} + c$ // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2004. Вып. 4. С. 7–11.

## $p$-группы с пятью нелинейными неприводимыми характерами

*Е.И. Чанков*

Нелинейным неприводимым характером группы называется ее неприводимый характер степени больше 1. Пусть $n(G)$ – число нелинейных неприводимых характеров группы $G$. Конечные группы с заданным числом $n(G)$ начал изучать Г. Зейц. Конечные группы с $n(G) \leqslant 4$ и ненильпотентные группы с $n(G) = 5$ были классифицированы Я.Г. Берковичем [1, 2]. В докладе будет изложен результат, касающийся нильпотентных групп $G$ с $n(G) = 5$. Вопрос о нильпотентных группах с заданным числом неприводимых характеров сводится к случаю $p$-групп. Пусть $z_i = |\{x \in G| \ |G : C_G(x)| = p^i\}|$, $(i = 0, 1, ...)$; $Irr\,(G)$ – множество неприводимых характеров группы $G$, а $Lin\,(G) \subset Irr\,(G)$ – линейные характеры группы $G$ (т.е. характеры степени 1). $cd\,G = \{1, p^{c_1}, ..., p^{c_n}\}$ – множество степеней неприводимых характеров, $a_i$ – количество характеров степени $p^{c_i}$. (Обозначения взяты из статьи [1]). $e$ – нейтральный элемент группы.

Основной результат работы следующая

**Теорема.** *Пусть* $n(G) = 5$, *тогда* $|G| = 2^6$, $|G'| = 2^3$, $cd\,G = \{1, 2, 4\}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ *и* $(z_0, z_1, z_2) = (2, 2, 20)$.

Примером группы $G$ с $n(G) = 5$ служит группа вида

$$G = \langle a, b, c \rangle$$

с соотношениями

$$a^4 = b^4 = c^4 = e, \ [a, b] = e$$
$$c^{-1}ac = ab$$
$$c^{-1}bc = a^2b$$

Докажем предварительно некоторые вспомогательные леммы.

**Утверждение.** *Пусть $G$ – $p$-группа с $n(G) = 5$, тогда $p = 2$, $|G| = 2^6$, $|G'| = 2^3$ и*

$$(z_0, z_1, z_2) \in \{(4,4,0); \ (4,0,12); \ (2,6,8); \ (2,2,20)\}.$$

**Доказательство.** Так как $n(G)$ нечетно, то $p = 2$ и $|G'| \neq 2$. Показатель степени коммутанта не может быть четным числом, потому что $5 \not\equiv 0(\mod 3)$. Из [1] известно, что если $H$ – 2-группа и $n(H) \leqslant 4$, то $|H'| \leqslant 2^3$, значит $|G'| = 2^3$. Пусть $|G| = 2^{2k+1}$, тогда

$$2^{2(k-1)} + \sum_{\chi \in Irr(G) \setminus Lin(G)} \chi^2(e) = 2^{2k+1},$$

возьмем равенство по модулю 3: $1 + n(G) \equiv 2(\mod 3)$, т.е. $0 \equiv 2(\mod 3)$, приходим к противоречию.

Пусть $L \leqslant Z(G) \cap G'$ такая, что $|L| = 2$. $\overline{G} = G/L$, $|\overline{G}'| = 2^2$, следовательно, $n(\overline{G}) = 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)$, т.е. $n(\overline{G}) = 3$. Из [1] получаем, что $|\overline{G}| = 2^5$. Имеем $|G| = 2^6$ и $|G'| = 2^3$. Для нахождения $z_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ составляем систему:

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 2^6; \\ z_0 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{8} = 2^3 + 5. \end{cases}$$

Получаем $7z_0 + 3z_1 + z_2 = 40$. Пусть $z_0 = 4 \Rightarrow 3z_1 + z_2 = 12$, тогда $(z_1, z_2) \in \{(4,0); \ (0,12)\}$. Пусть $z_0 = 2 \Rightarrow 3z_1 + z_2 = 26$, тогда $(z_1, z_2) \in \{(6,8); \ (2,20)\}$.

Разберем теперь каждый из четырех случаев в отдельности.

**Лемма 1.** *Группы $G$ с $(z_0, z_1, z_2) = (4,4,0)$ не существует.*

**Доказательство.** Возьмем $g \in G \ : \ |C_G(g)| = 2^5$. Обозначим $H = C_G(g)$. $|Z(H)| = 8$, но, с другой стороны, для любого $x \in G \setminus Z(H)$ $|C_G(x)| = 8$ и, следовательно, для любого $x \in H \setminus Z(H)$ $|C_H(x)| \leqslant 8$. Приходим к противоречию.

**Лемма 2.** *Пусть $P$ – 2-группа порядка 32 и $|Z(P)| = 4$, тогда:*
1. $n(P) = 6$ $|P'| = 2^2$ и $(z_0, z_1, z_2) = (4, 12, 16)$;
2. $\Phi(P) \subset P'Z(P)$ и $exp\, P \leqslant 8$.

*Кроме того, группа $P$ обладает абелевой подгрупой порядка* 16.

**Доказательство.** Так как $|P : Z(P)| = 2^3$, то для любого $\chi \in Irr(P)$ $\chi^2(e) \leqslant 2$. Поэтому $n(P) \in \{4, 6, 7\}$, но при $n(P) = 4$ $|Z(P)| = 8$, а при $n(P) = 7$ $|P'| = 2^3$, т.е. $P$ – группа максимального класса. Значит, $|P'| = 2^2$. Из системы двух уравнений $z_0 + z_1 + z_2 = 2^5$ и $z_0 + z_1/2 + z_2/4 = 2^3 + 6$ (в которой по условию $z_0 = 4$) находим $z_1$ и $z_2$. Рассмотрим следующие два возможных случая:

*i)* $Z(P) = P'$, тогда $P/Z(P) \simeq E_8 \Rightarrow \Phi(P) = Z(P)$ и $exp\, P \leqslant 8$.

*ii)* $Z(P) \neq P'$, тогда $\overline{P} = P/Z(P) \simeq D_8$, следовательно $\Phi(\overline{P}) = \overline{P}'$. Поэтому $\Phi(P) \subset P'Z(P)$, и если $\Phi(P) = P'$, то $exp\, P = 8$, в случае $\Phi(P) = P'Z(P)$ $\Phi(P) \neq Z_8$, т.к. $P' \neq Z(P)$ и значит $exp\, P \leqslant 8$.

Пусть элемент $g \in P$ такой, что $|C_P(g)| = 2^4$, тогда $C_P(g)$ – абелева группа, поскольку порядок ее центра больше четырех.

**Лемма 3.** *Группы $G$ с $(z_0, z_1, z_2) = (4, 0, 12)$ не существует.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу $H \leqslant G$. $|H| = 32$ и $|Z(H)| = 4$. По лемме 2 в $H$ есть абелева подгруппа порядка 16, а такая подгруппа в $G$ единственна: $R = \{s \in G \mid \ |C_G(s)| \geqslant 16\}$, что видно из строения группы $G$. Поэтому $\Phi(G) = R$. Далее $Z(H) = Z(G) \leqslant G'$ и $H' \leqslant G'$, а так как $\Phi(H) \subset H'Z(H)$, тогда $\mho_1(H) = \Phi(H) \leqslant G'$.

В силу того, что $H$ – произвольная максимальная подгруппа, то $\mho_1(G) \leqslant G'$, т.е. $|\mho_1(G)| = 8$. Но $\Phi(G) = \mho_1(G)$, пришли к противоречию.

**Лемма 4.** *Группы $G$ с $(z_0, z_1, z_2) = (2, 6, 8)$ не существует.*

**Доказательство.** Предположим, что $G'$ содержит класс сопряженных элементов длины 4. Пусть элемент $s \in G \setminus G'$ такой, что $|C_G(s)| = 2^5$, тогда $|Z(C_G(s))| = 4$, поэтому $< s, x\rangle \trianglelefteq G$, где $x \in Z(G)$ и $| < s, x\rangle| = 4$. Так как $s \notin G'$, то $|Lin(G/ < s, x\rangle)| \leqslant 4$. Поэтому $G/ < s, x\rangle$ – группа максимального класса, но тогда

$G/ < s, x\rangle$ имеет три неприводимых характера степени 2, тогда как в $G$ их только два, приходим к противоречию.

Значит, $G$ состоит из центра и трех классов длины 2, пусть $h_1, h_2, h_3$ – представители этих классов. Обозначим $H_i = C_G(h_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ $|H_i| = 2^5$ и $|Z(H_i)| = 4$. По лемме 2 группы $H_i$ содержат абелеву подгруппу порядка 16, а в $G$ такая группа единственна, поэтому $|\bigcap_{i=1}^3 H_i| = 16$, следовательно, $G = \bigcup_{i=1}^3 H_i$, и так как $exp\, H_i \leqslant 8 \Rightarrow exp\, G \leqslant 8$.

Если $|\Phi(G)| = 16$, значит, существуют только три указанные максимальные подгруппы, но опять $Z(H_i) \leqslant G'$ и $H_i \leqslant G'$, тогда $\mho_1(H_i) \leqslant G'$, следовательно, $\mho_1(G) \leqslant G'$, и приходим к противоречию.

Поэтому $|\Phi(G)| = 8$, т.е. $\Phi(G) = G' \Rightarrow d(G) = 3$. Рассмотрим группу $\overline{G} = G/Z(G)$, $|\overline{G}| = 2^5$ $n(\overline{G}) = 3$, и т.к. $Z(G) < G'$, то $d(\overline{G}) = 3$, значит, $\Phi(\overline{G}) = \overline{G}'$. Ввиду того, что $|Z(\overline{G})| = 2 \Rightarrow \overline{G}' \simeq Z_4$, поэтому $exp\, \overline{G} = 8$. Отсюда следует, что в $G$ существуют такие элементы $s$, что $s^4 \notin Z(G)$, т.е., иными словами, $\mho_2(G) \neq Z(G)$. Известно, что $exp\, G \leqslant 8$, поэтому $G' \simeq Z_4 \times Z_2$. $\mho_1(G) = G'$ и $\mho_2(G) \subset \mho_1(G')$, а так как $d(G') = 2$, то $|\mho_1(G')| = 2$ и, следовательно, $\mho_2(G) = \mho_1(G')$. $\mho_2(G)$ – нормальная подгруппа в $G$, но $G$ содержит только одну нормальную подгруппу порядка 2 – это $Z(G)$, приходим к противоречию.

Наконец, последний случай группы $G$ с $(z_0, z_1, z_2) = (2, 2, 20)$.

Возьмем элемент $g \in G$ : $|C_G(g)| = 2^5$. Обозначим $H_1 = C_G(g)$, тогда $|Z(H_1)| = 4$. Из леммы 2 $(z_0, z_1, z_2)_{H_1} = (4, 12, 16)$ и существует абелева группа $R = \{s \in H_1 \mid |C_{H_1}(s) \geqslant 16\}$. Поскольку $H_1 \setminus R$ состоит из классов сопряженных элементов в $G$ длины 4 или 8, то $R \triangleleft G$.

Предположим, что $\Phi(G) \leqslant R$; пусть $v \in G \setminus H_1$ и рассмотрим группу $V = \langle R, v\rangle$, т.к. $v^2 \in \Phi(G) \leqslant R$, то $|V| = 32$, а также $|Z(V)| = 2$. Так как $z_0 + z_1 + z_2 = 24 < 32$, то $|V'| > 2$, поэтому для группы $V$ имеем две возможности $n(V) = 7$ или $n(V) = 3$. Если $n(V) = 7 \Rightarrow V$ – группа максимального класса. $R$ – максимальная абелева подгруппа в $V$, следовательно, $R \simeq Z_{16}$, тогда приходим к противоречию с тем, что $exp\, H_1 \leqslant 8$. Если $n(V) = 3$, тогда существует $\chi \in Irr(V)$ такой, что $\chi(e) = 4$, в то время как $|V : R| = 2$, приходим к противоречию.

Значит, $\Phi(G) \nleq R$, поэтому $|\Phi(G)| = 16$ и $\Phi(G) \cap R = G'$. $\Phi(H_1) \leqslant G'$, следовательно, существует такой элемент $c \in G$, что $c^2 \notin R$. $R$ нормальна в $G$, поэтому действие сопряжением $c$ на $R$ задается некоторым автоморфизмом, причем должно быть, что $G = \langle R, c\rangle$. Пусть $R = \langle a, b \,|\, [a,b] = a^4 = b^4 = e\rangle$, т.к. $d(G) = 2$, то, например $c^{-1}ac = ab$, или же $c^{-1}ac = ab^3$. Зададим действие $c$ следующим образом:

$$c^{-1}ac = ab \qquad c^{-1}bc = a^2b$$

Пусть $R$ записана аддитивно: $R = \langle a, b \,|\, 4a = 4b = 0\rangle$, тогда упомянутое действие $c$ на $R$ задается матрицей

$$[c] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем центр группы $G$ (т.е. множество элементов группы $R$, остающихся неподвижными под действием $c$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

Находим, что $l = 0$ и $m \in \{0, 2\}$, следовательно, $Z(G) = \{e, b^2\}$. $[c]^4$ – единичная матрица, тогда $|G| = 2^6$. Найдем неподвижные элементы относительно $c^2$.

$$[c]^2 \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

Получаем $l \in \{0, 2\}$ и $m \in \{0, 2\}$, поэтому в $G$ только один класс сопряженных элементов длины 2 – $(a^2)^G$ и $S = \langle a^2, b^2\rangle \lhd G$. Рассмотрим фактор-группы $\overline{\overline{G}} = G/S$:

$$\overline{\overline{G}} = \langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\rangle,$$
$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = \overline{c}^4 = e,$$
$$\overline{c}^{-1}\overline{a}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} \quad \overline{c}^{-1}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}.$$

($\overline{\overline{G}}$ – группа Миллера-Морено с двумя нелинейными неприводимыми характерами степени 2) и $\overline{G} = G/Z(G)$:

$$\overline{G} = \langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle,$$
$$\overline{a}^4 = \overline{b}^2 = \overline{c}^4 = e,$$
$$\overline{c}^{-1}\overline{a}\overline{c} = \overline{a}\overline{b} \quad \overline{c}^{-1}\overline{b}\overline{c} = \overline{a}^2\overline{b}.$$

(на эту группу мне указал Л.С. Казарин как пример группы порядка 32 с двумя порождающими и с тремя нелинейными неприводимыми характерами). $|Z(\overline{G})| = 2$ и $\overline{G}/Z(\overline{G}) \simeq \overline{\overline{G}}$; пусть $\chi$ – точный характер группы $\overline{G}$, покажем, что $\chi(e) = 4$, тем самым установим, что $n(\overline{G}) = 3$. Группа $\langle \overline{a}^2, \overline{b}, \overline{c}^2 \rangle \simeq E_8 \lhd \overline{G}$.($E_8$ – абелева группа экспоненты 2 порядка 8). Предположим, что точное представление $\rho$, отвечающее характеру $\chi$, имеет степень 2, но тогда для любого $x \in E_8$

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\rho(x)$ может принимать только четыре различных значения, тогда как в $E_8$ восемь элементов, приходим к противоречию с тем, что $\rho$ – точное. Получаем $n(\overline{G}) = 3$ и $\operatorname{cd} G = \{1, 2, 4\}$.

Вернемся к группе $G$, и в ней есть подгруппа $\langle a^2, b^2, c^2 \mid [a^2, b^2] = [a^2, c^2] = [b^2, c^2] = a^4 = b^4 = c^4 = e\rangle$, изоморфная $E_8$, поэтому любой точный характер имеет степень 4. Пусть $\Phi$ – множество неприводимых характеров $G$, не содержащих в своем ядре $Z(G)$, тогда из равенства

$$\sum_{\chi \in \Phi} |\chi(e)|^2 = |G| - |\overline{G}| = 32$$

получаем $|\Phi| = 2$. Таким образом, $n(G) = 5$, и теорема доказана.

## Библиографический список

1. *Беркович Я.Г.* Конечные группы с небольшим числом нелинейных неприводимых характеров // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1990. С. 97–107.

2. *Беркович Я.Г.* Конечные группы с небольшим числом нелинейных неприводимых характеров. II // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль, 1991. С. 145–156.

## О некоторых вопросах аксонометрии в $\mathbb{P}^n$

*Л.Б. Медведева*

Тема данного исследования может быть отнесена к теоретическим основам многомерной начертательной геометрии. Более точно, в работе получены некоторые обобщения теорем центральной аксонометрии.

Проблемы центральной аксонометрии аналогичны задачам параллельной аксонометрии, решение которых дается теоремой Польке-Шварца и ее многочисленными обобщениями [2–8].

Основная задача состоит в следующем [1].

Пусть в $\mathbb{P}^n$ с введенной в нем метрикой заданы два проективных репера: невырожденный $n$-мерный репер – *оригинал* и вырожденный, расположенный в $k$-мерной плоскости, – *образец*. Их задание определяет отображение пространства $\mathbb{P}^n$ на $k$-плоскость $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$. Возникают вопросы:

1. Можно ли найти такую $k$-плоскость проекций и $(n-k-1)$-мерный центр, чтобы при центральном проектировании оригинала из этого центра на плоскость проекций получить изображение, связанное с образцом преобразованием наперед заданного типа (проективным, аффинным,...)?

2. Какого максимального "сходства"между образцом и изображением можно достичь, если не налагать никаких условий на соответствие, связывающее изображение и образец?

3. Каким условиям должно удовлетворять соответствие, определяемое заданными реперами, чтобы при центральном проектировании получить изображение, конгруэнтное (метрически подобное) образцу?

Как известно, за систему координат (репер) в $\mathbb{P}^n$ можно принять упорядоченную систему $n+2$ точек общего положения или дезаргову конфигурацию – фигуру, состоящую из точки $O$, $n$ прямых, проходящих через точку $O$, и двух точек $A_i$ и $B_i$ (отличных от $O$) на каждой из них.

Исторически первой теоремой центральной аксонометрии была теорема Круппа. В работе [6] она сформулирована следующим образом.

Если в $\mathbb{P}^3$ даны произвольная дезаргова конфигурация $D$, то всегда можно выбрать центр и плоскость проекций так, чтобы проекцией конфигурации $D$ служила плоская конфигурация, проективно эквивалентная плоской конфигурации $D^0$, при этом центр проекций определяется однозначно, а за плоскость проекций может быть взята любая плоскость, не проходящая через центр.

Большинство обобщений этой теоремы на $\mathbb{P}^n$ касается случая, когда системы координат заданы в виде дезарговых конфигураций.

Задачу о возможности проектирования репера, состоящего из $n+2$ точек пространства $\mathbb{P}^n$, на гиперплоскость в изображение, проективное образцу (системе $n{+}2$ точек общего пложения в $\mathbb{P}^{n-1}$), впервые поставил и решил Н.М. Бескин [3]. Полученный им результат не совпадает с тем утверждением теоремы Круппа, которое касается центрального проектирования дезарговой конфигурации на гиперплоскость. Если при центральном проектировании дезарговой конфигурации пространства $\mathbb{P}^n$ требование проективности изображения и образца однозначно определяет $(n-k-1)$-мерный центр проектирования, то при проектировании репера из $n+2$ точек на гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ в систему точек, проективную образцу, множество точек-центров проектирования составляет в $\mathbb{P}^n$ нормальную рациональную кривую степени $n$, проходящую через все точки оригинала. Гиперплоскость проекций при этом, как и в случае утверждения Круппа, может быть выбрана произвольно, лишь бы она не проходила через центр проекций.

Случай проектирования репера из $n+2$ точек на $\mathbb{P}^k$ $(k < n-1)$ в изображение, проективное образцу, нигде не обсуждался.

В этом направлении нами получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Для любого натурального числа $k$ ($k < n$) существует $(n-k)$-параметрическое множество $(n-k-1)$-мерных плоскостей, каждая плоскость которого, за некоторым исключением, может служить центром проектирования $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, при котором проективный репер $A_i$ $(i = \overline{1, n+2})$ пространства $\mathbb{P}^n$ отображается в систему точек $A'_i$ $(i = \overline{1, n+2})$, проективно эквивалентную образцу (системе $n+2$ точек $T_i$ общего положения в $\mathbb{P}^k$). Плоскостью проекций может служить любая $k$-мерная плоскость, не имеющая с центром проектирования общих точек, в том числе и любая из $C_{n+2}^{k+1}$ $k$-плоскостей оригинала* [9, 10].

Следует отметить, что если в случае $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ доказательство удалось получить конструктивно с использованием координатного метода, то в случае $k > \left[\frac{n}{2}\right]$ при доказательстве использовались теоремы о пересечении циклов Шуберта на грассманиане $G(n-k, n+1)$.

Доказанный результат ставил вопрос о структуре многообразия центров проектирований, при которых репер, состоящий в $\mathbb{P}^n$ из $n+2$ точек общего положения, переходит в изображение, проективное образцу. При ответе на этот вопрос искомое многообразие изучено при $k = n-1, n-2, n-3$ [11–13].

Общий результат дает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Множество $(m-1)$-мерных плоскостей, служащих центрами проектирований пространства $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-m}$ $(m < n)$, которые отображают проективный репер $A_i$ $(i = \overline{1, n+2})$ в систему $n+2$ точек $A'_i \in \mathbb{P}^{n-m}$, проективно эквивалентную образцу $T_i \in \mathbb{P}^{n-m}$, является:*

1) *многообразием, параметризуемым точками $m$-плоскости, при $n = 2m$;*

2) *семейством подмногообразий $\sigma_{n-m}^{m+1}$ на грассманиане $G(m, n+1)$, параметризуемым точками $(n-m)$-мерной плоскости, если $0 < n-m \leqslant m-1$ $(n \leqslant 2m-1)$;*

3) *многообразием, параметризуемым точками рационального многообразия $F_m^{m+1} \subset \mathbb{P}^{m+1}$ степени $m+1$ при $n = 2m+1$;*

4) *при $n > 2m + 1$ многообразием, параметризуемым точками многообразия, которое является пересечением $n - 2m$ гиперконусов $K_i \subset \mathbb{P}^{n-m}$ размерности $n - m - 1$: направляющими этих конусов служат поверхности $F_{im}^{m+1} \subset \mathbb{P}_i^{m+1}$, а вершинами являются специальным образом расположенные в $\mathbb{P}^{n-m}$ $(n - 2m - 2)$-мерные плоскости.*

**Доказательство.** Пусть в $\mathbb{P}^n$ заданы проективный репер $A_i$ $(i = \overline{1, n+2})$, а в некоторой $(n - m)$-мерной плоскости ${}^{\circ}\mathbb{P}^{n-m}$ – образец, система из $n + 2$ точек $T_i$ $(i = \overline{1, n+2})$, никакие $n - m + 1$ из которых не лежат в одной $(n - m - 1)$-мерной плоскости. В качестве $(n - m)$-плоскости проекций возьмем $\mathbb{P}^{n-m} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{n-m}, A_{n-m+1}\rangle$. Тогда при центральном проектировании $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-m}$ $f(A_j) = A_j$ для $j = \overline{1, n-m+1}$. Если теперь за проекцию точки $A_{n-m+2}$ взять какую-нибудь точку $A'_{n-m+2} \in \mathbb{P}^{n-m}$ $(A'_{n-m+2} \neq A_j)$, то проекции $A'_j \in \mathbb{P}^{n-m}$ точек $A_j$ $(j = \overline{n-m+3, n+2})$ однозначно определяются в силу проективной эквивалентности изображения $A'_i$ и образца $T_i$ $(i = \overline{1, n+2})$.

Центр проектирования $f$ должен пересекать прямые $\langle A_j A'_j\rangle$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ и не иметь с $\mathbb{P}^{n-m}$ общих точек. Множество $(m-1)$-мерных плоскостей, пересекающих в $\mathbb{P}^n$ $m+1$ прямые, представляется на грассманиане $G(m, n+1)$ $(m+1)$-кратным пересечением циклов Шуберта $\sigma_{n-m}$, то есть многообразием $\sigma_{n-m}^{m+1}$. Последнее непусто, если $(n - m)(m + 1) \leqslant m(n - m + 1)$, то есть если $n \leqslant 2m$.

Заметим, что при $n = 2m$ $\sigma_{n-m}^{m+1} = \sigma_m^{m+1} = \sigma_{m+1,\ldots,m+1}$ (индекс $m + 1$ повторяется $m$ раз). Это говорит о том, что выбор точки $A'_{n-m+2} = A'_{m+2} \in \mathbb{P}^m$ – проекции точки $A_{n-m+2}$ при отображении $f : \mathbb{P}^{2m} \to \mathbb{P}^m$ однозначно определяет центр проектирования $f$, и следовательно, в этом случае многообразие искомых центров проектирования параметризуется точками $m$-мерной плоскости.

Если $n < 2m$, то точка $A'_{n-m+2}$, взятая в $\mathbb{P}^{n-m}$, определяет уже не единственный $(m - 1)$-мерный центр проектирования, а многообразие центров проектирования, и таких многообразий будет $(n - m)$-параметрическое множество.

Если $n \geqslant 2m+1$,то многообразие $\sigma^{m+1}_{n-m}$ пусто, то есть не существует $(m-1)$-плоскостей, пересекающих прямые $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$. Отсюда следует, что точку $A'_{n-m+2}$ в $\mathbb{P}^{n-m}$ выбрать произвольно нельзя. Ее необходимо взять так, чтобы линии связи $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ имели хотя бы одну общую $(m-1)$-мерную секущую плоскость.

В [10] доказано, что если точка $A'_{n-m+2} \in \mathbb{P}^{n-m}$ выбрана так, что $m$-плоскость

$$\tilde{\mathbb{P}}^m = \langle A'_{n-m+2}, A'_{n-m+3}, \dots, A'_{n+1}\rangle$$

содержит точку $L = \mathbb{P}^{n-m} \cap \mathbb{P}^m$, $\mathbb{P}^m = \langle A_{n-m+2}, \dots, A_{n+2}\rangle$, то линии связи $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ имеют конечное число общих секущих плоскостей.

Для ответа на вопрос, какое множество описывает в этом случае точка $A'_{n-m+2}$, а значит и многообразие $m$-плоскостей $\tilde{\mathbb{P}}^m$, найдем условия, которым удовлетворяют координаты точки $A'_{n-m+2}$.

Рассмотрим сначала решение задачи при $n = 2m+1$. За плоскость проекций возьмем плоскость $\mathbb{P}^{m+1} = \langle A_1, A_2, \dots, A_{m+2}\rangle$:

$$x_{m+3} = x_{m+4} = \ldots = x_{2m+2} = 0.$$

Будем считать, что в репере пространства ${}^0\mathbb{P}^{m+1}$, состоящем из точек $T_i$ $(i = \overline{1, m+3})$, координаты точек $T_j$ $(j = \overline{m+4, 2m+3})$ равны соответственно $(\alpha_{j\,1} : \alpha_{j\,2} : \ldots : \alpha_{j\,m+2})$. Теперь можно найти формулы проектирования $f : \mathbb{P}^{2m+1} \to \mathbb{P}^{m+1}$, при котором

$$\begin{array}{ll} f(A_i) = A_i, & \text{если } i = \overline{1, m+2};\\ f(A_{m+3}) = A'_{m+3}, & \text{где } A'_{m+3}(a_1 : a_2 : \ldots : a_{m+2} : 0 : \ldots 0);\\ f(A_j) = A'_j, & \text{если } j = \overline{m+4, 2m+3}. \end{array}$$

Заметим, что здесь координаты точек $A'_j$ однозначно определяются требованием проективной эквивалентности изображения $A'_i$ и образца $T_i$ $(i = \overline{1, 2m+3})$:

$$A'_j(a_1\alpha_{j\,1} : a_2\alpha_{j\,2} : \ldots : a_{m+2}\alpha_{j\,m+2}).$$

Матрица проектирования $f$ имеет вид

$$A_j = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \dots & 0 & \rho_{m+3}a_1 & \rho_{m+4}a_1\alpha_{m+4\,1} & \dots & \rho_{2m+2}a_1\alpha_{2m+2\,1} \\ 0 & \rho & \dots & 0 & \rho_{m+3}a_2 & \rho_{m+4}a_2\alpha_{m+4\,2} & \dots & \rho_{2m+2}a_2\alpha_{2m+2\,2} \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho & \rho_{m+3}a_{m+2} & \rho_{m+4}a_{m+2}\alpha_{m+4\,m+2} & \dots & \rho_{2m+2}a_{m+2}\alpha_{2m+2\,m+2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \qquad (1)$$

Условие $f(A_{2m+3}) = A'_{2m+3}$ приводит к системе

$$\begin{gathered} \rho_{2m+3}a_i\alpha_{2m+3\,i} = \rho + \rho_{m+3}a_i + \rho_{m+4}a_i\alpha_{m+4\,i} + \dots + \\ + \rho_{2m+2}a_i\alpha_{2m+2\,i}, \quad i = \overline{1, m+2}. \end{gathered} \qquad (2)$$

При заданных $a_i$ эта система содержит $m+2$ уравнения с $m+2$ переменными $\rho, \rho_{m+3}, \dots, \rho_{2m+3}$, которые не могут принимать нулевые значения. Это значит, что определитель системы (2) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1\alpha_{m+4\,1} & \dots & a_1\alpha_{2m+2\,1} & -a_1\alpha_{2m+3\,1} \\ 1 & a_2 & a_2\alpha_{m+4\,2} & \dots & a_2\alpha_{2m+2\,2} & -a_2\alpha_{2m+3\,2} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m+2} & a_{m+2}\alpha_{m+4\,m+2} & \dots & a_{m+2}\alpha_{2m+2\,m+2} & -a_{m+2}\alpha_{2m+3\,m+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Разложение определителя по первому столбцу и введение соответствующих обозначений приводит к уравнению

$$\begin{gathered} A_1a_2a_3\dots a_{m+2} + A_2a_1a_3\dots a_{m+2} + \dots + \\ + A_{m+1}a_1a_2\dots a_{m+2} + A_{m+2}a_1a_2\dots a_{m+1} = 0, \end{gathered} \qquad (4)$$

которое определяет в $\mathbb{P}^{m+1}$ гиперповерхность степени $m+1$; обозначим ее через $F_m^{m+1}$.

Условие (3) является необходимым и достаточным условием принадлежности точек

$$(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0), A'_{m+3}, A'_{m+4}, \dots, A'_{2m+3}$$

одной $m$-плоскости, принадлежащей плоскости проекций $\mathbb{P}^{m+1}$. Оно также означает, что точка $A'_{m+3} \in \mathbb{P}^{m+1}$ не может быть выбрана произвольно: она должна быть взята на гиперповерхности $F_m^{m+1}$.

Нетрудно увидеть, что выбор точки $A'_{m+3} \in F_m^{m+1}$ однозначно определяет центр проектирования $f : \mathbb{P}^{2m+1} \to \mathbb{P}^{m+1}$. Это означает, что множество $(m-1)$-мерных центров, из которых репер $A_i$ проектируется в систему из $2m+3$ точек, проективную образцу $T_i$ $(i = \overline{1, 2m+3})$, параметризуется точками многообразия $F_m^{m+1}$.

Рассмотрим некоторые свойства этого многообразия.

1. Многообразие $F_m^{m+1}$ однозначно определяется точками образца; точки $A_i$ $(i = \overline{1, m+2})$ лежат на $F_m^{m+1}$ и являются на нем особыми кратности $m$.

2. Многообразие $F_m^{m+1}$ проходит через точку $I = (\underbrace{1 : 1 : \ldots : 1}_{m+2} : 0\ldots : 0)$ и касается в ней $m$-мерной плоскости $\langle K_{m+4}, K_{m+5}, \ldots, K_{2m+5}, I\rangle$, где $K_j$ имеют в репере пространства $\mathbb{P}^{m+1}$, состоящем из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{m+2}, I$, те же координаты, что и точки $T_j$ $(j = \overline{m+4, 2m+3})$: $K_j(\alpha_{j\,1} : \alpha_{j\,2} : \ldots : \alpha_{j\,m+2})$.

3. Многообразие $F_m^{m+1}$ является рациональным.

Для доказательства свойства 1 достаточно убедиться, что все частные производные до порядка $m$ включительно от левой части уравнения (4) обращаются в ноль в точках $A_i$, но существуют производные порядка $m+1$, отличные от нуля в соответствующей точке.

Для доказательства свойства 2 необходимо написать уравнение касательной гиперплоскости к $F_m^{m+1}$ в точке $I$.

Для доказательства свойства 3 запишем уравнение (4) в виде:

$$\begin{vmatrix} A_1a_2 & -A_3a_4 & A_4a_2 & -A_5a_2 & \ldots & (-1)^{m-1}A_{m+1}a_2 & (-1)^m A_2a_1 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m+1} & a_1 \\ (-1)^{m+1}a_{m+2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{A_{m+2}}{A_1}a_{m+1} & a_{m+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений относительно переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ с матрицей, определитель которой выписан в (5).

Приняв переменные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ за координаты точки в пространстве $\mathbb{P}^m$ и решив относительно них систему, получим рациональное отображение многообразия $F_m^{m+1}$ в $\mathbb{P}^m$. Формулы обратного к нему отображения получим, решив систему относительно $a_i$ $(i = \overline{1, m+2})$. Обратное отображение будет также рациональным, поэтому многообразие $F_m^{m+1}$ бирационально изоморфно $\mathbb{P}^m$ и, следовательно, является рациональным.

Докажем теперь теорему 2 при $n = 2m+k$, $k > 1$. В этом случае $n - m = m + k$, и мы имеем проектирование $f : \mathbb{P}^{2m+k} \to \mathbb{P}^{m+k}$. Пусть

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{m+k} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{m+k+1}\rangle : x_{m+k+2} = x_{m+k+3} = \ldots = \\ = x_{2m+k+1} = 0.\end{aligned}$$

По условию теоремы $f(A_i) = A_i$ для $i = \overline{1, m+k+1}$, $f(A_{m+k+2}) = A'_{m+k+2}(a_1 : a_2 : \ldots : a_{m+k+1} : 0 : \ldots : 0)$ и $f(A_j) = A'_j$ для $j = \overline{m+k+3, 2m+k+2}$, при этом координаты точек $A'_j$ определяются, как и ранее, требованием проективной эквивалентности изображения и образца:

$$A'_j(a_1\alpha_{j\,1} : a_2\alpha_{j\,2} : \ldots : a_{m+k+1}\alpha_{j\,m+k+1} : 0 \ldots : 0).$$

В силу сказанного, матрица проектирования $f$ в этом случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & \ldots & 0 & \rho_{m+k+2}a_1 & \rho_{m+k+3}a_1\alpha_{m+k+3\,1} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_1\alpha_{2m+k+1\,1} \\ 0 & \rho & \ldots & 0 & \rho_{m+k+2}a_2 & \rho_{m+k+3}a_2\alpha_{m+k+3\,2} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_2\alpha_{2m+k+1\,2} \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \rho & \rho_{m+k+2}a_{m+k+1} & \rho_{m+k+3}a_{m+k+1}\alpha_{m+k+3\,m+k+1} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_{m+k+1}\alpha_{2m+k+1\,m+k+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Так как $f(A_{2m+k+2}) = A'_{2m+k+2}$, то имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} &\rho + \rho_{m+k+2} a_i + \rho_{m+k+3} a_i \alpha_{m+k+3\, i} + \ldots + \\ &+\rho_{2m+k+1} a_i \alpha_{2m+k+1\, i} - \rho_{2m+k+2} a_i \alpha_{2m+k+2\, i} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $i = \overline{1, m+k+1}$. Эта система зависит от $m+2$ переменных $\rho, \rho_{m+k+2}, \ldots, \rho_{2m+k+2}$, которые не могут принимать нулевые значения, следовательно, ранг системы $r \leqslant m+1$. Это значит, что все миноры порядка $m+2$ основной матрицы этой системы обращаются в ноль:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1 \alpha_{m+k+3\, 1} & \ldots & a_1 \alpha_{2m+k+1\, 1} & -a_1 \alpha_{2m+k+2\, 1} \\ 1 & a_2 & a_2 \alpha_{m+k+3\, 2} & \ldots & a_2 \alpha_{2m+k+1\, 2} & -a_2 \alpha_{2m+k+2\, 2} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m+1} & a_{m+1} \alpha_{m+k+3\, m+1} & \ldots & a_{m+1} \alpha_{2m+k+1\, m+1} & -a_{m+1} \alpha_{2m+k+2\, m+1} \\ 1 & a_{m+l} & a_{m+l} \alpha_{m+k+3\, m+l} & \ldots & a_{m+l} \alpha_{2m+k+1\, m+l} & -a_{m+l} \alpha_{2m+k+2\, m+l} \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

где ($l = \overline{2, k+1}$). Каждое из $k$ уравнений системы (8) определяет гиперконус $K_l^{m+1} \subset \mathbb{P}^{m+k}$ степени $m+1$. Направляющей этого конуса служит многообразие $F_{ml}^{m+1}$, расположенное в $(m+1)$-мерной плоскости, определяемой уравнениями:

$$a_{m+2} = \ldots = \hat{a}_{m+l} = \ldots = a_{2m+k+1} = 0$$

(символ $\hat{a}_{m+l}$ здесь означает, что уравнение $a_{m+l} = 0$ в системе отсутствует).

Вершиной конуса $K_l^{m+1}$ является $(k-2)$-мерная плоскость, лежащая в $\mathbb{P}^{m+k}$ и определяемая системой уравнений

$$a_1 = \ldots = a_{m+1} = a_{m+l} = a_{m+k+2} = \ldots = a_{2m+k+1} = 0.$$

Таким образом, доказано, что центр искомого проектирования однозначно определяется выбором точки

$$A'_{m+k+2} \in \bigcap_{l=2}^{k+1} K_l^{m+1}.$$

Это значит, что множество центров проектирования в случае $n = 2m+k$ $(k \geqslant 2)$ параметризуется точками многообразия $\bigcap\limits_{l=2}^{k+1} K_l^{m+1}$.

## Библиографический список


1. *Большаков Ю.И., Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обзор научных исследований кафедры общей математики // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук: Математика. Информатика. Ярославль, 1995. С. 189–199.

2. *Бескин Н.М.* Теорема Круппа // Конструктивная алгебраичекая геометрия: Сборник научн. тр. Ярославль: Изд-во ЯГПИ. 1982. Вып. 200. С. 20–29.

3. *Бескин Н.М.* Теорема Круппа для проективного репера из $n+2$ точек // Бирациональная геометрия алгебраических многообразий: Сборник научн. тр. Ярославль: Изд-во ЯГПИ. 1985. Вып. 215. С. 12–15.

4. *Бескин Н.М.* Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии // Матем. сборник. 1946. Т. 19(61). С. 57–72.

5. *Бескин Н.М.* Основные теоремы центральной аксонометрии // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль: Изд-во ЯГПИ, 1971. Вып. 83. С. 7–21.

6. *Бескин Н.М.* Основное предложение аксонометрии // Вопросы современной начертательной геометрии. М.–Л., 1947. С. 55–125.

7. *Лопшиц А.М.* Аффинные отображения многомерного проективного пространства, метрически подобные кратноперспективным, и обобщения теоремы Польке-Шварца // Ученые зап. ЯГПИ. Ярославль, 1967. Вып. 57. Геометрия. С. 93–123.

8. *Большаков Ю.И.* Решение задачи Польке-Шварца-Лопшица в многомерном псевдоевклидовом пространстве. Деп. в ВИНИТИ. N 1880-78.

9. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обобщение теоремы Круппа // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1989. С. 95–99.

10. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обобщение теоремы Круппа на пространства произвольной размерности // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1992. С. 70–73.

11. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* О некотором обобщении основной теоремы центральной аксонометрии // Тр. Международного конгресса ассоциации "Женщины-математики". Нижний Новгород, 1994. Вып. 3. С. 20–22.

12. *Медведева Л.Б.* О проецировании $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-2}$ // Математические заметки ЯГУ. Якутск, 1998. Т. 5. Вып. 1. С. 47–51.

13. *Медведева Л.Б., Пушкова Ю.А.* О многообразии центров проецирования $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-3}$ // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1998. С. 143–149.


## Вопрос полноты и неполноты проекционных изображений фигур расширенного евклидова $n$-пространства $S^n$

*Е.В. Никулина*

Статья посвящена проблеме полноты и неполноты проекционных чертежей, играющей важную роль в теории изображений.

Рассмотрим вопрос о полных и неполных изображениях фигур расширенного евклидова пространства $S^3$ на 2-плоскости.

Под изображением (чертежом) фигуры пространства $S^3$ на 2-плоскости $S^2$ будем понимать ее параллельную проекцию на плоскость $S^2$.

Изображение назовем полным, если на нем однозначно определены все общие элементы линий и поверхностей оригинала. Это естественное определение порождает ряд вопросов:

- Вопрос о системе задания точек в плоскости проекций, приводящей изображение к полному виду. Для случая, когда рассматриваются изображения фигур пространства $S^3$ на плоскости $S^2$, он рассмотрен в учебной литературе по геометрии, содержащей раздел "Теория изображений". Решением данного вопроса является, в частности, метод основной плоскости, предложенный Н.Ф. Четверухиным. Суть его заключается в следующем.

Выберем три точки фигуры-оригинала и будем считать, что они задают так называемую основную плоскость. Тогда всякую точку оригинала на чертеже назовем определенной (заданной), если на нем дано ее изображение и однозначно определено изображение ее проекции (центральной или параллельной)на основную плоскость. Если плоскость $(ACD)$ выбрать в качестве основной (см. рис. 1), а точку $B$ – в качестве центра проецирования, то очевидно, что все точки изображения будут определенными. Такое изображение является полным. На нашем чертеже, например, можно построить точки пересечения прямой $KL$ со всеми гранями тетраэдра.

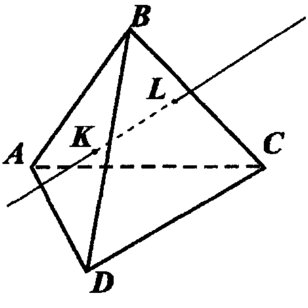



Рис. 1

- Вопрос о том, как неполное изображение сделать полным.

Решением данного вопроса является так называемый процесс расширения полного изображения [1].

- Вопрос о том, можно ли рассматривать неполное изображение фигуры пространства $S^3$ как полное изображение фигуры пространства бóльшего числа измерений. В качестве примера рассмотрим изображение гексаэдра на рис. 2. Данное изображение на 2-плоскости является неполным, если его рассматривать как изображение фигуры пространства $S^3$, но полным, если рассматривать как изображение фигуры пространства $S^4$. Теоремы, позволяющие обосновать данный факт, также известны для случая, когда рассматриваются неполные изображения фигур пространства $S^3$.

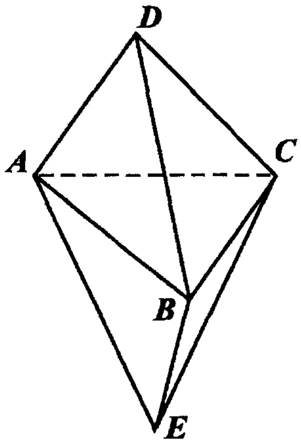



Рис. 2

В общем случае, когда рассматриваются изображения фигур расширенного евклидова $n$-пространства на плоскости произвольной размерности, меньшей $n$, первые два вопроса полностью решены [1, 2]. Наша задача состоит в том, чтобы доказать теоремы, позволяющие неполный чертеж фигуры пространства $S^n$ на плоскости $S^m$ рассматривать как изображение соответствующей фигуры, помещенной в пространстве другого числа измерений. При проведении доказательств мы опирались на понятия и результаты, содержащиеся в [1] и [2].

Под изображением (чертежом) фигуры расширенного евклидова пространства $S^n$ (далее – пространства $S^n$) на плоскости $S^m$

($m < n$), как и в случае изображения фигур пространства $S^3$, будем понимать параллельную проекцию фигуры на $m$-плоскость.

При параллельном проецировании фигуры пространства $S^n$ на плоскость $S^m$ ($m < n$) через проецируемые точки проводятся параллельные между собой ($n - m$)-плоскости. Все проецирующие ($n - m$)-плоскости параллельны между собой. С проективной точки зрения параллельное проецирование – это центральное проецирование с ($n - m - 1$)-мерным несобственным центром.

Будем рассматривать изображение фигуры через изображение некоторого связанного с ней симплекса $T(n+1)$ пространства $S^n$. Как известно, симплекс $T(n+1)$ пространства $S^n$ определяется $n+1$ вершиной общего положения и ограничен $n+1$ симплексами $T(n)$. Рассмотрим изображение фигуры пространства $S^n$ на $m$-плоскости $S^m$ ($m < n$), полученное в результате параллельного проецирования фигуры на $m$-плоскость проекций. Выберем какие-либо $n+1$ точки чертежа, которые являются изображениями точек общего положения фигуры-оригинала в пространстве $S^n$, в качестве вершин основного симплекса. Всякую новую точку оригинала на чертеже будем задавать ее изображением и изображением цепи ее оснований относительно основного симплекса. Цепь оснований строится следующим образом. Пусть $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ – симплекс пространства $S^n$, построим цепь оснований точки $M$, лежащей в пространстве $S^n$ (рис. 3, $n = 4$, $m = 2$).

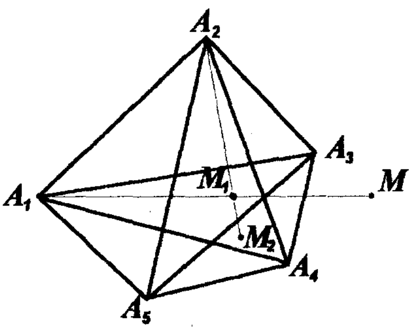



Рис. 3

Назовем нулевым основанием точки $M$ саму точку $M$: $M_0 \equiv M$. Назовем $i$-м ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) основанием точки $M$ точку $M_i$ пересечения прямой $(A_i M_{i-1})$ с $(n-i)$-плоскостью $(A_{i+1}...A_{n+1})$: плоскость $(A_{i+1}...A_{n+1})$ и прямая $(A_i M_{i-1})$ лежат в $(n-i+1)$-плоскости, но не лежат в $(n-i)$-плоскости. Заметим, что на чертеже достаточно указать изображения оснований $M_0, M_1, ..., M_{n-m}$, поскольку после их задания точки $M_{n-m+1}, ..., M_{n-1}$ определяются однозначно. Точки $M_1, ..., M_{n-m}$ образуют цепь оснований. Таким образом, точку $M$ оригинала будем считать определенной или заданной на чертеже, если на нем задано ее изображение и может быть однозначно указано изображение ее оснований (далее – цепь оснований) относительно основного симплекса. Чертеж, содержащий только определенные элементы, является полным.

Предположим далее, что чертеж содержит как определенные, так и неопределенные точки относительно основного симплекса $A_1...A_{n+1}$. Неопределенной будем считать точку, если вся цепь ее оснований или некоторые из оснований не могут быть однозначно указаны на чертеже. Все определенные точки вместе с $n$-симплексом представляют полное изображение, которое обозначим $(A_1...A_{n+1})$. Рассмотрим какую-либо неопределенную точку $X$ изображения, которая, очевидно, не входит в полное изображение $(A_1...A_{n+1})$. Для того, чтобы включить точку $X$ в полное изображение, следует задать те ее основания, которые однозначно не определяются на чертеже, учитывая при этом, что одни (неопределенные на исходном изображении) основания могут однозначно определяться после задания других. Арифметически, чтобы определить положение основания на чертеже, нужно задать определенное число параметров, не являющихся следствием уже данных. После этого цепь оснований точки $X$ однозначно определится на чертеже, и точка $X$ станет определенной на нем, а полное изображение $(A_1...A_{n+1})$ расширится. Может случиться, что при этом, кроме точки $X$, окажутся определенными и другие элементы чертежа, которые не входили в $(A_1...A_{n+1})$. Присоединяя их и точку $X$ к $(A_1...A_{n+1})$, получим полное изображение $(A_1...A_{n+1}, X)$:

$$(A_1...A_{n+1}) \subset (A_1...A_{n+1}, X).$$

Если после этого изображение полным не стало, продолжим начатый процесс до тех пор, пока чертеж не станет полным, т.е. будем задавать основания неопределенных точек, подсчитывая при этом число требуемых параметров. Указанный процесс называется процессом расширения полного изображения. Если процесс конечен, то, задав в результате произвольно $k$ независимых параметров, сделаем чертеж полным. Число $k$ называется коэффициентом неполноты чертежа. Данное число не зависит ни от выбора основного симплекса, ни от выбора оснований неопределенных точек в процессе расширения полного изображения.

Далее будем рассматривать чертежи, для каждой точки которых или можно построить все ее основания относительно основного симплекса, или нельзя построить ни одного. Очевидно, что все чертежи, изображающие объекты пространства $S^3$, относятся к рассматриваемому типу, так как для точки пространства $S^3$ достаточно, кроме изображения самой точки, задать изображение одного ее основания, чтобы точка стала определенной. Определенные точки вместе с точками основного симплекса образуют полную часть изображения. Задав для неопределенной точки $P$ все ее основания, можем включить эту точку в полную часть изображения. Возможно, что при этом станут определенными и другие, ранее неопределенные точки. Если не было задано условий, связывающих основания неопределенных точек, то при включении точки $P$ в полную часть исходного изображения не может получиться точки, для которой можно построить лишь часть ее оснований. Возможно, что после задания точки $P$ еще останутся неопределенные точки. Тогда зададим основания еще для одной неопределенной точки $Q$. Если этот процесс расширения полного изображения конечен, то после включения $K$ точек приведем изображение к полному виду. Число $K$ называется точечной неполнотой изображения. Это число не зависит ни от выбора основного симплекса, ни от выбора точек, включаемых в полное изображение, и связано с коэффициентом неполноты изображения следующим образом:

$$k = (n - m) \cdot K.$$

Вместе с $n + 1$ вершиной основного симплекса включенные точки образуют систему из $n + K + 1$ точек, которая называется точечным базисом изображения. Точечный базис обладает следующими свойствами:

1. Точки базиса являются независимыми, т.е. если любые $n + 1$ точки базиса выбраны в качестве вершин основного симплекса, а $K - 1$ из остальных $K$ точек будут определены своими основаниями относительно основного симплекса, то последняя точка базиса останется неопределенной.

2. Если $n+1$ любые точки базиса выбрать в качестве вершин основного симплекса и определить основаниями относительно него остальные $K$ точек, то чертеж станет полным.

Далее перейдем непосредственно к доказательству теорем, позволяющих неполный чертеж фигуры пространства $S^n$ на плоскости $S^m$ рассматривать как изображение фигуры, помещенной в пространстве другого числа измерений.

**Теорема 1.** *Точечный базис изображения фигуры $\Phi^n$ пространства $S^n$ с точечной неполнотой $K$ можно рассматривать как изображение вершин симплекса пространства $S^{K+n}$.*

**Доказательство.** Предположим, что мы имеем точечный базис $A_1, A_2, ..., A_{n+K+1}$ некоторого изображения фигуры $\Phi^n$ пространства $S^n$, точечная неполнота которого равна $K$. Докажем, что любую точку базиса можно рассматривать как изображение вершины симплекса пространства $S^{K+n}$. Для этого надо показать, что каждая точка, изображаемая на чертеже точкой базиса, не лежит в пространстве, определяемом остальными точками, изображаемыми на чертеже точками базиса.

Допустим противное. Пусть, например, точка $A_s$ лежит в пространстве, определяемом остальными точками $A_1, ..., A_{s-1}, A_{s+1}, ..., A_{n+K-1}$, изображаемыми точками базиса. На чертеже это означает, что для точки $A_s$ может быть построена ее цепь оснований относительно симплекса $T(n + K)$: $A_1...A_{s-1}A_{s+1}...A_{n+K+1}$.

Далее выберем в качестве основного симплекса $T(n+1)$ на чертеже фигуру $A_1...A_{n+1}$ и определим относительно него остальные точки базиса, кроме точки $A_s$. Таким образом, мы получим полное изображение $(A_1...A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{s-1}, A_{s+1}, ..., A_{n+K+1})$. Нетрудно видеть, что точки, образующие цепь оснований точки $A_s$ относительно симплекса $T(n+K)$, окажутся включенными в полученное полное изображение, поскольку принадлежат определенным элементам, значит, включенной в него окажется и сама точка $A_s$. Между тем, точка $A_s$ как точка базиса изображения фигуры $\Phi^n$ пространства $S^n$ является независимой от остальных точек базиса указанного изображения и, следовательно, неопределенной относительно основного симплекса $T(n+1)$.

Полученное противоречие показывает, что точка $A_s$ не может лежать в пространстве, определяемом остальными точками, изображаемыми на чертеже точками базиса. Это верно и для любой другой точки, изображаемой на чертеже точкой базиса.

Итак, совокупность $n+K+1$ точек базиса можно рассматривать как изображение вершин симплекса пространства $S^{n+K}$.
Теорема доказана.

В [2] сформулировано без доказательства следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть точечная неполнота данного изображения фигуры $\Phi^{n_1}$ пространства $S^{n_1}$ $(n_1 > m)$ равна $K$, тогда это изображение можно рассматривать как изображение фигуры $\Phi^{n_2}$ пространства $S^{n_2}$ с точечной неполнотой $K+(n_1-n_2)$ при условии, что $n_2 > m$.*

Автор предлагает следующее доказательство этого утверждения.
Точечный базис изображения $\Phi^{n_1}$ состоит из $n_1+1+K$ точек, он может рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_1+1+K)$ пространства $S^{n_1+K}$ (теорема 1). Покажем, что любая точка-оригинал изображения $\Phi^{n_1}$ лежит в этом пространстве.

Допустим, что это не так, и какая-нибудь точка $N$ не лежит в указанном пространстве $S^{n+K}$. Это значит, что на чертеже точка $N$ допускает включение в пространство $S^{n+K}$ при помощи произвольно выбранной цепи оснований относительно симплекса $T(n_1+1+K)$. Допустим, что мы выбрали некоторую цепь оснований точки $N$, тогда после приведения точечного базиса к полному виду относительно основного симплекса $T(n_1+1)$ мы сможем определить цепь оснований точки $N$ относительно симплекса $T(n_1+1)$. Но если мы выберем другую цепь оснований точки $N$ относительно симплекса $T(n_1+1+K)$, то после приведения точечного базиса к полному виду относительно $T(n_1+1)$ получим уже другую цепь оснований точки $N$ относительно симплекса $T(n_1+1)$, т.е. точка $N$ останется неопределенной относительно основного симплекса $T(n_1+1)$. Но это противоречит свойству точечного базиса изображения $\Phi^{n_1}$, после приведения которого к полному виду все изображение становится полным. Таким образом, сделанное допущение неверно. Точка $N$ должна принадлежать пространству $S^{n_1+K}$. Это означает, что все точки изображения $\Phi^{n_1}$ являются определенными относительно симплекса $T(n_1+1+K)$.

Рассмотрим изображение $\Phi^{n_1}$ как изображение фигуры $\Phi^{n_2}$ пространства $S^{n_2}(n_2 > m)$. Поскольку точечный базис изображения $\Phi^{n_1}$ может рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_1+1+K)$ пространства $S^{n_1+K}$, то любые $n_2+1$ точки базиса могут рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_2+1)$ пространства $S^{n_2}$. Выберем $n_2+1$ точки базиса в качестве вершин основного симплекса $T(n_2+1)$. Найдем точечную неполноту исходного изображения, рассматриваемого как изображение фигуры пространства $S^{n_2}$, используя процесс расширения полного изображения.

Рассмотрим любую из оставшихся $n_1+K-n_2$ точек базиса изображения $\Phi^{n_1}$. Она является неопределенной на чертеже относительно основного симплекса $T(n_2+1)$, поскольку в оригинале не принадлежит пространству, определяемому симплексом $T(n_2+1)$. Определим ее, задав произвольно цепь оснований относительно $T(n_2+1)$. На каждом следующем этапе в процессе расширения, рассматривая очередную из оставшихся точек базиса изображения $\Phi^{n_1}$, убеждаемся, что в оригинале она не принадлежит пространству, определяемому основным симплексом $T(n_2+1)$ и точками базиса, определенными нами ранее, а потому не является определенной относительно $T(n_2+1)$. Таким образом, в процессе расширения мы должны будем произвольно задать цепи оснований всех указанных $n_1+K-n_2$ точек. После этого все остальные точки

изображения $\Phi^{n_1}$ станут определенными, так как выше было доказано, что любая точка изображения $\Phi^{n_1}$ является определенной относительно симплекса $T(n_1 + 1 + k)$. Таким образом, точечная неполнота изображения фигуры $\Phi^{n_1}$, рассматриваемого как изображение фигуры пространства $S^{n_2}$, равна $K + (n_1 - n_2)$.
Теорема доказана.

**Библиографический список**

1. *Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф.* Аксонометрия. М.: Госуд. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1953.
2. *Ламбин Л.Н.* Теория полноты и метрической определенности изображения многомерных объектов. Минск, 1960.

## Об одном классе геодезических преобразований сасакиевых структур

*Н.Н. Дондукова*

Теория геодезических отображений псевдоримановых пространств составляет одно из старейших направлений римановой геометрии, истоки которой восходят к трудам Т. Леви-Чивита, Г. Вейля и других знаменитых математиков. Одним из наиболее популярных результатов в этом направлении является результат Уэстлейка и Яно, утверждающий, что келерово многообразие не допускает нетривиальных геодезических преобразований, сохраняющих комплексную структуру.

В настоящей работе введено понятие контактно-геодезического преобразования почти контактной метрической структуры как геодезического преобразования, сохраняющего почти контактную структуру.

Получен один из контактных аналогов результата Уэстлейка и Яно, а именно доказано, что многообразие Сасаки не допускает нетривиальных контактно-геодезических преобразований.

Пусть $M$ – гладкое многообразие размерности $2n+1$; $X(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии $M$; $\nabla$ -риманова связность метрики $g$.

**Определение 1** ([1]). *Почти контактной метрической* (короче $AC$-) *структурой* на гладком многообразии $M$ называется совокупность $\{\eta, \xi, \Phi, g =< \cdot, \cdot >\}$ тензорных полей на этом многообразии, где $\eta$ – дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой* структуры, $\xi$ – векторное поле, называемое *характеристическим вектором*, $\Phi$ – поле тензора типа $(1,1)$, называемое *структурным эндоморфизмом*, $g$ – риманова метрика на $M$. При этом

$$\begin{array}{l} 1)\ \eta(\xi) = 1;\ 2)\ \Phi(\xi) = 0;\ 3)\ \eta \circ \Phi = 0;\ 4)\ \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \\ 5)\ < \Phi X, \Phi Y >=< X, Y > -\eta(X)\eta(Y);\ X, Y \in X(M). \end{array} \tag{1}$$

Многообразие с фиксированной $AC$-структурой называется *почти контактным метрическим* (короче $AC$-) *многообразием* . На таком многообразии внутренним образом определены распределения $L = Im\,\Phi = ker\,\eta$ и $M = ker\,\Phi = ker\,d\eta$ размерностей $2n$ и 1, соответственно, причем $X(M) = L \oplus M$.

**Определение 2** ([2]). Почти контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой*, если она характеризуется тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y =< X, Y > \xi - \eta(Y)X;\ X, Y \in X(M).$$

**Определение 3** ([3]). Диффеоморфизм $\varphi$ псевдориманова многообразия $(M, g)$ на себя называется *геодезическим преобразованием*, если он любую геодезическую переводит в геодезическую. В этом случае на $M$ возникает новая псевдориманова метрика $\tilde{g} = \varphi^*(g)$, которая называется геодезическим преобразованием исходной метрики. В силу симметричности тензора $\tilde{g}$ существует самосопряженный эндоморфизм $h$, такой что $\tilde{g}(X, Y) = g(X, hY)$; $X, Y \in X(M)$. Называется этот эндоморфизм *оператором геодезической деформации*.

Введем понятие *контактно-геодезического преобразования*:

**Определение 4.** Геодезическое преобразование $g \to \tilde{g}$ метрики $g$ $AC$–структуры назовем *контактно-геодезическим* (короче *с-геодезическим*) *преобразованием*, если четверка $\{\eta, \xi, \Phi, \tilde{g}\}$ также $AC$–структура.

**Лемма.** *Характеристический вектор $\xi$ $AC$–структуры является собственным вектором оператора $h$ –геодезической деформации с собственным значением* 1.

**Доказательство.** В самом деле, из $(1_{1,2,5})$ имеем $\eta(X) = <\xi, X>$. С другой стороны,

$$\eta(X) = \tilde{g}(\xi, X) = <\xi, h(X)> = <h(\xi, X> .$$

Сравнивая с предыдущим тождеством, в силу невырожденности метрики получаем, что $h(\xi) = \xi$.

Как известно [3], если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность метрики $\tilde{g}$, то тензор аффинной деформации от связности $\nabla$ к связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$T(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X; \ X, Y \in X(M),$$

где $\psi$ – дифференциальная 1-форма, называемая *формой геодезического искажения.* Если $\psi = 0$, то преобразование $\varphi$ является тривиальным, то есть $\varphi_* \nabla = \nabla$.

Вычислив ковариантную производную структурного эндоморфизма $\Phi$ относительно связности $\tilde{\nabla}$, получим

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_X Y + T(X, \Phi Y) - \\ -\Phi\nabla_X Y - \Phi T(X,Y) = \nabla_X(\Phi)Y + T(X,\Phi Y) - \Phi T(X,Y) = \\ = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X. \tag{2}$$

Напомним, что в работе [1] был введен в рассмотрение *первый структурный тензор,* который имеет следующий вид

$$\begin{aligned}B(X,Y) = -\tfrac{1}{8}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X) + \\ +\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\}; \ X, Y \in X(M).\end{aligned} \tag{3}$$

С учетом (2) и (3) получим

$$\tilde{B}(X,Y) = B(X,Y) - \frac{1}{2}\psi(\Phi Y)\Phi X - \frac{1}{2}\psi(\Phi^2 Y)\Phi^2 X; \ X, Y \in X(M),$$

где $\tilde{B}$ – первый структурный тензор относительно $\{\eta, \xi, \Phi, \tilde{g}\}$.

Так как первый структурный тензор сасакиевой структуры равен нулю (см.[1]), имеем

$$\tilde{B}(X,Y) = -\frac{1}{2}\psi(\Phi Y)\Phi X - \frac{1}{2}\psi(\Phi^2 Y)\Phi^2 X; \; X, Y \in X(M). \qquad (4)$$

В [1] доказано, что первый структурный тензор обладает следующим свойством

$$< B(X,Y), Z > + < X, B(Y,Z) >= 0; \; X, Y \in X(M). \qquad (5)$$

Применив его к тензору $\tilde{B}$ с учетом (4), после упрощений получим:

$$\psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y = 0.$$

Следовательно,

$$\psi(\Phi^2 X) = 0.$$

Используя ($1_4$), имеем отсюда, что

$$\psi(X) = \psi(\xi)\eta(X); \; X, Y \in X(M). \qquad (6)$$

В частности, с учетом ($1_3$)

$$\psi \circ \Phi = 0,$$

В силу чего, тождество (2) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y - \psi(Y)\Phi X; \; X, Y \in X(M). \qquad (7)$$

Далее, применив оператор $\nabla_X$ к тождеству $\tilde{g}(\Phi Y, Z) + \tilde{g}(Y, \Phi Z) = 0$, мы получим следующее тождество

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X(\Phi)Z) = 0. \qquad (8)$$

С учетом характеристического тождества сасакиевых многообразий и (8), соотношение (8) примет следующий вид

$$\tilde{g}(X, hY)\eta(Z) - \eta(Y)\tilde{g}(X,Z) - \psi(Y)\tilde{g}(\Phi X, Z) +$$
$$+\tilde{g}(X, hZ)\eta(Y) - \eta(Z)\tilde{g}(X,Y) - \psi(Z)\tilde{g}(\Phi X, Y) = 0,$$

где $h$ – оператор геодезической деформации от метрики $\tilde{g}$ к метрике $g$, или

$$\tilde{g}(hY,X)\eta(Z) - \eta(Y)\tilde{g}(Z,X) + \psi(Y)\tilde{g}(\Phi Z,X)+$$
$$+\tilde{g}(hZ,X)\eta(Y) - \eta(Z)\tilde{g}(Y,X) + \psi(Z)\tilde{g}(\Phi Y,X) = 0.$$

Отсюда, в силу невырожденности метрики $\tilde{g}$,

$$h(Y)\eta(Z) - \eta(Y)Z + \psi(Y)\Phi Z + h(Z)\eta(Y) - \eta(Z)Y + \psi(Z)\Phi Y = 0;$$
$$X,Y \in X(M).$$

Положив здесь $Z = \xi$, с учетом леммы и $(1_2)$ получим

$$h(Y) = Y - \psi(\xi)\Phi Y. \tag{9}$$

Заметим, что $h$ – самосопряженный эндоморфизм, то есть

$$\tilde{g}(h(X),Y) = \tilde{g}(X,h(Y));$$

Используя тождество (9), получим отсюда, с учетом невырожденности метрики, что

$$\psi(\xi)\Phi Y = 0.$$

В частности, если $Y \in L$ – ненулевой вектор, то

$$\psi(\xi) = 0,$$

Следовательно, в силу (6), $\psi = 0$.

Доказана

**Теорема.** *Многообразие Сасаки не допускает нетривиальных c-геодезических преобразований метрики.*

## Библиографический список

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: Изд-во МПГУ, 2003.
2. *Кириченко В.Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР 48, № 4 (1984). С. 711–739.
3. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

# Анализ системы сингулярно возмущенных уравнений, описывающих проведение возбуждения по нервному волокну

*В.В. Майоров, С.Е. Ануфриенко*

В работе рассматривается модель импульсного проведения возбуждения по нервному волокну, покрытому особым веществом – миелином, являющимся хорошим изолятором. Такие волокна называются миелинизированными. В миелиновой оболочке есть разрывы (перехваты Ранвье) [1, 2]. Сигнал по миелинизированному волокну передается скачкообразно. Модель основана на системе, включающей в себя дифференциальные уравнения с запаздыванием и обыкновенные дифференциальные уравнения. Система исследуется аналитически. Показано, что существует решение, при котором перехваты Ранвье генерируют цепочку спайков. Рассчитаны временные рассогласования между спайками соседних перехватов.

Рассмотрим участок нервного волокна, содержащий $N+1$ перехват Ранвье. Присвоим перехватам номера от 0 до $N$ и обозначим через $u_i(t)$ их мембранные потенциалы. Потенциал миелинизированного участка, находящегося между перехватами с номерами $i$ и $i-1$, обозначим $v_i(t)$ $(i=1,\dots,N)$. Мембранные потенциалы перехватов Ранвье и миелинизированных участков будем отсчитывать от уровня максимальной гиперполяризации, поэтому $u_i(t)\geqslant 0$ и $v_i(t)\geqslant 0$. Система, описывающая процесс распространения импульса по миелинизированному волокну, имеет вид [3]:

$$\begin{gathered}\dot u_i=\lambda[-1-f_{Na}(u_i)+f_K(u_i(t-1))]u_i+\varepsilon+e^{-\lambda\sigma}(v_i-2u_i+v_{i+1})\\ i=0,\dots,N;\quad v_0(\,t)\equiv u_0(t);\quad v_{N+1}(t)\equiv u_N(t);\end{gathered}\tag{1}$$

$$\dot v_i=\lambda(u_{i-1}-2v_i+u_i),\quad i=1,\dots N.\tag{2}$$

Здесь параметр $\lambda>>1$ отражает высокую скорость протекания электрических процессов, параметр $0<\varepsilon<<1$ учитывает токи утечки, проходящие через мембраны перехватов. Положительные достаточно гладкие функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно убывают к нулю при $u \to \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$. Они описывают состояние натриевых и калиевых каналов мембран перехватов. Параметры $\alpha = 1 + f_{Na}(0) - f_K(0) > 0$, $\alpha_1 = f_K(0) - 1 > 1$, $\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1 > \alpha_1$, $0 < \sigma < \alpha_1$. Число $f_K(0) - f_{Na}(1) - 1 > 0$ связано с пороговым значением: будем читать, что спайк $i$-го перехвата начинается в момент времени $t_s$, такой что $u_i(t_s) = 1$, $u_i(t) < 1$ при $t_s - 1 < t < t_s$. Токи утечки через миелиновые оболочки не учитываются.

Система описывает последовательность перехватов Ранвье, связанных между собой посредством миелинизированных участков. Отметим, что система уравнений имеет устойчивое состояние равновесия $u_i = v_i = u_* \approx \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha}$.

Зададим начальные условия:

$$u_0(s) = \varphi_0(s) \in S, \quad s \in [-1, 0];$$
$$u_i(s) = u_*, \quad s \in [-1, 0], \quad i = 1, \ldots, N;$$
$$v_i(0) = u_*, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Класс $S$ состоит из непрерывных на отрезке $s \in [-1,\ 0]$ функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих условиям: $\varphi(0) = 1$ и $0 \leqslant \varphi(s) \leqslant \max(\exp(\lambda\alpha s/2), 1/\lambda)$.

Формулы, описывающие динамику мембранного потенциала нулевого перехвата при отсутствии внешнего воздействия, имеют вид [4]:

$$u_0(t) = \begin{cases} \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), & t \in [\delta,\ 1 - \delta]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))), & t \in [1 + \delta 1 + \alpha_1 - \delta]; \\ \frac{\varepsilon + o(1)}{\lambda\,\alpha_2}, & t \in [1 + \alpha_1 + \delta,\ 2 + \alpha_1 - \delta]; \\ \frac{\varepsilon + o(1)}{\lambda\alpha}, & t \geqslant 2 + \alpha_1 + \delta. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $0 < \delta << 1$ – произвольно малое фиксированное число, $o(1)$ – слагаемые, которые стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$.

Проанализируем систему (1)–(2) при $\lambda \to \infty$. Из начальных условий следует, что при $t = 0$ начинается спайк у нулевого перехвата. Кроме этого выполнены соотношения: $v_1(0) << u_0(0) = 1$, $u_1(0) << 1$. Из них следует, что на некотором промежутке при

$t > 0$ последнее слагаемое уравнения (1) при $i$=0 асимптотически мало, и данное уравнение может быть проинтегрировано независимо от других. Имеем:

$$u_0(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Рассмотрим промежуток $t \in [\delta, \tau - \delta]$, где $\tau$ – первый корень уравнения $u_1(t) = 1$. Скоро мы покажем, что $\tau < 1$, поэтому справедливы оценки: $u_0(t) >> 1$, $u_1(t) << 1$. Запишем уравнение (2) при $i$=1:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda\exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), \quad v_1(0) = u_*.$$

Главное слагаемое решения имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Для нахождения $\tau$ рассмотрим уравнение (1) при $i$=1. Учитывая, что $u_1(t) = o(1)$ и $v_2(t) = o(1)$, запишем его в виде:

$$\dot{u}_1 = -\lambda[\alpha + o(1)]u_1 + \varepsilon + \exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))), \quad u_1(0) = u_*.$$

Его решение имеет вид:

$$u_1(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha} + \frac{\exp(\lambda(\alpha_1 t - \delta + o(1))) - \exp(-\lambda(\alpha t + \sigma + o(1)))}{\lambda(\alpha + \alpha_1)}.$$

Найдем $\tau$ из условия $u_1(t) = o(1)$: $\tau = \frac{\sigma}{\alpha_1} + o(1) < 1$.

Отметим, что при $s \in [-1, 0]$ выполнено условие $u_1(\tau + s) = \varphi_1(s) \in S$.

Рассмотрим промежуток $t \in [\tau + \delta, t_2 - \delta]$, где $\tau < t_2 < 1$ и для всех $t < t_2$ справедливо неравенство: $u_1(t) < u_0(t)$. Здесь уравнение, описывающее динамику мембранного потенциала нулевого перехвата, может быть проинтегрировано независимо от других. Поэтому

$$u_0(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Уравнение для $v_1(t)$ сохранит свой вид, следовательно, не изменится и решение:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Уравнение для $u_1(t)$ примет вид:

$$\dot{u}_1 = \lambda[\alpha_1 + o(1)]u_1 + \varepsilon + \exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))), \quad u_1(\tau) = 1.$$

Его решение имеет вид:

$$u_1(t) = \left(1 + \tfrac{\varepsilon}{\lambda\alpha_1}\right)\exp(\lambda(\alpha_1 + o(1))(t - \tau)) + \\ + (t - \tau)\exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))) - \tfrac{\varepsilon}{\lambda\alpha_1}.$$

Учитывая, что $\tau < t < 1$ и $\tau = \frac{\sigma}{\alpha_1} + o(1)$, получаем:

$$u_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))).$$

Это значит, что $u_1(t) \approx u_0(t - \tau)$ (с точностью до слагаемых (1)). Поскольку $t_2$ произвольно, все формулы верны на промежутке $t \in [\tau + \delta, 1 - \delta]$.

Рассмотрим промежуток $t \in [1 + \delta, 1 + \tau - \delta]$. Здесь уравнения, описывающие динамику мембранных потенциалов нулевого и первого перехватов, могут быть проинтегрированы независимо от других. Имеем:

$u_0(t) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t - 1) + o(1)))$,

$u_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1)))$.

Мембранный потенциал нулевого перехвата убывает, а первого перехвата – возрастает. Уравнение для $v_1(t)$ примет вид:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda\exp(\lambda(\alpha_1 - (t - 1) + o(1))) + \lambda\exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))).$$

Здесь следует рассмотреть два случая:

1) $u_0(t) > u_1(t)$,

2) $u_0(t) < u_1(t)$.

Случай первый. Имеем:

$$\exp(\lambda(\alpha_1 - (t - 1) + o(1))) > \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))),$$

$$t < t_* + o(1), \quad t_* = \frac{\alpha_1 \tau}{\alpha_1 + 1} + 1.$$

Заметим, что $1 < t_* < 1 + \tau$. Перепишем уравнение для $v_1(t)$:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))), \quad v_1(1) = \exp(\lambda\alpha_1(1 + o(1))).$$

Его решение имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))).$$

Получили приближенное равенство: $v_1(t) \approx u_0(t)$ (с точностью до слагаемых (1)).

Случай второй: $t \in [t_* + \delta, 1 + \tau - \delta]$. Здесь уравнение для $v_1(t)$ примет вид:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))), \; v_1(t_*) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t_* - 1) + o(1))).$$

Его решение имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))).$$

Получили, что на данном промежутке справедливо приближенное равенство: $v_1(t) \approx u_1(t)$ (с точностью до слагаемых (1)).

Дальнейшее исследование системы (1)–(2) показывает, что на нулевой перехват влияние не оказывается при $t > 0$, а на первый перехват – при $t > \tau$. Это значит, что миелинизированные участки не могут повлиять на перехваты Ранвье, когда те генерируют спайки и в течение некоторого времени после спайка. Этот временной промежуток называется периодом рефрактерности. Его продолжительность $T_R = 2 + \alpha_1 + o(1)$. В указанный период каждое из уравнений (1) может быть проинтегрировано независимо от других. Следовательно, мембранный потенциал нулевого перехвата определяется формулой (3), а для первого перехвата при $t > \tau$ справедливо равенство: $u_1(t) \approx u_0(t - \tau)$ (с точностью до слагаемых (1)). Описанное явление имеет простой биологический смысл. Известно [1], что миелинизированное волокно не может проводить импульсный сигнал большой частоты, потому что перехваты должны "восстановиться".

Формулы, задающие мембранный потенциал первого миелинизированного участка, имеют вид:

$$v_1(t)! = \begin{cases} \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), & t \in [\delta\,,\; 1 - \delta\,]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1 - (t - 1) + o(1))), & t \in [1 + \delta\,,\; t_* - \delta\,]; \\ \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))), & t \in [t_* + \delta\,,\; 1 + \tau - \delta\,]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1 - (t - \tau - 1) + o(1))), & t \in [1 + \tau + \delta, 1 + \alpha_1 + \tau - \delta]; \\ \frac{\varepsilon + o(1)}{\lambda\,\alpha_2}, & t \in [1 + \alpha_1 + \tau + \delta\,,\; 2 + \alpha_1 - \delta\,]; \\ \frac{\varepsilon\,(\alpha + \alpha_2) + o(1)}{2\lambda\alpha\,\alpha_2}, & t \in [2 + \alpha_1 + \delta\,,\; 2 + \alpha_1 + \tau - \delta\,]; \\ \frac{\varepsilon + o(1)}{\lambda\alpha}, & t \geqslant 2 + \alpha_1 + \tau + \delta. \end{cases} \tag{4}$$

Из приведенных формул следует, что

$$v_1(t) \approx u_0(t) \text{ при } 0 < t < t_*,$$
$$v_1(t) \approx u_1(t) \text{ при } t > t_*.$$

Тем самым, мембранный потенциал первого миелинизированного участка имеет две точки максимума

$$t^1_{\max} = 1 + o(1),$$
$$t^2_{\max} = 1 + \tau + o(1)$$

и находящуюся между ними точку локального минимума

$$t_{\min} = t_* + o(1).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что спайк $i$-го перехвата Ранвье начинается в момент времени $t = i\tau + o(1)$, а мембранный потенциал $i$-го миелинизированного участка получается временным сдвигом потенциала первого участка:

$$v_i(t) \approx v_1(t - (i - 1)\tau) \text{ при } t > (i - 1)\tau.$$

Итак, доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Рассмотрим систему* (1) – (2) *с начальными условиями*

$$u_0(s) = \varphi_0(s) \in S, \quad s \in [-1, 0];$$
$$u_i(s) = u_*, \quad s \in [-1, 0], \quad i = 1, \ldots, N;$$
$$v_i(0) = u_*, \quad i = 1, \ldots, N.$$

*Тогда при* $t > 0$ *мембранный потенциал определяется формулой* (3), *мембранный потенциал первого миелинизированного участка – по формуле* (4), *мембранные потенциалы других перехватов равны*

$$u_i(t) = u_0(t - i\tau) \text{ при } t > i\tau, \quad i = 1, \ldots, N,$$

*мембранные потенциалы остальных миелинизированных участков равны*

$$v_i(t) \approx v_1(t - (i-1)\tau) \text{ при } t > (i-1)\tau, \quad i = 2, \ldots, N.$$

Таким образом, при возбуждении нулевого перехвата Ранвье по цепочке перехватов будет распространяться волна импульсов (спайков) в направлении возрастания номеров перехватов. Если возбуждается перехват в середине цепочки, то волна распространяется в двух направлениях. Возбуждение последнего перехвата порождает волну импульсов, распространяющуюся в сторону убывания номеров перехватов. При одновременном возбуждении двух крайних перехватов возникнут две волны, бегущие навстречу друг другу, которые взаимно погашаются при столкновении.

Полученные результаты полностью соответствуют биологическим данным.

## Библиографический список

1. *Тасаки И.* Нервное возбуждение. М.: Мир, 1971.
2. *Шаде Дж., Форд Д.* Основы неврологии. М.: Мир, 1976.

3. *Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Громов С.А.* Модель сальтаторного проведения возбуждения, основанная на системе уравнений с запаздыванием. КГТУ: Нейроинформатика, 2002. С. 85–86.

4. *Майоров В.В., Мышкин И.Ю.* Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование. 1990. Т. 2. № 11. С. 64–76.

## Взаимодействующие марковские процессы и гиббсовские случайные поля

*М.Б. Аверинцев*

Весьма актуальной является задача моделирования случайных полей. Известно, что многие случайные поля являются гиббсовскими, т.е. описываются системой потенциалов [1, 2]. Таким образом, задача моделирования случайных полей сводится к задаче моделирования гиббсовских случайных полей. Для этого были предложены различные методы [4, 5]. В настоящей работе предложен метод моделирования с помощью двухкомпонентного случайного процесса, который является дискретным аналогом процессов с непрерывным временем, рассмотренных в работе [3]. Следует отметить, что предложенный метод является более простым с точки зрения компьютерного моделирования, чем методы, рассмотренные в работах [4, 5].

Взаимодействующий марковский случайный процесс описывает эволюцию во времени системы взаимодействующих элементов. Рассмотрим конечный граф $\Gamma = (V, U)$, где $V$ – множество вершин, $U$ – множество ребер, занумеруем вершины номерами от 1 до $N$, $V = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$, при этом для любого $v \in V$ ребро $(v, v) \in U$. Каждая вершина графа отождествляется с некоторым элементом, который может находиться в состояниях, описываемых конечным множеством $X$. В каждый момент времени рассмотрим конфигурацию, т.е. для каждого элемента $v \in V$ укажем его состояние

$x \in X$. Задание конфигурации удобно записывать в виде функции $x(v)$, множество всех таких функций обозначается $X^V$. Предположим, что элементы меняют свои состояния в дискретные моменты времени $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. Изменения состояний элементов являются случайными, при этом о характере этих изменений будут сделаны следующие предположения.

Будем считать, что в каждый момент времени может изменить свое состояние только один элемент, случайно выбираемый из множества $V$. Взаимодействие элементов является локальным в том смысле, что состояние элемента в следующий момент времени зависит только от состояний соседних элементов, при этом соседними для данного элемента $v \in V$ считаются элементы, соединенные с $v$ ребром, множество всех таких элементов обозначим $S_v$. Взаимодействие характеризуется потенциалом $U(x(S_v))$, где $x(S_v)$ – конфигурация в точках множества $S_v$.

Для описания эволюции системы рассмотрим двухкомпонентный марковский случайный процесс $(\xi_t, \nu_t)$, где $\xi_t \in X^V$, $\nu_t \in V$. Переходные вероятности этого процесса

$$P(\{(\xi_{t+1}, \nu_{t+1}) = (y(\,\cdot\,), v_j)|(\xi_t, \nu_t) = (x(\,\cdot\,), v_i)\} = \frac{1}{N} P_i(y(\,\cdot\,)|x(\,\cdot\,))$$

не зависят от времени, т.е. процесс однороден по времени. Первый множитель соответствует тому, что на каждом шаге с вероятностью $\frac{1}{N}$ выбирается произвольный элемент множества $V$, второй множитель соответствует вероятности изменения конфигурации. Предполагается, что изменяется состояние только элемента $v_i$, т.е. $y(v) = x(v)$ при $v \neq v_i$. Вероятности $P_i(y(\,\cdot\,)|x(\,\cdot\,))$ имеют специфический гиббсовский вид, т.е.

$$P_i(y(\,\cdot\,)|x(\,\cdot\,)) = \frac{1}{\Xi_i(x(\,\cdot\,))} \exp\{H(y(\,\cdot\,))\},$$

где $H(y(\,\cdot\,))$ – функция, называемая гамильтонианом конфигурации, $\Xi_i(x(\,\cdot\,))$ – нормирующий множитель. Гамильтониан равен суммарному взаимодействию всех элементов системы, т.е. $H(x(\,\cdot\,)) =$

$\sum_{v \in V} U(x(S_v))$. Этот процесс является дискретным аналогом процессов с непрерывным временем, рассмотренных в [3]. Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** *Описанный выше марковский процесс является эргодическим, а его предельные вероятности являются гиббсовскими, т.е. имеют вид* $P(x(\cdot)) = \frac{1}{\Xi}\exp\{H(y(\cdot))\}$.

Так как рассмотренный марковский процесс легко моделируется на компьютере, то полученный результат позволяет моделировать гиббсовские случайные поля с произвольным потенциалом. Полученный результат дает простой способ моделирования конфигураций, имеющих гиббсовское распределение.

### Библиографический список


1. *Georgii H.O.* Gibbs measures and phase transitions. Walter de Gruyter. Berlin New York, 1988.
2. *Averintsev M.B.* Gibbs description of random fields whose conditional probabilities may vanish. Probl. Inform. Transmiss. 11. 1975. P. 326–334
3. *Liggett T.M.* Interacting Particle Systems. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokio. 1989.
4. *Maruani A., Pechersky E., Sigelle M.* On Gibbs fields in image processing. Markov Processes Relat. Fields. 1. 1995. P. 419–442.
5. *Younes L.* Representation of Gibbs fields with synchronous random fields. Markov Processes Relat. Fields. 2. 1996. P. 285–316.


## О представлении функций из пространства $L^2$ их интегралами Фурье

*С.В. Зотиков*

В статье рассматриваются условия сходимости почти всюду интегралов Фурье функций из пространства $L^2$ по отношению к скрещенному произведению двух ортонормированных систем функций.

В качестве следствия одного из установленных результатов получен континуальный аналог теоремы Билларда о сходимости почти всюду ряда Фурье по системе Уолша функции $f \in L^2_{[0;1[}$ к самой функции.

Пусть на $[0;1[$ заданы две произвольные ортонормированные системы функций (о.н.с.) $\varphi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$. Положим $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\forall l \in \mathbf{N} (\mathbf{N} = \{0, 1, 2, ...\})$

$$\varphi_k(l + t) = \varphi_k(t), \quad \psi_k(l + t) = \psi_k(t), \quad \text{где} \;\; t \in [0; 1[.$$

Скрещенным произведением о.н.с. $\varphi$ на о.н.с. $\psi$ называется функция $K_{\varphi\psi}$, определенная на $\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R}_0$ соотношением

$$K_{\varphi\psi}(x; y) = \varphi_{[y]}(x) \cdot \psi_{[x]}(y),$$

где $[a]$ – целая часть числа $a \in \mathbf{R}_0$ (см. [1]). Легко видеть, что функция $K_{\varphi\psi}$ может рассматриваться как континуальный аналог каждой из о.н.с. $\varphi$ и $\psi$.

Если $\varphi$, $\psi$ – ограниченные о.н.с., то функция $K_{\varphi\psi}$ порождает для всякой функции $f \in L^1_{[0;+\infty[}$ интегральные преобразования вида

$$\overset{\wedge}{f}(y) = \int_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x; y)}dx, \;\; y \in \mathbf{R}_0$$

и

$$f^*(x) = \int_0^{\infty} f(y)K_{\varphi\psi}(x; y)dy, \;\; x \in \mathbf{R}_0,$$

которые являются аналогами классического преобразования Фурье и которые мы называем преобразованиями Фурье функции $f$ по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$. Очевидно, что преобразование $\overset{\wedge}{f}$ является континуальным аналогом коэффициентов Фурье функции $f$ по о.н.с. $\varphi$, а преобразование $f^*$ является континуальным аналогом коэффициентов Фурье той же функции по о.н.с. $\psi$.

Для произвольной функции $f$ из пространства $L^2_{[0;+\infty[}$ ее преобразования Фурье функции $f$ по отношению к произвольному скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ определены в работе [2] следующими соотношениями:

$$\overset{\wedge}{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx \quad \text{и} \quad f^*(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy.$$

При этом выполняются неравенства $||\overset{\wedge}{f}|| \leqslant ||f||$ и $||f^*|| \leqslant ||f||$. Если о.н.с. $\varphi$ является полной, то при любой о.н.с. $\psi$ имеет место равенство $||\overset{\wedge}{f}|| = ||f||$. Если же полной является о.н.с. $\psi$, то при любой о.н.с. $\varphi$ выполняется равенство $||f^*|| = ||f||$ (см.теоремы 1 и 2 в [2]). В случае, когда полна о.н.с. $\varphi$, при любой о.н.с. $\psi$ имеет место формула обращения преобразования $\overset{\wedge}{f}$ (см. теорему 1 в [3]):

$$f(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy,$$

если полной является о.н.с. $\psi$, то при любой о.н.с. $\varphi$ справедлива формула обращения преобразования $f^*$ (см. теорему 2 в [3]):

$$\overset{\wedge}{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$$

Ниже рассматриваются условия сходимости почти всюду интеграла Фурье функции $f$ по отношению к $K_{\varphi\psi}$ в правой части первого из записанных выше равенств к самой функции $f$. Для второго интеграла все рассмотрения аналогичны.

Итак, справедлива

**Теорема 1.** *Пусть ограниченная о.н.с. $\varphi$ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что ряд Фурье по системе $\varphi$ каждого сужения $f_k = f|_{[k;k+1[}$, $k = 0,1,2,\ldots$ почти всюду сходится к $f_k$, а*

$\overset{\wedge}{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$ – *преобразование Фурье функции $f$ в пространстве $L^2$ по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$, где $\psi$ – произвольная о.н.с. Тогда интеграл Фурье функции $f$ по отношению к $K_{\varphi\psi}$ сходится почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ к самой функции $f$, т.е. справедливо представление*

$$f(x) \doteq \int\limits_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy$$

**Доказательство.** Пусть о.н.с. $\varphi$ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ удовлетворяют условию доказываемой теоремы 1, а $\psi$ – произвольная о.н.с. Тогда определена функция $\overset{\wedge}{f}$: $\overset{\wedge}{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$ – преобразование Фурье функции $f$ по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$.

В силу теоремы 7 из [3] для любых функций $f$ и $g$ из $L^2_{[0;+\infty[}$ и их преобразований Фурье $\overset{\wedge}{f}$и $g^*$ по отношению к произвольному скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g^*(x)}dx \qquad (1)$$

С целью использовать равенство (1) возьмем в качестве функции g следующую финитную функцию

$$g(y) = \left[\begin{array}{l} \overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}, y \leqslant A \\ 0, y > A \end{array}\right. ,$$

где А – произвольное фиксированное число $\mathbf{R}_0$, а $x$ – любое число из $\mathbf{R}_0$. Покажем, что для любых А и $x$ из $\mathbf{R}_0$ функция g принадлежит пространству $L^2_{0;+\infty[}$. Действительно,

$$||g||^2 = \int\limits_0^\infty |g(y)|^2 dy = \int\limits_0^A |K_{\varphi\psi}(x;y)|^2 dy =$$
$$= \sum_{i=0}^{[A]-1} \int\limits_{[i;i+1[} |\varphi_{[y]}(x)|^2 \cdot |\psi_{[x]}(y)|^2 dy + \int\limits_{[A]}^{A} |\varphi_{[y]}(x)|^2 \cdot |\psi_{[x]}(y)|^2 dy =$$
$$+ \sum_{i=0}^{[A]-1} |\varphi_i(x)|^2 + |\varphi_{[A]}(x)|^2 \int\limits_{[A]}^{A} |\psi_{[x]}(y)|^2 dy \leqslant ([A]+1)C_\varphi <$$

$< +\infty$, т.к. $C_\varphi = \sup\limits_{n,t} |\varphi_n(t)| < +\infty$.

Теперь в силу теоремы 2 из [2] преобразование $g^*$ функции g по отношению к $K_{\varphi\psi}$ также принадлежит пространству $L^2_{[0;+\infty[}$. Поскольку g – финитная функция, то ее преобразование Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$ в пространствах $L^2_{[0;+\infty[}$ и $L^1_{[0;+\infty[}$ совпадают, и для $u \in \mathbf{R}_0$ имеем, используя определение $K_{\varphi\psi}$:

$$g^*(u) = \int\limits_0^\infty g(y) K_{\varphi\psi}(u;y) dy = \int\limits_0^A \overline{K_{\varphi\psi}(x;y)} K_{\varphi\psi}(u;y) dy =$$
$$= \sum_{k=0}^{[A]-1} \int\limits_{[k;k+1[} \overline{\varphi_{[y]}(x)} \cdot \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \varphi_{[y]}(u) \cdot \psi_{[u]}(y) dy$$
$$+ \overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int\limits_{[A]}^{A} \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \psi_{[u]}(y) dy =$$
$$= \left[ \begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{[A]-1} \overline{\varphi_k(x)} \cdot \varphi_k(u) + \overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int\limits_0^{\{A\}} |\psi_{[x]}(y)|^2 dy, [u] = [x] \\ \overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int\limits_0^{\{A\}} \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \psi_{[u]}(y) dy, [u] \neq [x], \end{array} \right. \tag{2}$$

где $x$ – произвольное фиксированное число из $\mathbf{R}_0$.

Теперь подставим $f$, $\hat{f}$, g и $g^*$ в равенство (1). Тогда

$$\int\limits_0^A \hat{f}(y) K_{\varphi\psi}(x;y) dy = \int\limits_0^\infty f(u) \overline{g^*(u)} du \tag{3}$$

Ввиду свойства $\sigma$- аддитивности интеграла Лебега и представления (2) имеем:

$$\int\limits_0^\infty f(u)\cdot\overline{g^*(u)}du = \int\limits_{[[x];[x]+1[} f(u)\cdot\overline{g^*(u)}du +$$
$$+\sum_{\substack{n=0\\ n\neq[x]}}^{\infty}\int\limits_{[n;n+1[} f(u)\cdot\overline{g^*(u)}du = \sum_{k=0}^{[A]-1}\left(\int\limits_{[x]}^{[x]+1} f(u)\overline{\varphi_k(u)}du\right)\varphi_k(x)+$$
$$+\varphi_{[A]}(x)\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_n^{n+1} f(u)\cdot\overline{\varphi_{[A]}(u)}du\int\limits_0^{\{A\}}\psi_{[x]}(y)\cdot\overline{\psi_n(y)}dy =$$
$$= S^{(\varphi)}_{[A]}(x;f_{[x]}) + R_A(x;f), \tag{4}$$

где первое слагаемое есть [A]-ая частичная сумма ряда Фурье по о.н.с. $\varphi$ функции $f_{[x]} = f|_{[[x];[x]+1[}$, составленная для точки $x$. По условию теоремы предел этой суммы при $A\to+\infty$ для почти всех $x$ равен $f(x)$. Конъюнкция соотношений (2) и (4) имплицирует равенство

$$\int\limits_0^A \overset{\wedge}{f}(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy \quad = \quad S^{(\varphi)}_{[A]}(x;f_{[x]}) + R_A(x;f). \tag{5}$$

Покажем теперь, что для $\forall x\in\mathbf{R}_0$ $\lim\limits_{A\to+\infty} R_A(x;f)=0$. Для произвольного $M\in\mathbf{N}$, с учетом ограниченности о.н.с. $\varphi$ и неравенства Коши для интегралов, имеем:

$$|R_A(x;f)| \leqslant C_\varphi\Big\langle\sum_{n=0}^{M-1}|\int\limits_0^\infty f(n+u)\cdot\overline{\varphi_{[A]}(u)}du|+$$
$$+\sum_{n=M}^{\infty}|\int\limits_n^{n+1} f(u)\cdot\overline{\varphi_{[A]}(u)}du|\cdot|\int\limits_0^{\{A\}}\psi_{[x]}(y)\cdot\overline{\psi_n(y)}dy|\Big\rangle.$$

Применяя ко второму слагаемому в скобках неравенства Коши для сумм и интегралов и неравенство Бесселя, приходим к соотношению:

$$|R_A(x;f)| \leqslant C_\varphi\left\langle\sum_{n=0}^{M-1}|\int\limits_0^1 f(n+u)\overline{\varphi_{[A]}(u)}du| + \sqrt{\int\limits_M^\infty |f(u)|^2du}\right\rangle.$$

Поскольку $f \in L^2_{[0;+\infty[}$, то второе слагаемое в скобках независимо от A может быть сделано меньше любого $\varepsilon > 0$ при соответствующем выборе $M$ $\in\mathbf{N}$. При таком M первое слагаемое в скобках в силу теоремы Мерсера станет меньше заданного $\varepsilon$ для $\forall A > A(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall\varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon)$ – такое, что при $\forall A > A(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_A(x;f)| < 2C_\varphi\varepsilon$ для $\forall x$ $\in\mathbf{R}_0$. Следовательно, $\lim\limits_{A\to+\infty} R_A(x;f) = 0$ при любом $x$ $\in\mathbf{R}_0$.

Наконец, учитывая все сказанное и переходя к пределу при $A \to +\infty$ в равенстве (3), завершаем доказательство теоремы 1.

Одной из самых замечательных о.н.с. в теории ортогональных рядов является система Уолша $w = (w_n)_{n=0}^{\infty}$ (см. ее определение в [4]). В 1967 году П. Биллардом был доказан аналог для системы Уолша известной теоремы А.Л. Карлесона, утверждающей, что ряд Фурье по тригонометрической системе любой функции из пространства $f \in L^2_{[0;2\pi]}$ сходится к этой функции почти всюду. Таким образом, справедлива (см. [4. С. 189–201]).

**Теорема Билларда.** *Для любой функции* $f \in L^2_{]0;1[}$ *частные суммы* $S_n(x;f)$ *ее ряда Фурье по системе Уолша сходятся к* $f(x)$ *почти всюду на* $[0;1]$.

Установим континуальный аналог этой теоремы.

Континуальный аналог самой системы Уолша строится на основе конструкции скрещенного произведения двух о.н.с. $K_{\varphi\psi}$. Взяв в качестве одной из компонент скрещенного произведения $K_{\varphi\psi}$ о.н.с. Уолша $w = (w_n)_{n=0}^{\infty}$, мы получим ее континуальные аналоги вида $K_{w\psi}$ и $K_{\varphi w}$, где в качестве$\varphi$ и $\psi$ могут выступать любые о.н.с., в том числе и сама система Уолша. Ниже рассматривается лишь функция $K_{w\psi}$.

Для произвольной функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ ее преобразования Фурье по отношению к $K_{w\psi}$ определяются равенствами

$$\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^{\infty} f(x)\overline{K_{w\psi}(x;y)}dx \quad \text{и} \quad f^*(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^{\infty} f(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

Первое из этих преобразований мы называем преобразованием

Фурье-Уолша функции $f$ в пространстве $L^2_{[0;+\infty[}$. Интеграл $J_A(f;x) = \int_0^A \overset{\wedge}{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy$ будем называть частным интегралом Фурье-Уолша функции $f$, а его предел при $A \to +\infty$ в метрике $L^2$, то есть $\underset{A\to+\infty}{l.i.m}\ J_A(f;x) = \int_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy$ будем называть интегралом Фурье-Уолша функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$. Поскольку система Уолша полна, то имеет место формула обращения преобразования Фурье-Уолша

$$f(x) \overset{L^2}{=} \int_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

Теперь из теоремы 1 и теоремы Билларда выводим континуальный аналог результата Билларда.

**Теорема 2.** *Пусть $f$ – произвольная функция из пространства $L^2_{[0;+\infty[}$, $\psi$ – любая о.н.с., а $\overset{\wedge}{f}(y) \overset{L^2}{=} \int_0^\infty f(x)\overline{K_{w\psi}(x;y)}dx$ – преобразования Фурье-Уолша функции $f$ по отношению к $K_{w\psi}$. Тогда интеграл Фурье-Уолша функции $f$ сходится почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ к самой функции $f$, то есть справедливо представление*

$$f(x) \doteq \int_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

В теореме 1 для представления почти всюду функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ ее интегралом Фурье по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ требовалась ограниченность первой компоненты $K_{\varphi\psi}$. В следующем утверждении первая компонента $K_{\varphi\psi}$ может быть и неограниченной о.н.с. Точнее, справедлива

**Теорема 3.** *Пусть о.н.с. $\varphi$ и $\psi$ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что для преобразования Фурье $\overset{\wedge}{f}$ функции $f$ по отношению к $K_{\varphi\psi}$ почти всюду выполнено равенство*

$$\overset{\wedge}{f}(y) = \int_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx.$$

*Если ряд Фурье по о.н.с. $\varphi$ любого сужения $f_k = f|_{[k;k+1[}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ п.в. сходится к $f_k$, то почти всюду на $R_0$ имеет место представление*

$$f(t) = \int_0^{\infty} \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy.$$

**Доказательство.** Пусть о.н.с. $\varphi$ и $\psi$ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что выполнено условие теоремы 3. Оценим сверху модуль разности между значением функции $f$ в произвольной точке $t \in \mathbf{R}_0$ и ее частным интегралом Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$, вычисленным в точке $t$:

$$\begin{gathered} |f(t) - \int_0^A \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy| \leqslant \\ \leqslant |f(t) - \int_0^{[A]} \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy| + |\int_{[A]}^{A} \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy| \end{gathered} \tag{6}$$

Поскольку по условию теоремы почти всюду на $\mathbf{R}_0$ выполнено равенство $\overset{\wedge}{f}(y) = \int_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$, то имеем с учетом соотношения (2)

$$\int_0^{[A]} \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy = \int_0^{\infty} f(x) \int_0^{[A]} K_{\varphi\psi}(t;y) \cdot \overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dydx = S^{(\varphi)}_{[A]}(t; f_{[t]}),$$

$S^{(\varphi)}_{[A]}(t; f_{[t]})$ есть $[A]$-я частичная сумма ряда Фурье по о.н.с. $\varphi$ функции $f_{[t]} = f|_{[[t];[t]+1[}$, составленная для точки $t$. В силу условия теоремы для почти всех $t$ выполняется $\lim\limits_{A \to +\infty} S^{(\varphi)}_{[A]}(t; f_{[t]}) = f(t)$, поэтому предел при $A \to +\infty$ первого слагаемого правой части неравенства (4) для почти всех $t \in \mathbf{R}_0$ равен нулю.

Далее, оценивая с помощью неравенства Коши квадрат второго слагаемого правой части неравенства (4), получаем для $\forall A \in \mathbf{R}_0$ и для $\forall t \in \mathbf{R}_0$:

$$\left|\int\limits_{[A]}^{A} \overset{\wedge}{f}(y) K_{\varphi\psi}(t;y)dy\right|^2 \leqslant \quad |\varphi_{[A]}(t)|^2 \int\limits_{[A]}^{[A]+1} |\overset{\wedge}{f}(y)|^2 dy \tag{7}$$

Теперь покажем, что для почти всех $t \in \mathbf{R}_0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(t)|^2 \int\limits_{k}^{k+1} |\overset{\wedge}{f}(y)|^2 dy \quad . \tag{8}$$

Для этого рассмотрим соответствующий проинтегрированный ряд по промежутку $[j; j+1[$, $j \in \mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{j}^{j+1} |\varphi_k(t)|^2 \int\limits_{k}^{k+1} |\overset{\wedge}{f}(y)|^2 dy dt = ||\overset{\wedge}{f}||^2. \tag{9}$$

Поскольку функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$, ее преобразование Фурье $\overset{\wedge}{f}$ также принадлежит пространству $L^2_{[0;+\infty[}$, причем $||\overset{\wedge}{f}|| \leqslant ||f||$. Таким образом, ряд в левой части равенства (9) сходится. Но тогда в силу теоремы Б. Леви почти всюду на $[j; j+1[$ сходится ряд (8), а потому при почти всех $t \in [j; j+1[$ имеем

$$|\varphi_{[A]}(t)|^2 \int\limits_{[A]}^{[A]-1} |\overset{\wedge}{f}(y)|^2 dy \to 0 \quad \text{при} \quad A \to +\infty.$$

Так как $j$ выбиралась произвольным из $\mathbf{N}$, то последнее соотношение имеет место для почти всех $t \in \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} [j; j+1[= \mathbf{R}_0$. С учетом этого, из неравенства (5) следует, что второе слагаемое правой части неравенства (4) стремится к нулю при $A \to +\infty$ при почти всех $t \in \mathbf{R}_0$. Переход к пределу при $A \to +\infty$ в неравенстве (4) завершает доказательство теоремы 3.

Известно, что ряд Фурье по системе Хаара (см. ее определение в [1]) всякой интегрируемой функции сходится почти всюду к этой функции. Поэтому из теоремы 3 выводим следующее утверждение:

**Теорема 4.** *Если $\chi$ – система Хаара, а о.н.с. $\psi$ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что для преобразования Фурье-Хаара $\overset{\wedge}{f}$ функции $f$ по отношению к $K_{\chi\psi}$ справедливо почти всюду равенство $\overset{\wedge}{f}(y) \overset{п.в.}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\chi\psi}(x;y)}dx$, то функция $f$ почти всюду представима своим интегралом Фурье-Хаара , т.е.*

$$f(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \int\limits_0^\infty \overset{\wedge}{f}(y) K_{\chi\psi}(t;y)dy.$$

Замечание. Утверждение теоремы 4 будет заведомо выполнено, если в качестве о.н.с. $\psi$ взять тригонометрическую систему $\psi_k(t) = e^{2\pi nit}$, $t \in [0;1]$, $n \in \mathbf{Z}$, или систему Уолша, т.е. $\psi = w$.

## Библиографический список


1. *Виленкин Н.Я., Зотиков С.В.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций // Математические заметки. 1973. Т. 13. № 3. С. 469–480.
2. *Зотиков С.В.* Определение преобразования и интеграла Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве $L^2$. Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1988. С. 26–32.
3. *Зотиков С.В.* О формулах обращения преобразований Фурье функций из пространства $L^2$ и континуальных аналогах равенства Парсеваля // Методология и история математики: Сборник научных трудов / Под ред. Н.М. Матвеева. СПб., 2003. М.: Изд. дом "Руда и металлы", 2003. Т. 4. С. 82–89.
4. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 344 с.

# О нелокальных бифуркациях векторных полей на бутылке Клейна

*В.Ш. Ройтенберг*

В работе описаны бифуркации в типичных однопараметрических семействах векторных полей без особых точек на бутылке Клейна.

**1. Определения и обозначения.** Мы предполагаем известными основные понятия теории гладких динамических систем на многообразиях [1]. Будем обозначать $\mathrm{X}^r(\mathrm{K}^2)$ – банахово пространство векторных полей класса $C^r$ с $C^r$-нормой на бутылке Клейна $\mathrm{K}^2$, $\mathrm{X}^r_+ = \{X \in \mathrm{X}^r(\mathrm{K}^2) : \forall x \in \mathrm{K}^2\ |X(x)| > 0\}$ – его открытое подмножество, состоящее из *невырожденных векторных полей* (векторных полей без особых точек). В дальнейшем $r \geqslant 11$.

Пусть E – числовой отрезок. *Однопараметрическим семейством векторных полей на* $\mathrm{K}^2$ (с базой E) назовем $C^k$-отображение $\mathrm{E}\ni\varepsilon\mapsto X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r_+$. Будем обозначать его $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathrm{E}}$ или $\{X_\varepsilon\}$ и рассматривать как элемент топологического пространства $\Phi^{k,r}(\mathrm{E},\mathbf{K}^2) = C^k(\mathrm{E},\mathrm{X}^r_+)$. В дальнейшем $k \geqslant 7$.

Семейство $\{X_\varepsilon\}$ $\in\Phi^{k,r}(\mathrm{E},\mathbf{K}^2)$ называется *слабо структурно устойчивым*, если существует такая его окрестность $U$, что для любого семейства $\{\tilde{X}_\varepsilon\} \in U$ существует гомеоморфизм $\tau$:E $\to$ E такой, что для любого $\varepsilon \in \mathrm{E}$ векторные поля $X_\varepsilon$ и $\tilde{X}_{\tau(\varepsilon)}$ топологически эквивалентны.

Обозначим $\Sigma^0_+$ – подмножество в $\mathrm{X}^r_+$, состоящее из грубых векторных полей, $\Sigma^1_+$ – подмножество в $\mathrm{X}^r_+\backslash\Sigma^0_+$, состоящее из векторных полей, все замкнутые траектории которых гиперболические, за исключением одной, являющейся односторонним или двухсторонним двойным циклом (квазигиперболической замкнутой траекторией). Пусть $\Sigma^{1,1}_+$ – часть $\Sigma^1_+$, состоящая из векторных полей с односторонним двойным циклом, $\Sigma^{1,2}_+$ – часть $\Sigma^1_+$, состоящая из векторных полей с двухсторонним двойным циклом и хотя бы с еще одной замкнутой траекторией, а $\Sigma^{1,*}_+ = \Sigma^1_+\backslash(\Sigma^{1,1}_+ \cup \Sigma^{1,2}_+)$. Согласно [2] множества $\Sigma^{1,1}_+$, $\Sigma^{1,2}_+$ и $\Sigma^{1,*}_+$ являются погруженными $C^{r-1}$-подмногообразиями коразмерности один в $\mathrm{X}^r_+$.

Везде в дальнейшем окружность $\mathbf{S}^1=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

**2. Определяющий диффеоморфизм.** Пусть $X\in\Sigma_+^{1,*}$ и $\Gamma$ – двойной цикл векторного поля $X$. Из [3, 4] следует существование такого $C^{r-3}$-диффеоморфизма $h$ кольца $(-1,1)\times\mathbf{S}^1$ на окрестность $U(\Gamma)$ цикла $\Gamma$, что $h(\{0\}\times\mathbf{S}^1)=\Gamma$, а векторное поле $X|_{U(\Gamma)}$ имеет те же траектории, что и векторное поле $X^*$, имеющее в циклических координатах $(u,s)$, задаваемых $h$ в $U(\Gamma)$, вид $X^*=P_0(u)\partial/\partial u+1\partial/\partial s$, где $P_0\in C^{r-3}$, $P_0(u)=u^2+(u^2)$, $P_0(u)>0$ при $u\neq 0$. Выберем число $d\in(0,1)$. Поскольку $P_0(\pm d)>0$, то замкнутые кривые $\Gamma^{\pm}=h(\{\pm d\}\times\mathbf{S}^1)$ являются трансверсалями для векторного поля $X$. Так как $\Gamma$ – единственное предельное множество для траекторий поля $X$, то определено отображение $\Gamma^+$ на $\Gamma^-$ по траекториям поля $X$: $h(d,s)\to h(-d,f(s))$, где $f:\ \mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$ – $C^{r-3}$-диффеоморфизм, меняющий ориентацию. Назовем $f$ *определяющим диффеоморфизмом* векторного поля $X$. Он зависит от выбора диффеоморфизма $h$ и числа $d$.

**Лемма.** *Пусть $f$ и $f^*$ – определяющие диффеоморфизмы векторного поля $X$. Тогда найдутся точки $a\in\mathbf{S}^1$, $b\in\mathbf{S}^1$, такие, что для любого $s\in\mathbf{S}^1$ $f^*(s)=f(s+a)+b$.*

**3. Бифуркационное многообразие $\Sigma_+^{1,3}$.** Пусть $f$ – определяющий диффеоморфизм векторного поля $X_0\in\Sigma_+^{1,*}$. Так как $f$ меняет ориентацию, то для накрывающего диффеоморфизма $\bar f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ имеем $\bar f(s+1)=\bar f(s)-1$ при всех $s\in\mathbf{R}$.

Введем однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $f_\mu:\mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$, $\mu\in\mathbf{S}^1$, $f_\mu(s)=f(s)+\mu$, и отображение $M$: $\mathbf{S}^1\to\mathbf{S}^1$, $M(s)=s-f(s)$, являющееся двукратным накрытием. Отметим, что $\forall\mu\in\mathbf{S}^1\,M^{-1}(\mu)$ состоит из двух точек, являющихся неподвижными для $f_\mu$, остальные периодические точки $f_\mu$ имеют период 2.

Введем также кривую $\mathbf{B}$ на трехмерном торе $\mathbf{T}^3=\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1\times\mathbf{S}^1$, точки $(x,\ y,\ \mu)$ которой удовлетворяют уравнениям $f_\mu(x)=y$, $f_\mu(y)=x$. Множество $\mathbf{B}_\Delta=\{(x,\ y,\ \mu)\in\mathbf{B}\colon x=y\}$ состоит из точек $(x,\ x,\ M(x))$, $x\in\mathbf{S}^1$ и является одномерным замкнутым подмногообразием в $\mathbf{T}^3$. Обозначим $\mathbf{B}_0=\mathbf{B}\setminus\mathbf{B}_\Delta$. Если точка $(x,y,\mu)$ принадлежит $\mathbf{B}_0$, то *симметричная ей точка* $(y,\ x,\ \mu)$ также принадлежит $\mathbf{B}_0$.

Перечислим *условия* $1^0$–$4^0$, *определяющие векторные поля из* $\Sigma_+^{1,3}$. Фактически их смысл состоит в том, что семейство диффеоморфизмов $f_\mu$ находится "в общем положении".

$1^0$. *Существует конечное число точек* $s_i \in \mathbf{S}^1$ $(i=1,..,n^*)$, *в которых* $f'(s_i) = -1$; *в каждой из них* $f''(s_i) \neq 0$, $\tau_i := -2f'''(s_i) - 3[f''(s_i)]^2 \neq 0$.

Очевидно, что $n^* = 2n > 0$. Обозначим $\mu_{1i}:=M(s_i)$ $(i=1,..,2n)$. Из условия $1^0$ следует, что у диффеоморфизма $f_\mu$ негиперболическая неподвижная точка есть только при $\mu=\mu_{1i}$ $(i=1,..,2n)$, и в этой точке $s_i$ $(f_\mu^2)'(s_i) - 1 = (f_\mu^2)''(s_i) = 0$, $(f_\mu^2)'''(s_i) = \tau_i \neq 0$.

Особыми точками кривой $\mathbf{B}$ являются точки, в которых $rank \begin{pmatrix} f'(x) & -1 & 1 \\ -1 & f'(y) & 1 \end{pmatrix} < 2$, то есть $f'(x)+1 = f'(y)+1 = 0$. В силу условия $1^0$ особые точки $\mathbf{B}$, принадлежащие $\mathbf{B}_\Delta$, это точки $(s_i,\, s_i,\, \mu_{1i})$, $i=1,..,2n$. Потребуем, чтобы других особых точек у $\mathbf{B}$ не было:

$2^0$. *В точках* $(x,\, y,\, \mu) \in \mathbf{B}_0$ $(f'(x)+1)^2 + (f'(y)+1)^2 \neq 0$.

Пусть $\Pi$: $\mathbf{B} \to \mathbf{S}^1$ – проекция: $\Pi(x,\, y,\, \mu) = \mu$.

$3^0$. *Отображение* $\Pi|_{\mathbf{B}_0}$ *имеет конечное число (причем невырожденных) критических точек* $p_j=(x_j,\, y_j,\, \mu_{2j})$, $j=1,2,\ldots,m_*$: $d\Pi(p_j)=0$, $d^2\Pi(p_j) \neq 0$.

В силу симметрии $\mathbf{B}_0$ $m_*=2m$ $(m=0,1,\ldots)$. Кроме того, мы можем считать, что точки пронумерованы так, что $x_{j+m} = y_j$, $y_{j+m} = x_j$, $\mu_{2j+m}=\mu_{2j}$, $f'(y_j)+1 \neq 0$ при $j=1,\ldots,m$. Нетрудно убедиться, что $d\Pi(p_j)=0 \Leftrightarrow f'(x_j)\, f'(y_j)=1$, $d^2\Pi(p_j) \neq 0 \Leftrightarrow \rho_j \neq 0$, где обозначено $\rho_j = f''(y_j)[f'(x_j)]^2 + f''(x_j)f'(y_j)$. С другой стороны, $(f_\mu^2)'(x_j) = f'(f_\mu(x_j))f'(x_j)$, $(f_\mu^2)''(x_j) = \rho_j$ и, следовательно, условия $3^0$ означают, что диффеоморфизм $f_\mu$ имеет негиперболические периодические точки только при $\mu=\mu_{2j}$ $(j=1,2,\ldots,2m)$, это точки $x_j$ и $y_j$, и они двукратны.

Точки $(s_i,\, s_i,\, \mu_{1i})$, $i=1,..,2n$, и $p_j=(x_j,\, y_j,\, \mu_{2j})$, $j=1,2,\ldots,2m$ назовем *специальными точками.*

$4^0$. *Если* $p'=(x',y',\mu')$ *и* $p''=(x'',y'',\mu'')$ – *различные несимметричные специальные точки, то* $\mu' \neq \mu''$.

В силу леммы условия $1^0$–$4^0$ не зависят от выбора определяющего диффеоморфизма и потому являются условиями, наложенными на векторное поле $X_0$.

**Теорема 1.** *Множество* $\Sigma_+^{1,3}$ *открыто и всюду плотно в* $\Sigma_+^{1,*}$.

**4. Бифуркации векторных полей из $\Sigma_+^{1,3}$.** Пусть семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|\leqslant\delta}$ трансверсально пересекает $\Sigma_+^{1,3}$ при $\varepsilon=0$. Тогда двойной цикл Г поля $X_0$ исчезает либо при возрастании, либо при убывании $\varepsilon$ : существует число $\delta_0 \in(0,\delta)$ и окрестность Г, не содержащая замкнутых траекторий поля $X_\varepsilon$, соответственно, либо при $\varepsilon\in(0,\delta_0)$, либо при $\varepsilon\in(-\delta_0,0)$.

Пусть $f$ – определяющий диффеоморфизм векторного поля $X_0$. Будем рассматривать бутылку Клейна как $(\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1)/\sim$, где $(x,s)\sim(x+1,-s)$. С помощью конструкции надстройки (см., например, [1. С. 152]) мы можем построить векторные поля $V_\mu \in \mathrm{X}_+^{r-4}$, непрерывно зависящие от $\mu\in\mathbf{S}^1$, так, чтобы кривая, задаваемая уравнением $x=0$, была для них трансверсалью, а функции $f_\mu(s)=f\,(s)+\mu$ – функциями последования на этой трансверсали. Векторные поля $V_\mu$ будут "моделями" векторных полей $X_\varepsilon$ при исчезновении двойного цикла.

Опишем бифуркации в семействе векторных полей $V_\mu$ , $\mu\in\mathbf{S}^1$, используя свойства диффеоморфизмов $f_\mu$. Бифуркационными значениями параметра $\mu$ (то есть значениями, при которых $V_\mu \in \mathrm{X}_+^r\backslash\Sigma_+^0$) являются либо точки $\mu_{1i}(i=1,..,2n)$, либо точки $\mu_{2j}$ $(j=1,2,\ldots,m)$. Их число $2n+m \geqslant 2$.

Векторное поле $V_\mu$ при $\mu=\mu_{1i}(i=1,..,2n)$ имеет единственную негиперболическую замкнутую траекторию – односторонний двойной цикл $\Gamma(\mu_{1i})$, проходящий через точку $s_i$ трансверсали $x=0$ и устойчивый (неустойчивый) при $\tau_i<0$ $(\tau_i>0)$. Кроме того, оно имеет одностороннюю замкнутую траекторию, проходящую через точку $s_{i*}$ трансверсали $x=0$ $(\{s_i,s_{i*}\}=M^{-1}(\mu_{1i}))$, устойчивую (неустойчивую) при $f'(s_{i*})+1>0(<0)$, и может иметь двухсторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x=0$ в точках $s'$ и $s''$, для которых точка $(s',s'',\mu_{2j})\in\mathrm{B}_0$.

При $\mu$, достаточно близких к $\mu_{1i}$, из $\Gamma(\mu_{1i})$ рождаются 1) в случае $\tau_i f''(s_i)(\mu - \mu_{1j}) < 0$ односторонняя гиперболическая замкнутая траектория, устойчивая (неустойчивая) при при $\tau_i<0$ ($\tau_i > 0$); 2) в случае $\tau_i f''(s_i)(\mu - \mu_{1j}) > 0$ односторонняя неустойчивая (устойчивая) гиперболическая замкнутая траектория и двухсторонняя устойчивая (неустойчивая) гиперболическая замкнутая траектория при $\tau_i < 0$ ($\tau_i > 0$).

Векторное поле $V_\mu$ при $\mu = \mu_{2j}$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) имеет единственную негиперболическую замкнутую траекторию – двухсторонний двойной цикл $\Gamma(\mu_{2j})$, пересекающий трансверсаль $x$=0 в точках $x_j$ и $y_j$ . Кроме того, оно имеет две односторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x$=0 в точках множества $\{\xi_j^1, \xi_j^2\} = M^{-1}(\mu_{2j})$, устойчивые (неустойчивые) при $f'(\xi_j^l) + 1 > 0 (< 0)$, и может иметь двухсторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x$=0 в точках $s'$ и $s''$, для которых точка $(s', s'', \mu_{2j}) \in \mathbf{B}_0$. Если $\mu$ достаточно близко к $\mu_{2j}$, то при $\rho_j(f'(\xi_j)+1))(\mu - \mu_{2j}) > 0$ двойной цикл $\Gamma(\mu_{2j})$ исчезает, а при $\rho_j(f'(\xi_j)+1))(\mu - \mu_{2j}) < 0$ распадается на две гиперболические замкнутые траектории – устойчивую и неустойчивую.

**Теорема 2.** *Пусть семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|\leqslant\delta}$ трансверсально пересекает $\Sigma_+^{1,3}$ при $\varepsilon$=0 и двойной цикл $\Gamma$ поля $X_0$ исчезает при возрастании $\varepsilon$. Тогда существуют числа $\delta_0 > 0$, $N_0 > 0$ и отображение $g : (0, \delta_0) \to \mathbf{S}^1$, являющееся композицией меняющего ориентацию диффеоморфизма $\bar{g} : (0, \delta_0) \to (N_0, +\infty)$ и стандартной проекции $\mathbf{R}\to\mathbf{S}^1$, со следующими свойствами:*

1) *Для любого $\varepsilon\in(0, \delta_0)$ векторные поля $X_\varepsilon$ и $V_{g(\varepsilon)}$ топологически эквивалентны.*

2) *Значение параметра $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ является бифуркационным для семейства $\{X_\varepsilon\}$ тогда и только тогда, когда значение параметра $\mu = g(\varepsilon)$ является бифуркационным для семейства $\{V_\mu\}$.*

3) *Если $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ является бифуркационным значением параметра для семейства $\{X_\varepsilon\}$, то $X_{\varepsilon_0} \in \Sigma_+^{1,1} \cup \Sigma_+^{1,2}$ и семейство трансверсально $\Sigma_+^{1,1} \cup \Sigma_+^{1,2}$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$.*

4) *У векторного поля $X_\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,\delta_0)$, не существует двухсто-*

*ронней замкнутой траектории, непрерывно зависящей от $\varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, \delta_0)$.*

5) *Для любого $\varepsilon \in (-\delta_0, 0)$ векторное поле $X_\varepsilon \in \Sigma^0_+$. Оно имеет две двухсторонние замкнутые траектории. Все остальные траектории предельны к ним.*

Приведем набросок доказательства утверждений 1)–3). Сначала делается замена параметра $\bar\varepsilon = a_0(\varepsilon)$ и выбираются циклические координаты $(x, s \bmod 1)$ в окрестности Г так, что векторное поле $X_\varepsilon$ имеет в этой окрестности те же траектории, что и векторное поле

$$X^*_{\bar\varepsilon} = P(x, s, \bar\varepsilon)\partial/\partial x + 1\partial/\partial s,$$
$$P(x, s, \bar\varepsilon) = \bar\varepsilon + P_0(x) + \bar\varepsilon a(x, \bar\varepsilon) + \bar\varepsilon x^2 b(x, s, \varepsilon),$$

где $a$ и $b$ – $C^3$-функции. Далее черту над $\bar\varepsilon$ будем опускать.

При достаточно малых $d>0$ и $\varepsilon_*>0$ замкнутые кривые $l^\pm_\varepsilon : x = \pm d$ являются трансверсалями для векторного поля $X_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$, и, следовательно, определен диффеоморфизм $l^+_\varepsilon$ на $l^-_\varepsilon$ по траекториям $X_\varepsilon$, имеющий в координатах вид $(d, s) \mapsto (-d, f^*(s, \varepsilon))$, где $f^* \in C^3$, а $f = f^*(\cdot\,, 0)$ – определяющий диффеоморфизм поля $X_0$. Если $d$ и $\varepsilon_*$ достаточно малы, то в окрестности $U_\varepsilon$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$, цикла Г, задаваемой неравенством $|x| < 2d$, определено векторное поле $X^{**}_\varepsilon = \partial/\partial x + (1/P(x, s, \varepsilon))\partial/\partial s$, имеющее те же траектории, что и векторное поле $X_\varepsilon|_{U_\varepsilon}$. В координатах траектория поля $X^{**}_\varepsilon$, проходящая через точку $(-d, s_0)$, имеет уравнение $s = S(x, s_0, \varepsilon)$, $x \in (-2d, 2d)$, где $S \in C^3$, $S(-d, s_0, \varepsilon) = s_0$. Отображение $\bar\varphi(\cdot\,, \varepsilon) = S(d, \cdot\,, \varepsilon)$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является диффеоморфизмом, накрывающим диффеоморфизм $\varphi(\cdot\,, \varepsilon) : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ – функцию соответствия по траекториям поля $X_\varepsilon$ между замкнутыми трансверсалями $l^-_\varepsilon$и $l^+_\varepsilon$. Функция $\mathrm{M}(\varepsilon) = \int_{-d}^{d} (\varepsilon + P_0(x))^{-1} dx$ является $C^3$-диффеоморфизмом на $(0, \infty)$, меняющим ориентацию. Пусть Е – обратный диффеоморфизм. Обозначим $R(s, \varepsilon) = \bar\varphi(s, \varepsilon) - s - \mathrm{M}(\varepsilon)$, $F_\mu(s) = \varphi(f^*(s, \mathrm{E}(\mu)), \mathrm{E}(\mu))$, $\mu \in (\mathrm{M}(\varepsilon_*), \infty)$. Диффеоморфизм $F_\mu$: $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ является функцией последования на трансверсали $l^+_\varepsilon$ по траекториям поля $X_\varepsilon$, $\varepsilon = \mathrm{E}(\mu)$. Представим накрывающий его диффеоморфизм $\bar F_\mu$ в виде $\bar F_\mu(s) = \bar f(s) + \mu + G(s, \mu)$, где

$G(s,\mu) = \bar{f}^*(s, \mathrm{E}(\mu)) - \bar{f}(s) + R(\bar{f}^*(s, \mathrm{E}(\mu)), \mathrm{E}(\mu))$.

Далее будем использовать универсальную постоянную $D>0$, конкретное значение которой не существенно. Из очевидной оценки $D^{-1}(\varepsilon + x^2) \leqslant \varepsilon + P_0(x) \leqslant D(\varepsilon + x^2)$ следует, что

$$D^{-1}\mu^{-2} \leqslant \mathrm{E}(\mu) \leqslant D\mu^{-2}, \qquad \left|\mathrm{E}^{(q)}(\mu)\right| \leqslant D\mu^{-2-q} \ (q = 1, 2). \tag{1}$$

Для функции $R$ имеем следующие оценки

$$|\partial^p R(s,\varepsilon)/\partial s^p| \leqslant D\varepsilon^{0.5}, \ \ p \in \{0,\, 1,\, 2,\, 3\}, \tag{2}$$

$$|\partial R(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon| + \left|\partial^2 R(s,\varepsilon)/\partial s\partial\varepsilon\right| \leqslant D\varepsilon^{-1}, \left|\partial^2 R(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon^2\right| \leqslant D\varepsilon^{-2.5}. \tag{3}$$

Докажем, например, (2) при $p$=1. Производная $S'_s$ удовлетворяет уравнению в вариациях $\frac{d}{dx}S'_s = A(x,s,\varepsilon)S'_s$, где $A(x,s,\varepsilon) = -P^{-2}(x,\theta)(\varepsilon a'_s(\theta) + \varepsilon x^2 b'_s(x,\theta))$, $\theta = (S(x,s,\varepsilon),\varepsilon)$, и начальному условию $S'_s(-d,s,\varepsilon) = 1$. Поэтому $\bar{\varphi}'_s(s,\varepsilon) = S'_s(d,s,\varepsilon) = \exp\int_{-d}^{d} A(x,s,\varepsilon)dx$. Нетрудно проверить, что $|A(x,s,\varepsilon)| \leqslant D\varepsilon(\varepsilon + x^2)^{-1}$. Учитывая, что $|\exp t - 1| < 3t$ при $|t| < 1$, получаем, что $|R'_s(s,\varepsilon)| = |\bar{\varphi}'_s(s,\varepsilon) - 1| \leqslant D\varepsilon^{0.5}$, то есть имеем искомую оценку.

Из (1)–(3) вытекает, что при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p+q \leqslant 2$ и $p=3$, $q=0$

$$\left|\partial^{p+q}G(s,\mu)/\partial s^p\partial\mu^q\right| \leqslant D\mu^{-1}. \tag{4}$$

Мы можем рассматривать $\{f_\mu\}$ как семейство диффеоморфизмов, зависящих от параметра $\mu \in [N,\ N+1]$. Условия $1^0$–$4^0$ влекут слабую структурную устойчивость этого семейства и трансверсальность бифуркационным многообразиям. Тогда в силу оценки (4) при достаточно большом $N$ семейство диффеоморфизмов $\{F_\mu\}$, $\mu \in [N,\ N+1]$, слабо топологически эквивалентно семейству $\{f_\mu\}$, $\mu \in [N,\ N+1]$ и трансверсально бифуркационным многообразиям. Это равносильно утверждениям 1)–3) теоремы.

**Замечание.** В работе [5] построен пример семейства $\{X_\varepsilon\}$ векторных полей из $\mathrm{X}^r_+$, для которого $X_0 \in \Sigma^{1,*}_+$, а при $\varepsilon>0$ двойной цикл исчезает и $X_\varepsilon \in \Sigma^0_+$. В этом примере $X_0 \notin \Sigma^{1,3}_+$, а $X_\varepsilon$ разрывно зависит от $\varepsilon$ при $\varepsilon$=0.

**5. Слабо структурно устойчивые семейства векторных полей.** Пусть $\Phi^{k,r} = \Phi^{k,r}([\alpha,\ \beta],\ \mathrm{K}^2)$. Обозначим $\mathrm{S}\Phi^{k,r}$ множество таких семейств $\{X_\varepsilon\} \in \mathrm{S}\Phi^{k,r}$, что

1) $X_\alpha \in \Sigma^0_+$, $X_\beta \in \Sigma^0_+$;

2) если $\varepsilon_0$ – бифуркационное значение параметра $\varepsilon$, то есть $X_{\varepsilon_0} \in \mathrm{X}^r_+ \setminus \Sigma^0_+$, то $X_{\varepsilon_0} \in \Sigma^{1,k}_+$ при некотором $k \in \{1,2,3\}$, и семейство трансверсально $\Sigma^{1,k}_+$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

**Теорема 3.** *Множество* $\mathrm{S}\Phi^{k,r}$ *а) открыто и всюду плотно в* $\Phi^{k,r}$; *б) состоит из слабо структурно устойчивых семейств векторных полей.*

Полные доказательства теорем 1–3 приведены в [6].

## Библиографический список

1. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986.

2. *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.

3. *Newhaus S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorfisms // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5–71.

4. *Бородин А.В.* О вложении диффеоморфизма класса $C^3$ в векторное поле // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2001. С. 14–37.

5. *Медведев В.С* О новом типе бифуркаций на многообразиях // Матем. сб. 1980. Т. 113. С. 485–492.

6. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации невырожденных векторных полей на бутылке Клейна // Деп. в ВИНИТИ, 1995. № 2608-В95. 59 с.

# Глава 3

# Теория и методика обучения математике в школе и вузе

## Болонский процесс и стратегия математического образования

*В.А. Тестов*

Вступление России в Болонский процесс поставило перед математическим образованием вообще и математическим образованием учителей в частности целый ряд новых проблем. Хотя провозглашенные европейскими министрами образования принципы Болонского процесса выглядят довольно привлекательно (повышение качества образования и установление совместимых общеевропейских критериев его оценки, введение единого для всей Европы механизма учета освоенного студентом содержания образования, создание условий для значительного повышения мобильности студентов и преподавателей, введение двухуровневого образования), тем не менее, педагогическую общественность тревожит вопрос о том, насколько предлагаемые пути реализации этих принципов согласуются со стратегией образования и действительно будут ли они способствовать повышению качества образования.

У преподавателей вузов, ученых-педагогов многих стран Европы вызывает тревогу то обстоятельство, что предлагаются единые пути для всех стран и народов без учета их традиций, достижений, без учета особенностей их национального образования. Кроме того, не учитываются специфические особенности подготовки специалиста в конкретной области. Невозможно по одной схеме готовить юристов и математиков, инженеров и педагогов.

Для российского высшего образования традиционной является моноуровневая система, которая ориентирована на подготовку специалиста определенного вида профессиональной деятельности. Для этой системы характерна фундаментальная подготовка специалиста, что сегодня является основой профессиональной гибкости, требуемой постоянно изменяющимися условиями современного рынка труда.

Фундаментальная научная подготовка может быть осуществлена только с учетом целого ряда дидактических принципов (научности, систематичности и последовательности и т.д.). На фундаментальность вузовской подготовки, особенно на младших курсах, всегда обращалось особое внимание в российской высшей школе. Как отмечал в своем докладе на 7-м съезде союза ректоров В.А. Садовничий, в отличие от других наций, мы сразу стали учиться научно мыслить и учить студенчество мыслить целостными, фундаментальными теориями и действовать в практике сообразно методам получения таких фундаментальных знаний. На этой основе взросли наша академическая наука, университеты, общеобразовательная школа. В этом – одна из важнейших национальных традиций российского образования, которая сейчас оказалась под угрозой.

При переходе на двухступенчатое образование (бакалавриат – магистратура) необходимо учитывать специфику подготовки будущих специалистов. Так, предлагаемый переход наибольшие трудности создает для математического образования.

Сама по себе идея перехода на двухступенчатое образование не несет в себе ничего деструктивного. Весь вопрос в том, по какому принципу производить такое разделение на ступени. Документами, сопровождающими Болонский процесс, предлагается первый цикл (ступень) высшего образования сориентировать на приобретение компетенций исполнительского типа, а второй – на развитие творческих способностей. Этот принцип вполне может быть осуществлен при подготовке многих специалистов, прежде всего гуманитариев. Не случайно в МГУ уже около 15 лет ведется подготовка бакалавров и магистров на экономическом факультете.

Но насколько подходит этот принцип для математической подготовки? Можно ли овладеть математикой только на исполнительском уровне, оставляя на потом развитие творческих способностей?

Весь опыт преподавания математики в России, да и в ряде других стран, говорит о том, что это сделать нельзя, что необходимо развивать творческие способности намного раньше, параллельно приобретению математических знаний, еще в школе и на первых курсах в вузе.

Причины таких особенностей стратегии обучения математике кроются в следующем. Все сколько-нибудь серьезные приложения математики требуют значительной первоначальной фундаментальной математической подготовки. Как указывал Л.Д. Кудрявцев, "содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики" [4. С. 88].

Как математик-профессионал, так и учитель математики должны, прежде всего, получить широкий математический кругозор, должны представлять себе структуру современной математики в целом.

Принцип научности обучения требует, чтобы его содержание являлось строго научным, объективно отражающим современное состояние соответствующей отрасли научного знания и учитывающим тенденции и перспективы его развития. В соответствии с принципом научности в ходе обучения важно обеспечить усвоение не только научных фактов, законов, теорий, но и основных тенденций развития науки, единства и противоречивости, характерных для современной науки процессов дифференциации и одновременной интеграции научных знаний. Для реализации этого принципа в преподавании математики необходима научная строгость и логическая последовательность курса математики, системность и обобщенность математических знаний и опыта.

Однако в процессе освоения фундамента математических знаний возникают существенные трудности. Это вызвано специфической сложностью предмета математики. Сложность математики, как указывал академик А.Д. Александров, состоит в том, что она абсолютизирует свои абстракции и предметом математики являются идеализированные объекты. В абстрактности – сила, общность и универсальность математики, но в то же время и специфическая сложность ее усвоения [1]. Поэтому принцип научности обязательно должен дополняться принципом доступности обучения.

Для учителя фундаментальная математическая подготовка должна являться не целью, а средством, а потому должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии. Это положение А.Г. Мордкович назвал принципом фундаментальности. В соответствии с ним в математическом образовании будущих учителей математики, кроме традиционных курсов математического анализа, алгебры и геометрии, важное место занимают курсы (или разделы) "Числовые системы", "Основания геометрии", "Теория изображений" и т.п., не изучаемые в университетах. В то же время ряд университетских математических курсов, важных для приложений, но далеких от школьного курса, в педвузах или не изучается вовсе, или изучается совсем с другими целями.

Необходимость фундаментальности математической подготовки вытекает и из основных положений современной когнитивной психологии, согласно которым чем лучше развита и структурно организована когнитивная система, тем дольше и прочнее сохранение материала в памяти. В более развитой и сложной по структуре когнитивной системе идет более глубокий и всесторонний анализ поступающей информации. А это является одной из главных предпосылок прочного и длительного запоминания любого материала. Аналогичные мысли высказывал и американский психолог Дж. Брунер: "Быть может, самое главное, что можно сказать о памяти человека после столетия интенсивных исследований, это то, что до тех пор, пока какой-либо частный факт не согласован со структурой, он быстро забывается. Отдельные детали материала сохраняются в памяти посредством включения их в определенную структуру или схему... Обучение общим или основным принципам способствует сохранению материала в памяти, позволяет нам восстановить отдельные подробности, когда это необходимо. Хорошая теория является не только средством понимания явлений, но и средством их последующего воспроизведения в памяти" [2. С. 25–26].

Фундаментализация математической подготовки тесно связана с реализацией принципа генерализации знаний, который означает, что начинать построение курса надо с выделения основных структур и понятий, и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их актуализации в системе математической науки. Изучение конкретных математических структур должно осуществляться таким образом, чтобы в первую очередь выявлялись наиболее их общие, фундаментальные свойства; для этого следует начинать ознакомление с главного, с общего, не с элементов, а со структуры.

Используя этот принцип, можно сформировать не только отдельные знания, отдельные качества какого-либо вида мышления, но и всю его структуру, раскрыть внутренние связи и отношения фундаментальных понятий, показать их проявления на конкретных фактах и явлениях действительности.

Генерализация знаний позволяет обеспечить и лучшее понимание, поскольку порождает структуру, которая значительно сильнее взаимодействует с новыми знаниями, чем отдельные факты. А чем больше разных связей новых знаний с уже имеющимися в долговременной памяти может быть установлено, тем глубже и шире понимание нового материала, тем лучше он усваивается. Ведь для этого уже существуют необходимые когнитивные структуры, которые должны развиваться дальше, усложняться и усовершенствоваться при усвоении нового.

Генерализация знаний при изучении математики, т.е. объединение разрозненных понятий на основе общей математической идеи, необходима для того, чтобы заложить прочные основы формирования теоретического мышления. Следуя этому принципу, содержание предмета должно представлять собой единое целое по научным идеям и методам его изложения. Рассмотрение каждого отдельного факта только тогда будет эффективно, когда этот факт явится частностью какой-то общей системы, но частностью, вытекающей из общего.

С фундаментальностью математического образования тесно связан еще один дидактический принцип – систематичности и последовательности, который требует, чтобы знания, умения и навыки формировались в определенном порядке, системе: каждый элемент учебного материала логически связывался с другими, последующее опирается на предыдущее и готовит к усвоению нового. Данный принцип допускает определенные варианты систем и последовательности обучения, но неизменным остается сохранение логически стройного подхода к обучению, а не стихийного, не вытекающего из учета особенностей и внутренней логики предмета. К системности содержания относится целостность построения каждого из математических курсов и определенная законченность его разделов; построение частных вопросов курса математики вокруг его ведущих идей; возможность логических обобщений по мере изучения частных вопросов к более общим.

С определенной сложностью усвоения математики в вузах способны справиться далеко не все выпускники средней школы. Как отмечал А.Н. Колмогоров, картина современных представлений о строении математической науки несомненным образом слишком сложна для школьников, даже проявляющим особый интерес к математике, и рассказать о ней можно лишь немногое. Для преодоления этой сложности в свое время в СССР была создана целая система подготовки школьников к изучению фундаментальных математических курсов. Это математические кружки, факультативы, математические классы и целые школы, заочные математические школы, летние математические лагеря, олимпиады и конкурсы. Все эти формы работы со школьниками имели главной своей целью развитие математического мышления, развитие интереса к математике, развитие творческих способностей. Для математического мышления из всех математических структур особое значение имеют логические, алгоритмические, комбинаторные, образно-геометрические и стохастические структуры, представляющие собой определенные качества математического мышления, являющиеся схемами (методами) мышления, математической деятельности. При формировании этих качеств важно не упустить время, использовать сенситивные периоды.

Многое из этой системы работает и в настоящее время. Эта система прошла проверку временем и доказала свою эффективность. Математические факультеты получали хорошо подготовленных выпускников, давая им фундаментальное математическое образование и развивая дальше их творческие математические способности. Благодаря этой системе математической подготовки российские математики, а также физики, инженеры, программисты получили всемирное признание и пользуются высоким спросом в различных странах и крупнейших фирмах.

На изучение фундаментальных математических дисциплин, как показывает практика, необходимо 3,5–4 года, то есть можно после этого давать диплом бакалавра математики, что и делают некоторые российские вузы, но такие бакалавры для практической работы никому не нужны. Им необходимо сразу учиться дальше, либо изучать отдельные приложения современной математики (для профессионального математика), либо психолого-педагогические и методические дисциплины (для учителя математики).

Опыт зарубежных стран (Великобритания, США и др.) также показывает, что бакалаврам, для того чтобы получить сертификаты, разрешающие работу учителем, необходимо еще пройти основательную психолого-педагогическую и методическую подготовку. Так, в Великобритании с 1995 г. степень бакалавра образования не дает права преподавания в средней школе. Для приобретения права на преподавание в школе необходимо получить университетскую степень бакалавра по какой-либо науке, а затем пройти специальный курс педагогической подготовки, в результате которого он приобретает "Статус квалифицированного учителя" и получает специальный сертификат по педагогике. В США процесс сертификации школьных учителей еще сложнее. В 1996 г. здесь вышли рекомендации Национальной комиссии по вопросам обучения, согласно которым минимальной степенью для получения постоянной лицензии для работы учителем стала степень магистра [3].

В России сложившаяся система подготовки учителя фактически очень близка к тому, к чему приходят эти западные страны. При существующем пятилетнем сроке обучения в вузах последние курсы обучения (1–1,5 года) используется для получения различных специализаций, для изучения отдельных приложений современной математики (в университетах) или для подготовки учителя (в педвузах). Именно на этом этапе происходит основная часть методической подготовки учителя, проходит педагогическая практика. Отличие от того, что рекомендуется документами Болонского процесса, с формальной точки зрения небольшое, но по существу весьма важное: на второй ступени математического образования мы делаем то, что фактически нас призывают делать на первой ступени – происходит приобретение компетенций исполнительского типа.

Опираясь на отечественный и зарубежный опыт, можно сделать вывод, что бакалавриат в условиях России не должен стать завершающим уровнем математического педагогического образования. После бакалавриата необходимо обязательно проводить дополнительную профессионально-педагогическую подготовку длительностью не менее одного года, которая должна включать в себя психолого-педагогический и методический блоки, а также интенсивное прохождение педагогической практики. Только прохождение такой подготовки должно давать основание для присвоения квалификации учителя математики и право работать в школе.

Такую подготовку наиболее целесообразно осуществлять прямо в вузе, где есть необходимая база и подготовленные кадры. Поэтому лучше всего наряду с созданием магистратуры в вузах на базе бакалавриата сохранить и существующую систему специалистета (5-летняя подготовка специалиста).

Только при соблюдении указанных условий можно будет сохранить высокий потенциал отечественного математического образования, его фундаментальный характер, не допустить снижения качества образования при переходе к двухступенчатому образованию в условиях общеевропейского образовательного пространства.

### Библиографический список

1. *Александров А.Д.* Математика и диалектика // Математика в школе. 1972. № 1. С. 3–9.
2. *Брунер Дж.* Процесс обучения. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.
3. *Зайцев В.В.* Пути развития отечественного педагогического образования в условиях Болонского процесса // Педагогическое образование и наука. 2005. № 1. С. 39–43.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980.
5. *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. М.: Технологическая школа бизнеса, 1999. 303 с.

# Технологический подход к обучению в профессиональном учебном заведении

*О.Б. Епишева*

Одним из условий достижения основной цели модернизации российского образования – его современного *качества* [5, 10], как показано во многих педагогических исследованиях [1, 2, 6–8, 11], является теоретическая разработка и внедрение в практику работы учебных заведений *педагогической технологии.* Технология обучения является развитием традиционной методики обучения и, в отличие от нее, дает инструментарий достижения планируемых целей образования. Это объясняется тем, что она представляет собой такой уровень методики, который трансформирует ее теоретические закономерности в систему совместной *практической деятельности* всех участников учебно-воспитательного процесса, в проект методической системы, содержащий описание процесса достижения планируемых результатов обучения (В.П. Беспалько, В.М. Монахов) и процедур совместной деятельности учителя (преподавателя) и учащихся (студентов).

В профессиональном образовании проблема достижения высокого уровня подготовки компетентного специалиста обострилась и в связи с намерениями вхождения России в мировое образовательное пространство и повышением уровня требований к стандартам инженерного образования. В качестве примера приводим разработанный Ассоциацией инженерного образования России вариант стандартов для аккредитации инженерных программ двух циклов – первого (FCD) и второго (SCD). Эти стандарты представляют собой адаптированные и модифицированные версии формулировок требований к выпускникам, используемых в существующих системах аккредитации европейских стран и в странах Вашингтонского соглашения. Результаты обучения по этим программам (как умения выпускника) описываются в терминах задач и видов деятельности разного уровня сложности, которые выпускники должны решать (табл. 1 и 2), применимы ко всем инженерным программам и должны быть дополнены специальными требованиями в зависимости от дисциплин [3].

*Таблица 1*

**Академические результаты обучения**

| | | ***Выпускник FCD должен*** | ***Выпускник SCD должен*** |
|---|---|---|---|
| 1. | Знания в области инженерных наук | Применять знания математики, естественных, общеинженерных и специальных наук в инженерной практике, системах, процессах или методологии | Применять знания математики, естественных, общеинженерных и специальных наук для разработки концепций инженерных моделей |
| 2. | Анализ проблем | Определять, формулировать проблему, находить необходимую литературу и решать инженерные задачи *средней сложности*, достигая обоснованных выводов, используя аналитические приемы в зависимости от выбранной дисциплины или выбранной специализации | Определять, формулировать проблему, находить необходимую литературу и решать *сложные* инженерные задачи, достигая обоснованных выводов, используя основные принципы математики и инженерных наук |
| 3. | Проектирование /выработка решений | Находить решения для задач *средней сложности* и *участвовать* в проектировании систем, их компонентов или процессов с учетом вопросов здравоохранения и безопасности, культурных, социальных, экологических аспектов | Находить решения для *сложных* задач и проектировать системы, их компоненты или процессы с учетом вопросов здравоохранения и безопасности, культурных, социальных, экологических аспектов |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4. | Проведение исследований | Проводить исследования задач *средней сложности,* систематизировать, находить и выбирать необходимые данные из программ, баз данных и специализированной литературы; проектировать и проводить эксперименты для получения обоснованных выводов | Проводить исследования *сложных* задач, в том числе путем проектирования экспериментов, анализа и интерпретации данных и синтеза информации для получения обоснованных выводов |
| 5. | Использование современных методов | Выбирать и использовать соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование, включая прогнозирование и моделирование для решения инженерных задач *средней сложности,* с пониманием правильности их применения | Создавать, выбирать и использовать соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование, включая прогнозирование и моделирование для решения *сложных* инженерных задач, с пониманием правильности их применения |

*Таблица 2*

***Личностные результаты обучения***

| | | ***Выпускник FCD должен*** | ***Выпускник SCD должен*** |
|---|---|---|---|
| 1. | Индивидуальная работа и работа в команде | Эффективно работать как индивидуально, так и в качестве лидера или члена разнотипных команд | Эффективно работать по междисциплинарной тематике как индивидуально, так и в качестве лидера или члена разнотипных команд |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | Общение | Эффективно общаться с членами инженерного сообщества и общества в целом в решении задач *средней сложности*: быть способным понимать, писать рабочие отчеты, разрабатывать документацию, делать содержательные презентации, понимать и давать четкие инструкции | Эффективно общаться с членами инженерного сообщества и общества в целом в решении *сложных* задач: быть способным понимать, писать рабочие отчеты, вести документацию, делать содержательные презентации, понимать и давать четкие инструкции |
| 3. | Взаимодействие инженера с обществом | Демонстрировать понимание социальных, культурных, юридических аспектов, вопросов здравоохранения и безопасности и осознание ответственности за последствия инженерной деятельности | Демонстрировать понимание социальных, культурных, юридических аспектов, вопросов здравоохранения и безопасности и осознание ответственности за последствия инженерной деятельности |
| 4. | Этика | Понимать ответственность и следовать этике и нормам инженерной деятельности | Понимать ответственность и следовать этике и нормам инженерной деятельности |
| 5. | Окружающая среда и устойчивое развитие | Понимать влияние инженерных решений в социальном контексте и демонстрировать понимание и необходимость устойчивого развития | Понимать влияние инженерных решений в социальном контексте и демонстрировать понимание и необходимость устойчивого развития |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6. | Управление проектами и финансы | Демонстрировать осведомленность и понимание в сфере менеджмента и бизнеса, такие как риск, возможные изменения условий и понимание их последствий | Демонстрировать осведомленность и понимание в сфере менеджмента и бизнеса, такие как риск, возможные изменения условий и понимание их последствий |
| 7. | Межкультурные компетенции | Работать в интернациональной среде с пониманием культурных, языковых и социально-экономических различий | Работать в интернациональной среде с пониманием культурных, языковых и социально-экономических различий |
| 8. | "Обучение через всю жизнь" | Осознавать необходимость и иметь способность самостоятельно учиться и повышать квалификацию в течение жизни | Осознавать необходимость и иметь способность самостоятельно учиться и повышать квалификацию в течение жизни |

Традиционная дидактическая система, которой исполнилось 350 лет, в настоящее время уже недостаточна для решения задач модернизации образования, что объясняется такими ее особенностями, как а) ведущая роль теоретических знаний в содержании обучения, б) преобладание объяснительно-иллюстративного способа обучения, в) как следствие – ориентация учебного процесса на деятельность учителя (например, цели обучения выражены в действиях учителя – "ознакомить учащихся с ...", "решить с учащимися задачи" и т.п.), г) как следствие – отсутствие акцента на учебную деятельность обучаемых, и д) как результат, – доминирование у них памяти над мышлением, низкий уровень самостоятельности и результативности учебной деятельности.

"Традиционность" существующей дидактической системы в вузе и привычка к ней преподавателей не позволяют сегодня получить существенно лучшие результаты образования. Педагогика высшей школы сегодня исходит из того, что методы обучения в вузе, ориентированные на объяснение педагога, формируют интеллектуальную пассивность и ограничивают творческие способности студента; таким образом, время их обучения используется неэффективно.

Основной технологической процедурой является *проектирование образовательных целей,* которые являются ключом к проектированию всей технологии (всех ее технологических процедур). Это соответствует и стратегии модернизации образования, которая говорит о необходимости положить в основу обновления образования планируемые цели (характеристики результата "на выходе") и только после этого формировать само содержание образования "на входе" [10. С. 15]. Цели образования должны быть представлены не в объектно-знаниевой, а в деятельностной форме (выражены в действиях ученика или эталонах этих действий), что определяет деятельностный характер образовательного стандарта и содержания образования [10. С. 25]. При этом можно проектировать три традиционные группы образовательных целей: 1) учебные цели (а не обучающие, т.к. они являются целями не учителя, а ученика, целями его учебной деятельности); 2) цели развития (развивающие цели) и 3) цели воспитания (воспитательные цели). В психолого-педагогических исследованиях давно показано, что эффективность достижения учебных (обучающих) целей образования в значительной степени зависит от достижения развивающих и воспитательных целей, а в новой концепции и стратегии модернизации образования последние являются приоритетными, т.к. их достижение определяет так называемую "обучаемость" ученика, т.е. его способность к усвоению изучаемого материала. Если цели образования определены и сформулированы неверно, то по результатам их достижения ни о каком качестве не может идти речь [9. С. 21].

При конкретизации целей обучения в профессиональном учебном заведении их необходимо также соотнести с особенностями будущей профессии (специальности). Результаты исследований сущности *профессиональной деятельности* показывают, что ее психологическая основа как система имеет такую же структуру, как и учебная деятельность. Это – мотивы, цели, программа деятельности, информационная основа деятельности, принятие решений, подсистема профессионально важных качеств и способностей личности; при этом профессиональные способности рассматриваются как общие способности, приобретшие черты оперативности под влиянием деятельности, что может быть ориентиром для проектирования целей развития и воспитания в этом вузе [12]. Цели профессионального образования должны быть компонентами *профессиональной компетентности специалиста* и *стандартов инженерного образования* (табл. 1 и 2).

Вторая технологическая процедура – проектирование на основе полученных целей *содержания обучения* в деятельностной форме, которое получается переводом спроектированных целей в адекватные им предметные (математические, технические и т.д.) и учебные задачи. Эти задачи предъявляются обучаемым в виде учебных заданий во всех видах учебной деятельности; они должны составлять постоянно пополняемый *банк учебных заданий*, из которого, в частности, формируется и *тестовый фонд*.

Согласно правительственной стратегии обновления образования – усилению деятельностного подхода к обучению, проектирование всех остальных компонентов системы обучения осуществляется также на основе этого подхода. В частности, необходима "деятельностная формулировка ключевых компетентностей" [10. С. 20], проектирование всего хода учебного занятия, оценка текущих результатов, коррекция обучения, направленная на достижение обучаемыми запланированных целей [7].

После диагностики готовности обучаемых к учебной деятельности (входной контроль) проектируется *учебный процесс* – его структура (этапы), содержание и методический инструментарий (методы, формы и средства его организации, контроля, коррекционной работы и оценки результатов обучения), организующий учебную деятельность учащихся (студентов) с подготовленным учебный материалом, направленную на достижение запланированных результатов обучения. Выбор как структуры учебного процесса, так и методического инструментария определяется целями и содержанием изучаемого материала; уровнями его сложности и подготовленности обучаемых к его усвоению; сравнительной характеристикой возможностей, сильными и слабыми сторонами различных методов, форм и средств обучения; особенностями самого преподавателя; возможностями учебно-материальной базы вуза; регламентом учебного времени.

Таким образом, технологический подход к обучению позволяет не только декларировать, но и, как показывают научные исследования и опыт их внедрения в педагогическую практику, на деле достигать более высокого уровня качества обучения при условии овладения преподавателем обязательными технологическими процедурами. Использование педагогической технологии и процесса проектирования технологических процедур сокращает время овладения преподавателем процессом формирования собственной методики (технологии) обучения своей дисциплине.

## Библиографический список

1. *Бахусова Е.В., Коростелев А.А., Монахов В.М. и др.* Технологии В.М. Монахова – дидактический инструментарий модернизации образования: Учеб. пособие. М.-Тольятти: Волжский ун-т им. В.Н. Татищева, 2004. 60 с.
2. *Епишева О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2003. 223 с.
3. EUR-ACE критерии и процедуры аккредитации программ в об-

ласти техники и технологии. М.: Ассоциация инженерного образования России, Аккредитационный центр, 2005. 15 с.

4. Качество образования. Достижения. Проблемы. Материалы IV Международной научно-методической конференции / Под ред. А.С. Вострикова. Новосибирск: НГТУ, 2001. 433 с.
5. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года. Concepcia.rtf. 28 с.
6. *Кларин М.В.* Педагогическая технология в учебном процессе. Анализ зарубежного опыта. М.: Знание, 1989. 89 с.
7. *Кларин М.В.* Технологический подход к обучению // Школьные технологии. № 5. 2003. С. 3–22.
8. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград: Перемена, 1995. 152 с.
9. *Поташник М.М.* Качество образования: проблемы и технологии управления (В вопросах и ответах). М.: Педагогическое общество России, 2002. 352 с.
10. Стратегия модернизации содержания общего образования: Материалы для разработки документов для обновления общего образования. М.: ООО “Мир книги”, 2001. 66 с.
11. *Чернилевский Д.В., Филатов О.К.* Технология обучения в высшей школе: Учеб. издание / Под ред. Д.В. Чернилевского. М.: Экспедитор, 1996. 288 с.
12. *Шадриков В.Д.* Психология деятельности и способности человека: Учеб. пособие. М.: Логос, 1996. 320 с.

## А.Н. Колмогоров о развитии математических способностей

*А.И. Голиков, Н.Х. Розов*

Задача всестороннего и гармонического развития личности человека делает совершенно необходимой глубокую научную разработку проблемы способностей людей к тем или иным видам деятельности. Разработка этой проблемы представляет как теоретический, так и практический интерес.

Проблема способностей – это проблема индивидуальных различий. Если бы все люди обладали одинаковыми потенциальными возможностями для развития во всех направлениях и для занятий всеми видами деятельности, то не было бы смысла говорить о способностях. Один добивается высоких достижений, больших успехов без особой затраты сил и труда в сравнительно короткий срок, другой при всем желании и старании не может подняться до того же уровня или это сопряжено у него с большим трудом. В этом смысле мы и говорим о более способных и менее способных обучаемых.

Академика А.Н. Колмогорова глубоко интересовала проблема выявления и отбора способных к математике школьников. Отметим несколько его идей, каждая из которых стала предметом обсуждения многих известных психологов и педагогов, основой для дальнейших исследований.

**Во-первых**, он указывает, что математические методы и математический стиль мышления проникают всюду. Трудно найти такую область знаний, к которой математика не имела бы никакого отношения. С каждым годом математика будет находить все более широкое применение в разнообразных областях человеческой деятельности. Принципиально область математики не ограничена [2]. Еще в 1962 году А.Н. Колмогоров отмечал, что развитие наук в последнее время характеризуется тенденцией к их математизации. В связи с этим в нашей стране ежегодно возрастает потребность в математиках. В последнее время потребность эта явно не удовлетворяется, "математики стали дефицитны" [3]. Таким образом, А.Н. Колмогоров подчеркнул, что высокий уровень развития математики является необходимым условием подъема и эффективности целого ряда важнейших областей знания. В связи с этим еще в большей степени увеличиваются требования к математическим знаниям и способностям специалистов, работающих над техническими проблемами.

**Во-вторых**, А.Н. Колмогоров отмечает, что для усвоения математики ("при хорошем руководстве или по хорошим книгам") в объеме курса средней школы и даже элементов высшей математики достаточны обычные средние способности. Но для успешного овладения математикой на более высоком уровне, в качестве будущей специальности, требуются развитые математические способности, так как известно, что "разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи... приходят к новым математическим открытиям с различной скоростью, легкостью и успехом" [4], а надо стремиться, чтобы специалистам – математикам становились те, кто в этой области будет работать наиболее успешно. "Талант, одаренность... в области математики... даны от природы не всем" [5]. Обычным математиком можно стать, выдающимся, талантливым математиком нужно родиться. Таким образом, А.Н. Колмогоров поставил проблему выяснения генетической природы математических способностей, которая до настоящего времени является важной задачей дальнейших исследований в этой области.

**В-третьих**, в состав математических способностей А.Н. Колмогоров включает [4]:

– способность умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, не подходящих под стандартные правила, или, как это принято называть у математиков, вычислительные, или "алгоритмические" способности;

– геометрическое воображение, или "геометрическую интуицию";

– искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения; в частности, хорошим критерием логической зрелости, совершенно необходимой математику, является понимание и умение правильно применять принцип математической индукции.

Далее, он говорит и о тех особенностях мыслительной деятельности, которые, вопреки распространенному житейскому мнению, не имеют отношения к математическим способностям, например, способности механически запоминать большое число фактов, способности перемножать в уме многозначные числа. Многие выдающиеся математики не обладали сколько-нибудь выдающейся памятью такого рода.

Известный психолог В.А. Крутецкий, беря за основу и дополняя данные А.Н. Колмогоровым личностные и мыслительные качества, характеризующие математическое мышление и деятельность математиков при решении математических проблем, задач, выделил основные характеристики математического мышления [9]:

1) способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;

2) способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном;

3) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

4) способность к "последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению", связанному с потребностью в доказательствах, обоснования, выводах;

5) способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;

6) способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу с прямого на обратный ход мысли);

7) гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов;

8) математическая память – ее характерные особенности также вытекают из особенностей математической науки, это память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы;

9) способность к пространственному воображению, которая прямым образом связана с развитием такой области математики, как геометрия.

**В-четвертых**, А.Н. Колмогоров указывает, что математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения [4]. В июне 1964 года Министерством просвещения РСФСР было проведено широкое совещание по проблемам преподавания математики в средней школе. С основным докладом выступил А.Н. Колмогоров, где он затронул проблему дифференциации математического образования. На первый план выдвигалась задача развития индивидуальных особенностей каждого учащегося с учетом его интересов, способностей и желаний. Участники совещания, одобрив основные положения доклада, все же выступили против различных программ даже в спецшколах. Отступление от утвержденных программ допускалось только в экспериментальных классах. К большому сожалению, идея А.Н. Колмогорова об уровневой дифференциации нашла отражение только в “Концепции развития школьного математического образования” 1990 года [7].

**В-пятых**, математика в целом не может быть до конца аксиоматизирована, можно говорить лишь о системах аксиом отдельных математических теорий [1]. Таким образом, А.Н. Колмогоров опровергал точку зрения, что аксиоматический метод распространяется на всю математику. Сочетание компонентов в индивидуальных структурах математических способностей может быть различным, что и образует различные типы структур, различные типы математических складов ума. Имеет место известное многообразие структур, т.е. высокие достижения в математической деятельности могут быть осуществлены различными комплексами способностей, причем одни из них могут компенсированы другими [4]. Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях [4]. Существование различных типов математических складов ума есть следствие не только индивидуальных и типовых психологических различий между людьми, но и следствие различных требований, которые предъявляют человеку разные разделы математики.

**В-шестых**, А.Н. Колмогоров считал, что "до 10–12 лет – с довольно хорошим успехом заменим общим воспитанием сообразительности и умственной активности". Он считал, что содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Однако в них "следует по возможности избегать установки на предопределение будущих профессиональных интересов". Но запоздание с усвоением строгой логики и специальных математических навыков в 14–15 лет делается уже трудно восполнимым [8]. С введением профильного обучения в общеобразовательных школах остается актуальным мнение А.Н. Колмогорова о том, что недопустима ранняя специализация математических способностей. Расширенное и углубленное обучение необходимо начинать с 12–13 лет.

Следует сказать, что подробный анализ работ и выступлений академика А.Н. Колмогорова, связанных с проблемой математических способностей, еще ждет своей всесторонней разработки.

## Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н.* Аксиома (Аксиоматический метод в математике). БСЭ. Изд. 2, т.1
2. *Колмогоров А.Н.* Математика. БСЭ. Изд. 2. Т. 26.
3. *Колмогоров А.Н.* Наука требует горения // Известия. 1962. № 44.

4. *Колмогоров А.Н.* О профессии математика. Изд. 3-е., допол. М.: Изд-во МГУ, 1960. 30 с.
5. *Колмогоров А.Н.* Поиск таланта // Известия. 1963. № 83.
6. *Колмогоров А.Н.* Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. 1971. № 6. С. 2–3.
7. Концепция развития школьного математического образования // Математика в школе. 1990. № 1. С.2–13.
8. Письмо А.Н. Колмогорова к В.А. Крутецкому // Вопросы психологии. 2001. № 3. С. 103–106.

## О концепции обучения математике учащихся начальной школы на основе информационно-категориального подхода

*Г.Л. Луканкин, Т.Ф. Сергеева*

Современный мир, включая Россию, вступил в XXI – век образования. Общество будущего – это общество с востребованным образованием. Поэтому важнейшая задача настоящего этапа модернизации системы образования состоит в создании условий для развития знаний и умений, формирования навыков и достижения учащимися необходимого уровня компетентности. Настоящий этап развития социума характеризуется его вступлением в новую фазу – "информационное общество". Уже сегодня можно предвидеть, что главным общественным продуктом, обеспечивающим интенсификацию всех сфер экономики, интеллектуализацию основных видов человеческой деятельности, станет информация.

Создание условий, позволяющих личности адаптироваться в условиях возрастания информационной емкости мира, быть способной мобильно осваивать новые технологии получения, переработки и распространения информации, и составляет, на наш взгляд, главную цель образования. Именно ему принадлежит в этом процессе ведущая роль, поскольку в образовательном пространстве начинают свое формирование социальные, психологические и профессиональные предпосылки информатизации общества в целом.

Этот процесс потребует переосмысления существующих подходов к обучению с точки зрения их адекватности сложившимся реалиям, а также разработки новых.

Предлагаемый информационно-категориальный подход призван, прежде всего, обеспечить универсальность образования, что позволяет сделать первый шаг в достижении этой цели. Основные концептуальные идеи отражены в следующих положениях:

1. Универсальность содержания образования может быть достигнута, если создать систему, включающую спектр образовательных областей, каждая из которых была бы представима в форме языка познания и отражения окружающего мира, и разработки внутри каждой из них содержания обучения, основанного на выделении определенных категорий (обобщенных понятий, формирующих "язык" данной образовательной области, что позволяет проводить описание предметов, явлений и процессов во внешней среде).

2. Одновременно с формированием системы категорий должно осуществляться обучение способам деятельности, как специальных – для того или иного предмета, так и универсальных, что в совокупности составит основу информационной культуры как одной из составляющих общей культуры человека.

3. Обеспечение универсальности образования предполагает создание условий для сохранения самобытности каждой личности, развития ее интересов и способностей.

Данные концептуальные идеи могут стать основой для построения образовательной программы, основными компонентами которой являются познание окружающего мира (внешняя среда) и самопознание (внутренний мир). Каждый из этих процессов проходит несколько этапов (см. схему 1).

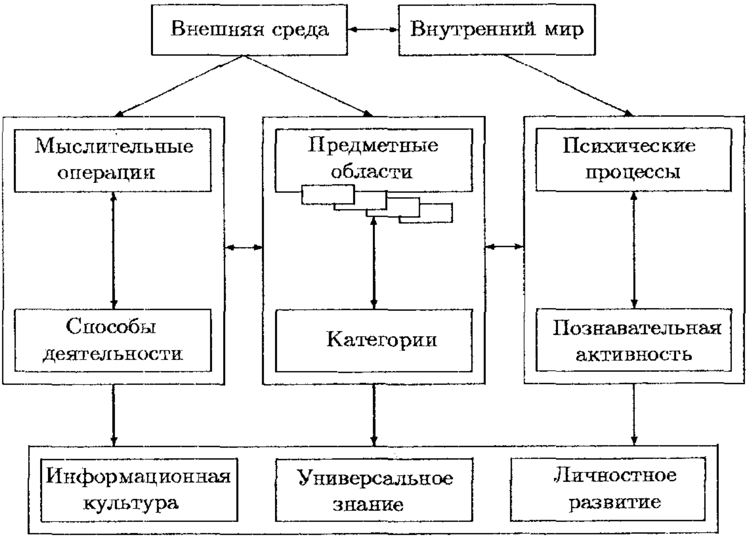



Схема 1

Процесс познания окружающего мира начинается с перевода его объектов и явлений в понятия определенной предметной области. При этом происходит овладение мыслительными операциями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, абстрагирования и др.

Следующий этап – выстраивание иерархии понятий, в результате чего образуется совокупность категорий, которая, в свою очередь, становится основой универсального знания.

Параллельно с освоением содержания образования продолжается работа, направленная на формирование у обучаемых способов деятельности, важнейшими из которых выступают кодирование, алгоритмизация и моделирование.

Особое внимание должно быть уделено формированию личности учащегося, которое также проходит несколько стадий: от определенных психических процессов (памяти, мышления, восприятия, воображения и т.д.) к воспитанию познавательного интереса и активности и далее - к диагностике и развитию индивидуальных способностей.

Принципы отбора категорий, составляющих предметное содержание, заключаются в следующем:

1. Каждая категория – фундаментальное понятие, определяющее "язык" данной предметной области и обладающее широким прикладным значением.

2. Категория может быть адаптирована к данному этапу обучения.

3. Категории, составляющие основу содержания одной предметной области, могут быть интегрированы в любую другую.

Информационное пространство действия каждой категории складывается из понятий, свойств, операций и моделей. Процесс трансляции объектов окружающего мира в предметное содержание отражен на схеме 2.

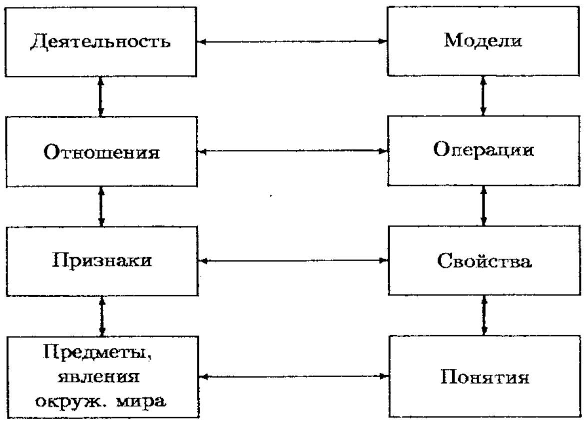



Схема 2

В соответствии с приведенными в первой главе работы концептуальными идеями система категорий, составляющих основу начального курса математики, может быть представлена следующим образом (см. таблицу).

| **Категория** | **Понятия** |
|---|---|
| **Форма** | Точка, прямая, кривая, ломаная, угол, многоугольник (и его разновидности), круг, овал, куб, прямоугольный параллелепипед, шар. |
| **Пространство** | Понятия, описывающие расположение предметов на листе бумаги и в пространстве:<br>а) относительно выбранного ориентира;<br>б) относительно друг друга.<br>Пересекающиеся и параллельные прямые. Числовой луч и числовая прямая. Расположение чисел на числовой прямой. |
| **Величина** | Множество, элементы множества. Число. Цифра. Целые неотрицательные числа. Отрицательные числа. Масса, длина, емкость, площадь, объем. Мера. Измерение. Единица измерения длины, массы, емкости, площади и объема. |
| **Модель** | Объединение, пересечение множеств. Выделение подмножества из множества. Удаление части множества. Сложение, вычитание, умножение, деление. Знаки и компоненты арифметических действий. Числовые и буквенные выражения. Уравнения. Неравенства. Задача и ее компоненты. |

Каждая категория в совокупности с соответствующей системой понятий составляет содержание определенного раздела программы по математике. Так, категории "форма" и "пространство" – геометрического, "величина" – арифметического и "модель" – алгебраического и текстовых арифметических задач. Категория изменение пронизывает все разделы программы начального курса математики и потому не выделяется в отдельную систему.

Процесс формирования информационной культуры при изучении основных разделов начального курса математики можно условно разделить на несколько этапов.

Первый этап заключается в том, что в объектах, предметах и явлениях окружающего мира выделяются признаки или свойства, подлежащие описанию на языке математики (например, количество, длина и др.). Основной задачей этого этапа является научить учащихся выявлять существенные признаки и свойства предметов и абстрагироваться от несущественных.

Второй этап характеризуется переводом уже собственно математических понятий на язык математических символов, т.е. происходит процесс кодирования информации, обучение которому проходит, в свою очередь, несколько стадий: от условных обозначений с помощью геометрических фигур до использования буквенной символики.

Следующий этап – знакомство с известными алгоритмами, обучение их исполнению и овладение умениями составлять собственные алгоритмы решения задач на основе известных. Следует отметить, что существует достаточно большой круг вопросов начального курса математики, которые поддаются алгоритмизации (в частности, приемы вычислений, решение уравнений и др.).

Четвертый этап – работа с математическими моделями или их конструирование. Надо сказать, что этот этап может в некоторых случаях отсутствовать. Наиболее характерной иллюстрацией такой работы могут служить следующие задания: составьте задачу по данному уравнению, подберите к данному чертежу соответствующее числовое выражение и др.

Концепция информационно-категориального подхода позволяет успешно реализовать в обучении также компетентностный подход.

На основе концепции авторами подготовлен учебно-методический комплект по математике для начальной школы, который прошел экспериментальную проверку. В настоящее время начата работа по созданию курса математики для неполной средней школы.

## О введении в математический анализ

*О.С. Ивашев-Мусатов*

При изложении теории пределов все мы находимся под гипнозом математиков. Но студентами нематематических специальностей (особенно слабыми в математике) все это воспринимается как пустая схоластика и не формирует никаких реальных образов. Для этого контингента изучение математического анализа удобнее начинать с наблюдения, которое всем понятно: есть линии, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Таковы окружность, ломаная, прямая, траектория движущейся точки и т.п. Когда рисуются эти линии, движение карандаша не прерывается. Поэтому такие линии принято называть непрерывными.

I. История развития науки и техники показала, что непрерывные линии играют фундаментальную роль. Например, температура $\theta$ в комнате изменяется со временем $t$ вполне определенным образом, т.е. переменная $\theta$ есть функция переменной $t$ : $\theta = \theta(t)$. Автомат-самописец, записывающий изменения температуры $\theta$ с течением времени $t$, выдаст на ленте непрерывную линию (поскольку температура не изменяется мгновенно). Эта линия – график функции $\theta(t)$. Поэтому про функцию $\theta(t)$ говорят – “непрерывная функция”.

Аналогичное положение с давлением $p$ воздуха – это функция времени $t$, т.е. $p = p(t)$. Ясно, что $p(t)$ – непрерывная функция. И подобное наблюдается повсеместно.

Таким образом возникло понятие о непрерывной функции: функцию $f$ называют непрерывной, если ее график – непрерывная линия, т.е. его можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги.

Уже такое наглядное представление о непрерывной функции позволяет уяснить ее простейшие свойства. Так, если функция $f$

непрерывна на отрезке $[a, b]$, т.е. ее график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, начиная с точки $(a, f(a))$ и кончая точкой $(b, f(b))$ (рис. 1),

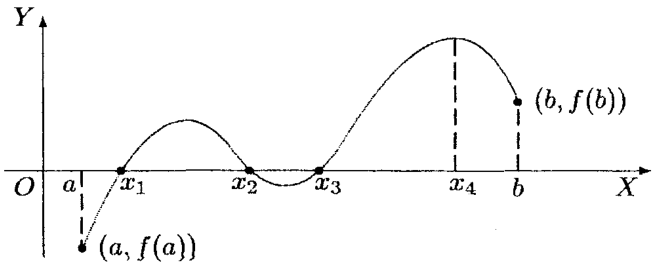



Рис. 1

то:

1) если числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то $f(x) = 0$ хотя бы при одном $x$ из интервала $(a, b)$. На рис. 1 таких точек три: $x_1, x_2, x_3$;

2) на отрезке $[a, b]$ функция $f$ имеет наибольшее и наименьшее значения: на рис. 1 число $f(a)$ – наименьшее значение $f$ на отрезке $[a, b]$, число $f(x_4)$ – наибольшее значение $f$ на отрезке $[a, b]$, т.е. при любом $x$ из отрезка $[a, b]$ выполнены неравенства $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(x_4)$.

II. Эти наглядно ясные факты, конечно, требуют строгого доказательства. Но такое доказательство можно дать только после того, как понятию непрерывности функции будет дано полное математическое определение. Чтобы получить его, надо провести средствами математики анализ наглядных соображений, приведенных выше. Коротко говорят: проведем математический анализ подмеченного. При этом будет удобно воспользоваться приближенными вычислениями.

В общем случае положение аналогично. Пусть функция $f$ непрерывна на интервале (т.е. ее график над этим интервалом можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги), и надо вычислить

$f(a)$ для числа $a$ из этого интервала. Для этого берут $x \approx a$ и считают, что $f(x) \approx f(a)$. При этом непрерывность функции вселяет уверенность в том, что чем точнее приближенное равенство $x \approx a$, тем точнее приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$, и точность последнего может быть получена любой при повышении точности $x \approx a$.

Геометрически это ясно из рис. 2, где приведен график функции $f$ и процесс вычисления $f(a)$ и $f(x)$.

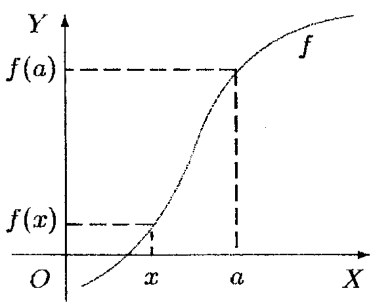



Рис. 2

Точность приближенного равенства $x \approx a$ есть число $|x-a|$. Это длина отрезка $[x, a]$, выделенного на оси $Ox$. Аналогично, точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ есть число $|f(x) - f(a)|$. Это длина отрезка, выделенного на оси $Oy$ – отрезок $[f(x), f(a)]$. Из рисунка видно: чем короче отрезок $[x, a]$, тем короче отрезок $[f(x), f(a)]$, и его длину можно сделать как угодно малой за счет уменьшения длины отрезка $[x, a]$. В терминах приближенных вычислений это означает: приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$ можно получить с любой точностью за счет повышения точности приближенного равенства $x \approx a$.

Коротко говорят: если функция $f$ непрерывна в точке $a$, то $f(x) \approx f(a)$ с любой точностью при $x \approx a$.

III. Вот это свойство непрерывной функции было принято за основу определения после придания наглядной формулировке этого свойства математического содержания. Для этого вспомним: точность приближенного равенства характеризуется положительным числом (с точностью до 0,001 или с точностью до 0,00001 и т.п.). В приведенной формулировке есть два приближенных равенства. Точность приближенного равенства $x \approx a$ характеризуется одним положительным числом, которое по традиции обозначают греческой буквой $\delta$ "дельта". Точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ характеризуется другим (как правило) положительным числом, которое по традиции обозначается греческой буквой $\varepsilon$ "эпсилон". При этом точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ мы хотим получить любой, т.е. число $\varepsilon > 0$ задается любым (у инженеров и вычислителей указывается в задании – в вычислениях гарантировать точность 0,001 и т.п.), а число $\delta > 0$ надо подобрать так в зависимости от заданного $\varepsilon$ (точки $a$ и функции $f$), чтобы выполнялось условие: если точность приближенного равенства $x \approx a$ меньше $\delta$, то точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ должна быть меньше $\varepsilon$.

Итак, мы подошли к *определению непрерывности функции в точке:* функция $f$ непрерывна в точке $a$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ можно подобрать такое положительное число $\delta$, что при любом $x$ из неравенства $|x-a| < \delta$ о следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Добавим к этому определению: при любых $x$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, функция определена, т.е. функция $f$ должна быть определена в некоторой окрестности точки $a$.

**Пример 1.** Линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

При доказательстве фиксируем любую точку $a \in \mathbf{R}$. Для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ подбираем следующим образом:

$$|f(x) - f(a)| = |kx + b - (ka + b)| = |k| \cdot |x - a| < (|k| + 1) \cdot |x - a|.$$

Из полученного неравенства видно: если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|+1}$, то при любом $x$ из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Таким образом доказано, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ (в этом примере $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|+1} > 0$) так, что выполнены условия, указанные в определении. Непрерывность линейной функции в выбранной точке $a \in \mathbf{R}$ доказана. Отсюда получаем непрерывность в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

**Пример 2.** Функция синус непрерывна в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

Фиксируем любое число $a$. Для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ подбираем, пользуясь определением синуса числа: длина дуги (рис. 3) $\smile BM = t$, длина дуги $\smile BN = a$, тогда длина дуги $\smile MN = |a - t| > MN \geqslant |\sin a - \sin t|$ (это длина отрезка $[\sin t, \sin a]$ на оси $Oy$), этот отрезок – проекция хорды $MN$, которая короче дуги $\smile MN$.

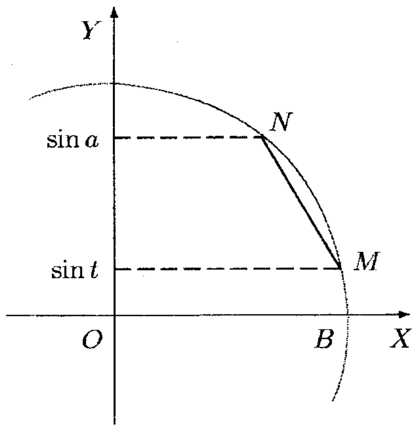



Рис. 3

Отсюда видно, что можно взять $\delta = \varepsilon$. Тогда для любого числа $t$ из неравенства $|t - a| < \delta$ будет следовать неравенство $|\sin t - \sin a| < \varepsilon$. Непрерывность синуса в точке $a$ доказана. Точка же $a$ была взята любой из множества $\mathbf{R}$.

В процессе разбора примеров и доказательства теорем постепенно осваивается определение непрерывности функции в точке.

Используя логические символы, *определение непрерывности функции в точке* может быть записано так:

$$\text{функция } f \text{ непрерывна в точке } a \in \mathbf{R} \overset{def}{\Longleftrightarrow}$$
$$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbf{R}\, (|x-a| < \delta \Leftarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon). \quad (1)$$

Буквы $def$ над $\Longleftrightarrow$ указывают на то, что это определение ($def$ – сокращение английского слова *definition* – определение), т.е. знак $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ заменяет слова "по определению, тогда и только тогда".

Развитие науки и техники показало, что большую роль играет понятие предела функции, которое можно трактовать как обобщение понятия непрерывности функции в точке.

Начну с наглядного примера. Здравый смысл подсказывает, что малая дуга окружности и ее хорда почти совпадают (рис. 4), т.е. $\frac{AB}{\smile AB} \approx 1$ с любой точностью при малой дуге $\smile AB$.

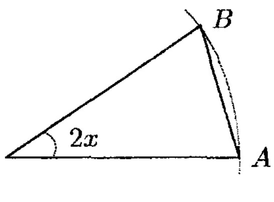



Рис. 4

Если центральный угол дуги $\smile AB$ равен $2x$ радиан, то $\smile AB = R \cdot 2x$, $AB = 2R \sin x$ и потому $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ с любой точностью при малых $x$. Это же можно заметить и по таблицам.

Проведем теперь полное математическое доказательство сделанного утверждения. Зафиксируем число $x \in \mathbf{R}$. На рис. 5 проведена дуга окружности радиуса $R$ с центром $O$, касательная к ней, $A$ – точка касания.

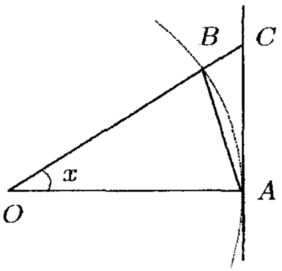



Рис. 5

Сравнивая площади двух треугольников и сектора окружности, получаем: $S_{\Delta OAB} < S_{\text{сек}.OAB} < S_{\Delta OAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$, откуда следует:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

Все члены последнего неравенства – четные функции. Поэтому оно верно и для любого числа $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, т.е. при $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $x \neq 0$. Для таких $x$ в силу неравенства (2) получаем:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда видно: $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ с любой точностью при $x \approx 0$ и $x \neq 0$.

В самом деле, если $|x| < 0,01$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{0,0001}{2}$, если $|x| < 0,001$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{0,000001}{2}$ и т.д. Это очень похоже на непрерывность функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в нуле, если бы она была там определена и имела значение 1. Но она в 0 не определена. Поэтому говорить о ее непрерывности в 0 нельзя. Вместо этого говорят: "функция $y = \frac{\sin x}{x}$ при $x$, стремящемся к 0, имеет предел, равный 1", и пишут

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3}$$

Говорят также: "функция $y = \frac{\sin x}{x}$ стремится к 1 при $x$, стремящемся к 0", и пишут $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. Здесь (и выше) знак "$\to$" заменяет слово "стремится".

Оказалось, что при решении многих задач (нахождение мгновенной скорости, ускорения и пр.) возникает аналогичная ситуация: для функции $f$ можно подобрать такое число $A$, что $f(x) \approx A$ с любой точностью при $x \approx a$ и $x \neq a$. Тогда число $A$ называют пределом функции $f$ при $x$, стремящемся к $a$, и пишут:

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \quad (\text{или} \quad f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to a). \tag{4}$$

Это положение сходно с тем, что привело к определению (1), только $f(a)$ надо заменить числом $A$ и сделать оговорку $x \neq a$.

Итак, мы подошли к *определению предела функции в точке:*

$$A = \lim_{x \to a} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbf{R}\, (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon). \tag{5}$$

(Оговорка $x \neq a$ учтена неравенством $0 < |x - a|$.)

Таким образом, о пределе функции в точке $a$ (или при $x \to a$) можно говорить только в том случае, когда функция определена в окрестности точки $a$, за исключением, быть может, самой точки $a$.

Сравнивая (1) и (5), получаем:

$$\text{функция } f \text{ непрерывна в точке } a \Longleftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x). \tag{6}$$

После (1), (5) и (6) обычным образом формулируются и доказываются теоремы о пределах и непрерывных функциях. Это есть в любых учебниках, и нет нужды здесь на этом останавливаться.

## Использование графического калькулятора в обучении математике

*В.В. Богун, Е.И. Смирнов*

### Введение

Проблема формирования профессиональных компетенций будущего учителя математики в освоении предметных действий может получить адекватное решение, если основывается на интеграции предметных знаний (математических, информативных, естественнонаучных, экономических и др.) путем актуализации и активизации мотивационного поля учения и продуктивной деятельности студентов. Использование новых информационных технологий (НИТ) предоставляет возможности повышения мотивации в учебной деятельности и эффективности в решении учебных и научно-исследовательских задач в математическом образовании будущего учителя.

Одним из перспективных направлений технологизации математического образования является использование графических калькуляторов в обучении математике. Это технологическое средство, являясь оперативным для решения сложных вычислительных задач, а также средством фиксации и визуализации этапов процесса решения математических и дидактических проблем, повышает интерес к математике, активизирует спектр мыслительных операций студентов и оказывает влияние на способы предъявления содержания обучения. Немаловажно отметить, что почти половина всех научно-методических публикаций по использованию НИТ в учебном процессе в США посвящена возможностям использования графического калькулятора.

Немаловажную роль играет возможность в процессе использования графического калькулятора повышения уровня личностного развития студента: рост вычислительной и алгоритмической культуры, развитие пространственного мышления и графической культуры, расширение спектра когнитивных схем в мыслительных процессах понимания, представления и др. на основе адекватного восприятия математических объектов и действий.

С другой стороны, будущий учитель должен владеть графическим калькулятором не только как объектом изучения его функций, режимов, опций, коммуникаций с целью решения математических и дидактических задач, но также и как средством управления познавательной деятельностью учащихся в будущей профессиональной деятельности учителя.

В настоящее время остается неснятым ряд ***противоречий***, связанных с использованием графического калькулятора в математическом образовании будущих учителей математики в России.

Среди них – ***противоречия***:

– между дидактическими возможностями графического калькулятора в обучении математике и недостаточностью научно-методических разработок в этой области;

– между необходимостью оперативной актуализации вычислительных и графических процедур в процессе математической деятельности и значительным объемом вычислений с использованием разветвленной алгоритмической модели;

– между необходимостью формирования мотивации (в том числе профессиональной) к изучению математики у студентов и многоступенчатым характером математических абстракций;

– между необходимостью организации учебного взаимодействия студентов на основе творческой активности и традиционными методами обучения математике, основанными на актуализации репродуктивной деятельности.

***Цель исследования***: создать целостную модель интеграции математических и информативных знаний в процессе решения математических и дидактических задач с использованием графического калькулятора (ГР) в профессиональной подготовке будущих учителей математики.

Использование графического калькулятора при решении математических и дидактических задач студентами будет способствовать повышению мотивации к изучению математики и росту профессиональных компетенций будущего учителя математики при условии:

1) включения в учебную деятельность с использованием ГК методики наглядного моделирования в процессе интеграции математических и информационных знаний;

2) проектирования интегративной модели математических и информативных действий с применением графического калькулятора на основе оптимизации процедур;

3) творческой активности студентов в процессе освоения графического калькулятора (варьирование данных и анализ результатов, постановка гипотез и их проверка, взаимопереходы знаковых систем);

4) расширение коммуникативных возможностей для взаимодействия малых групп студентов в процессе использования графического калькулятора.

***Задачи исследования*** (математические, информативные, дидактические, профессионально-педагогические, личностные):

– изучать функциональные возможности (функции, опции, режимы, коммуникации) и опыт освоения программной среды графического калькулятора, моделирование способов работы в информационной среде;

– выявить дидактические условия и разработать методику наглядного моделирования с использованием ГК в процессе обучения математике;

– проектирование коммуникаций групп студентов на основе создания авторских программных продуктов и их реализаций для ГК в процессе обучения математике;

– визуализированы процедуры предметных и информативных действий на основе повышения вычислительной и логической культуры студентов;

– разработать лабораторный практикум и методику его проведения по решению математических задач с использованием графического калькулятора для студентов I–II курсов;

– разработать специальный курс "Использование графического калькулятора в обучении математике" для студентов V курса с целью усиления технологической и профессионально-математической подготовки учителя математики.

Предполагается использование графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS с 1095 встроенными функциями, наличием главного меню с пиктограммами для вывода режима работы, большого точечно-матричного монитора (128х64 точек), 768 Кб флэш памяти, возможности обмена информацией с персональным компьютером благодаря наличию интерфейса взаимосвязи. ГК может успешно и оперативно решать вычислительные и алгоритмические задачи, осуществлять графическую интерпретацию расчетов и визуализировать процедуру математических действий, решая, в том числе, дидактические задачи. Последнее особенно важно в профессиональной подготовке будущего учителя математики, когда профессиональные знания начинают формироваться в процессе освоения математики. Это создает прецедент использования технологии фундирования базовых умений и навыков [1]. Рассмотрим основные положения этой образовательной технологии.

В основной образовательной программе вуза должны быть формализованы и материализованы в виде конкретных учебных дисциплин и форм учебной деятельности не только **дидактические** (когнитивные) процессы, формирующие целеполагание, приобретение, применение и преобразование опыта личности, а также **адаптационные** процессы, характеризующие профессиональные пробы принятия студентом профессии учителя и **личностные процессы**, направленные на проявление особенностей и развитие мотиваций и эмоций, рефлексии и саморегуляции, самооценки и выбора, интеллекта и креативности личности.

**Фундирование** – это процесс создания условий (психологических, педагогических, организационно-методических) для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающим их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и формировании личности педагога.

**Концепция фундирования** школьных математических элементов (знаний, умений, навыков, математических методов) предполагает развертывание в процессе математической подготовки студентов следующих компонентов:

– определение содержания уровней базового школьного учебного элемента (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры);

– определение содержания уровней и этапов (профессионального, фундаментального и технологического) развертывания базового вузовского учебного элемента;

– определение технологии фундирования (диагностируемое целеполагание, наглядное моделирование уровней глобальной структуры, локальной модельности, управления познавательной и творческой деятельностью студентов, блоки мотивации базовых учебных элементов);

– определение методической адекватности базовых школьных и вузовских (фундированных) учебных элементов на основе современных методологических концепций.

Принципиальным отличием структурообразующего принципа фундирования является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков математической подготовки студентов педвузов. Начиная со школьного предмета через послойное фундирование его в разных теоретических дисциплинах, объем, содержание и структура математической подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания по принципу "бумеранга".

Такое фундирование знаний выводит на уровень, когда педагог вместе со студентом, уже владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать с ним методическую сторону преподавания. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из математики более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания.

Другой слой фундирования может образовать совершенствование и углубление практических умений, проектируемых ориентировочной основной учебной деятельности.

Основу для фундирования в виде базовых учебных элементов школьной математики (БУЭШМ) составляют 7 содержательных линий: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастическая и алгоритмическая. Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы вузовской математики, распределенные по оптимальному набору учебных предметов и дисциплин.

Учебный предмет, представляя собой целостную структуру учебной информации в составе теоретического, практического, прикладного, деятельностного, эвристического и гуманитарного компонентов, разворачивается в базисном (содержательном), процессуальном и иерархическом уровнях в своих локальных, модульных и глобальных проявлениях.

В развертывании содержания учебного предмета в контексте профессионализации фундирования БУЭШМ с особой отчетливостью прослеживаются три линии:

– логика определения содержания учебного предмета, исходя из его особенностей: отбор базовых учебных элементов, структуры, этапы изучения, интегративные знания, соотношение теоретического и практического компонентов и т.п.;

– логика преемственности и содержания теоретического обобщения БУЭШМ: содержательные линии школьной математики и набор учебных предметов вузовского обучения, построение системы логически взаимосвязанных видовых проявлений базовых родовых понятий, усиление прикладного и деятельностного компонентов обучения математике, применение информационных технологий, модульный принцип развертывания содержания учебного предмета и т.п.;

– учет психологических и педагогических особенностей восприятия, усвоения, представления, применения, анализа и синтеза учебного материала субъектом обучения: наглядное моделирование, имитационное моделирование, структурный анализ базовых учебных элементов, усиление эвристического и гуманитарного компонентов, развитие интеллектуальных и личностных характеристик, вариативность решения учебных задач, взаимопереходы знаковых систем и т.п.

Таким образом, ***методология исследования*** включает три основополагающих источника:

– концепция и технология наглядного моделирования ([2]);

– теория интеграции знаний ([3]);

– концепция и технология фундирования базовых учебных элементов.

При этом основой для проектирования учебной деятельности студентов является интегративная модель взаимодействия математических и информативных элементов (МИЭ) (рис. 1).

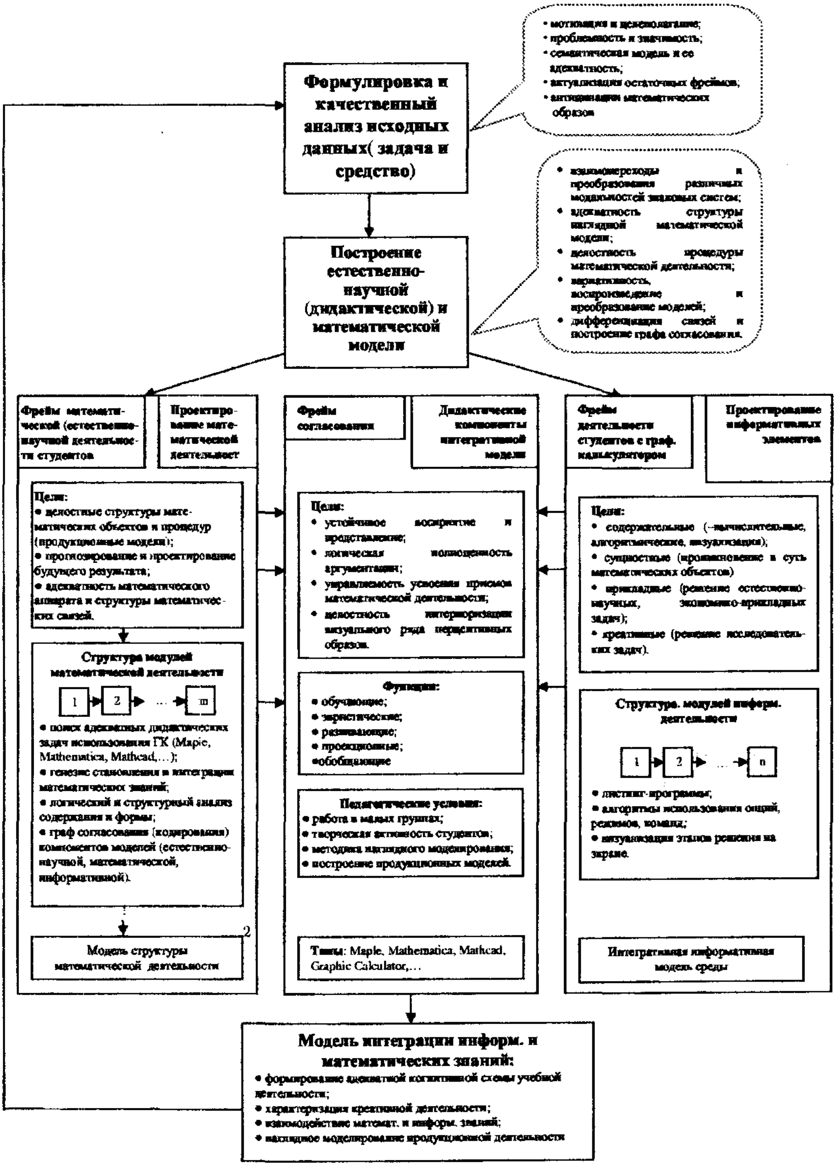



Рис. 1. Интегративная модель взаимодействия МИЭ

## Методика использования графического калькулятора

Лабораторный практикум для студентов I–II курсов специальности "Математика" включает 4 лабораторные работы и осуществляется с применением ГК CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS с авторской разработкой соответствующих программных продуктов (4):

1. Нахождение минимального номера $N(\varepsilon)$ числовой последовательности $x_n$ вида $x_n = \frac{a_2n^2+a_1n+a_0}{b_2n^2+b_1n+b_0}$ с пределом, равным A, по заданному $\varepsilon > 0$, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ с помощью методов золотого сечения, Фибоначчи и дихотомии (бисекции) и их сравнительный анализ (программа "MINNESQS").

2. Решение алгебраических и трансцендентных уравнений по заданной точности $\varepsilon > 0$ с помощью методов дихотомии (бисекции), хорд и касательных и метода итераций и их сравнительный анализ (программа "APROXEQU").

3. Приближенное вычисление определенного интеграла заданной функции по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона (параболических трапеций) и их сравнительный анализ (программа "APROXINT").

4. Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера, Рунге-Кутта второго и четвертого порядков точности и их сравнительный анализ (программа "APROXDFE").

Основная цель предлагаемого лабораторного практикума заключается в демонстрировании графического калькулятора как средства выполнения численных (или вычислительных) алгоритмов, суть которых заключается в построении итерационного процесса, сходящегося к искомому решению. Все используемые в алгоритме вычисления производятся с числами, представленными в виде десятичных дробей с конечным числом знаков.

Описание каждой из лабораторных работ включает следующие составляющие:

– название лабораторной работы;

– цели и задачи лабораторной работы;

– план проведения лабораторной работы;

– этапы использования графического калькулятора;

– построение информационной модели.

При этом цели и задачи каждой из лабораторных работ следующие:

**1. Математические:**

– решение определенной математической задачи с использованием трех соответствующих численных методов;

– исследование функциональных зависимостей;

– освоение численных методов решения;

– сравнительный анализ эффективности вычислительных процедур.

**2. Информативные:**

– освоение функциональных возможностей графического калькулятора (функции, опции, режимы, коммуникации);

– опыт освоения программной среды графического калькулятора;

– навыки создания блок-схем решения математических задач.

**3. Личностные:**

– развитие информационной и алгоритмической культуры учащихся;

– творческая активность (анализ результатов с выдвижением гипотезы и ее проверки, варьирование данных, оптимизация мыслительных процессов);

– коммуникативная и ролевая деятельность на примере малой группы в процессе интеграции знаний и умений;

– мотивация к изучению математики.

**4. Профессиональные:**

– наглядное моделирование объектов и действий;

– визуализация предельных процессов;

– интеграция математических и информационных процессов;

– управление процессами познавательной деятельности учащихся.

Методика проведения лабораторных работ:

1. Предварительный опрос на знание теоретических и практических навыков по использованию графического калькулятора.

2. Формулировка названия, цели и плана проведения лабораторной работы.

3. Распределение учащихся на малые группы по 3–4 человека с целью задания различных вариантов исходных данных.

4. Решение предлагаемой математической задачи с использованием графического калькулятора тремя методами.

5. Сравнительная оценка полученных результатов с формулировкой выводов.

6. Оформление лабораторной работы с последующей сдачей преподавателю.

7. Проверочное тестирование.

8. Презентация результатов.

Основные достоинства представленных в лабораторных работах авторских программ заключаются в реализации принципа сохранения значений всех промежуточных вычислений в соответствующие последовательно идущие таблицы или списки; доступ к спискам возможен только после окончательного выполнения программы через главное меню в режиме выполнения статистических расчетов; результаты расчетов оседают в соответствующих матрицах, доступ к которым после выполнения программы возможен через главное меню в режиме выполнения арифметических расчетов.

Использование графических калькуляторов для выполнения подобного рода задач вполне оправдано, поскольку, во-первых, при решении численных задач производится большой объем вычислений, во-вторых, в специально подготовленных соответствующих программах действуют принципы сравнительной оценки алгоритмов решения, то есть любая из четырех представленных в лабораторном практикуме задач решается в одной программе с использованием трех методов, итоговые и промежуточные результаты которых можно всегда с успехом просмотреть и проанализировать.

Таким образом, использование графического калькулятора в процессе обучения математике выполняет мотивационную, обучающую, развивающую и контролирующую функции и способствует эффективному процессу формирования математических и методических умений будущего учителя математики.

### Библиографический список

1. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учебн. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.
2. *Смирнов Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль, 1998. 335 с.
3. *Берулава М.Н.* Интеграция содержания общего и профессионального образования в профтехучилищах. Теоретический аспект. Томск, 1988. 222 с.
4. *Богун В.В.* Исследование предельных процессов для числовых последовательностей с применением графических калькуляторов // Ярославский педагогический вестник. 2004. № 4. С. 179–189.

## О формировании индивидуального стиля деятельности студентов-математиков в процессе методической подготовки

*Т.В. Бурлакова*

Методическая подготовка в педагогическом вузе является центральным звеном в профессиональном становлении будущего учителя, поскольку связывает воедино предметную и психолого-педагогическую линию процесса обучения. В плане повышения эффективности методической подготовки весьма перспективной представляется идея индивидуализации.

В целом в практике работы высшей педагогической школы преобладает та сторона индивидуализации, которая характеризует сам процесс обучения, но фактически слабо связана с будущей профессионально-педагогической деятельностью студента. Вместе с тем, следует рассмотреть и другой аспект проблемы: индивидуализация обучения должна осуществляться с целью развития индивидуальности будущего педагога и основ индивидуального стиля его педагогической деятельности. Более того, можно утверждать, что формирование индивидуального стиля педагогической деятельности – это не дополнительная или выборочно реализуемая постановка цели профессионального образования, а его максимально достижимый результат.

Понятие стиля определяет взаимоотношения объективных требований деятельности и свойств индивидуальности, а индивидуальный стиль опосредует связь, взаимодействие индивидуальности с миром. Предваряя создание теории индивидуального стиля деятельности, Б.М. Теплов писал: “Нет ничего нежизненнее, схоластичнее идеи о том, что существует только один способ успешного выполнения всякой деятельности. Эти способы бесконечно разнообразны, как разнообразны человеческие способности”.

Очевидно, прежде чем говорить о методике формирования индивидуального стиля деятельности будущего учителя математики, необходимо обратиться к общим вопросам теории индивидуального стиля.

Известно, что теория и понятие стиля были разработаны А. Адлером в 1927 году, который определил его как совокупность особенностей поведения человека, способствующих компенсации его индивидуальных дефектов (физических, психических, социальных).

В отечественной психологии анализируемое понятие сформулировал Ю.А. Самарин, который полагал, что стиль имеет опосредующую роль в развитии способностей человека и является производным трех компонентов: направленности личности; степени сознательного владения своими психическими процессами; технических приемов деятельности.

Наиболее прочно понятие “стиль” вошло в отечественную науку с началом разработки целостной концепции индивидуального стиля деятельности (В.С. Мерлин, Е.А. Климов). В широком смысле слова стиль деятельности – устойчивая система способов, приемов, проявляющаяся в разных условиях ее осуществления. В собственно психологическом смысле индивидуальный стиль деятельности – "это обусловленная типологическими особенностями устойчивая система способов, которая складывается у человека, стремящегося к наилучшему осуществлению данной деятельности,... индивидуально-своеобразная система психологических средств, к которым сознательно или стихийно прибегает человек в целях наилучшего уравновешивания своей (типологически обусловленной) индивидуальности с предметными внешними условиями деятельности" (Климов, 1963; 49). В этом определении особенно подчеркивается, что это "индивидуальное своеобразное сочетание приемов и способов, обеспечивающее наилучшее выполнение деятельности" (В.С. Мерлин).

Стиль педагогической деятельности, который имеет большую значимость для данной статьи, выявляет воздействие по меньшей мере трех факторов: а) индивидуально-психологических особенностей субъекта этой деятельности – учителя (преподавателя), включающих индивидуально-типологические, личностные, поведенческие особенности; б) особенностей самой деятельности и в) особенностей обучающихся (возраст, пол, статус, уровень знаний и т.д.). В педагогической деятельности указанные факторы соотносятся также с характером взаимодействия; с характером организации деятельности; с предметно-профессиональной компетентностью учителя; с характером общения.

В педагогической науке стили педагогической деятельности прежде всего подразделяют на три общих: авторитарный, демократический и либерально-попустительский, каждый из которых, выявляя отношение к партнеру взаимодействия, определяет его характер: от подчинения – к партнерству – к отсутствию направленного воздействия. Существенно, что каждый из этих стилей предполагает доминирование либо монологической, либо диалогической формы общения.

В рамках данной статьи важно рассмотреть структуру личности, лежащую в основе выработки индивидуального стиля будущего учителя математики. Традиционно ее представляют в виде иерархической пирамиды, на низшем уровне которой располагают *биологически обусловленные особенности* – темперамент и черты характера; следующий уровень содержит *формы отражение* – внимание, восприятие, память, мышление, способности; далее следует *опыт* – знания, умения, привычки, формы и методы работы и, наконец, на высшем уровне – *направленность* – идеалы, ценности, отношения (К.К. Платонов, 1974).

Как и в любой иерархии, особенности низшего уровня влияют на поведение человека больше, чем подструктуры высших уровней (В.Б. Успенский, А.П. Чернявская, 2003). В ситуации, требующей быстрой реакции или решения, действия педагога, не достигшего высокого уровня профессионального развития, импульсивно отражают особенности его темперамента и биологически обусловленные черты. И только по мере анализа он будет использовать накопленные знания и опыт, т.е. руководствуется подструктурами высших уровней. При этом опытные и компетентные учителя, знающие и использующие особенности индивидуального стиля, не находятся в столь полной зависимости от особенностей своего темперамента. Понимание своих особенностей позволяет им компенсировать нежелательные личностные особенности за счет использования других свойств личности. Следовательно, основные пути формирования индивидуального стиля могут заключаться в максимальном использовании профессионально важных качеств человека и их структур и компенсации нежелательных с точки зрения профессиональной деятельности проявлений личностных факторов.

Занимаясь формированием индивидуального стиля деятельности студентов-математиков, необходимо помнить, что он вырабатывается как под влиянием общих целей деятельности, так и представлений субъекта о ее успешности, а наибольшая успешность деятельности обеспечивается благодаря выработанному стилю. Предпосылками выработки индивидуального стиля являются наличие зоны неопределенности деятельности, благодаря чему одна и та же деятельность может быть выполнена по-разному; желание человека сделать свою деятельность более успешной, приятной и приносящей эмоциональное удовлетворение.

Очевидно, что началом любой деятельности является мотив. Следовательно, определяющим условием при организации первых занятий по методике преподавания математики должна стать личностная включенность каждого участника в работу. Необходимо заинтересовать студентов, создать такую атмосферу, чтобы позволить максимально раскрыться каждому. Наряду с традиционными целесообразно включать задания на развитие мотивационной сферы, позволяющие использовать игровые технологии и коллективные творческие дела. Например, обсуждение таких тем, как "Почему я выбрал профессию учителя математики", "Почему дети не хотят учиться математике", "Мой любимый учитель. Какой он?", "Как я научился решать задачи" и т.п. во многом снимает психологические барьеры, способствует развитию навыков коммуникации, создает непринужденную рабочую обстановку. Подобные задания ценны еще и тем, что помогают каждому научиться аргументированно отстаивать свою точку зрения, давать критический анализ высказываниям других. В логике развития мотивационного компонента индивидуального стиля педагогической деятельности можно использовать задания типа "Завершите фрагмент урока, предложенный другой группой", "Продолжи объяснение темы" и другие. Для формирования у студентов направленности на педагогическую деятельность можно предложить методику "Я через десять лет".

Как одна из подструктур индивидуального стиля педагогической деятельности, *мотивационный* компонент также включает в себя направленность на саморазвитие, самовоспитание, самовыражение; преодоление недостатков собственной педагогической деятельности; овладение новыми знаниями и умениями и творческое применение их в профессионально-педагогической деятельности. Современный учитель должен уметь работать с разными детьми (с разным исходным уровнем готовности к обучению, разным складом ума, разным отношением к учебе), выстраивая особую линию обучения для конкретного ребенка с учетом его индивидуальных особенностей. Поэтому студентам предлагается разработать несколько вариантов одного урока, представить теоретический материал в словесной, визуальной, предметно-практической формах; использовать разные способы передачи информации (аналитический или синтетический, индуктивный или дедуктивный). Подобные задания особенно важны в поиске индивидуального стиля деятельности.

*Креативность* как необходимый компонент, отличающий индивидуальный стиль педагогической деятельности, включает в себя способность обобщать опыт творческой деятельности других учителей, видеть новое в привычной профессиональной деятельности, сравнивать различные педагогические концепции, доказывать и обосновывать свои способы деятельности, предлагать различные решения одной и той же проблемы. Как известно, в образовательной практике разработаны и используются различные технологии: трансформирования знаний, умений и навыков; поэтапного формирования умственных действий; коллективного взаимообучения; полного усвоения; разноуровнего обучения; адаптивного обучения; проблемного обучения; модульного обучения и другие.

Будущему специалисту необходимо знать слагаемые указанных педагогических технологий, чтобы иметь возможность свободного их выбора в соответствии с целями обучения и личностными особенностями, и совершенствоваться в их применении. Каждую из названных технологий студенты постигают в процессе непосредственного ее использования в рамках изучения курса методики обучения математики сначала в роли обучающегося, а затем учителя. Важно почувствовать обе роли, только тогда формирование профессионала будет эффективным. К примеру, на занятиях, посвященных логико-математическому анализу основных компонентов учебного материала, актуально применение традиционной технологии трансформирования знаний, включающей следующие процедуры: объяснение сути задания, его цели, последовательности выполнения операций, показ выполнения каждой операции, внесение корректив, оценка выполненной работы. Выполнив предложенные задания, студенты обсуждают суть технологии и разрабатывают фрагменты уроков на ее основе. Технология поэтапного формирования умственных действий активно используется в процессе формирования навыков решения геометрических задач, а затем обучения студентов умению составлять системы учебных заданий, направленных на овладение общими умениями решения геометрических задач. При работе по адаптивной технологии обучения процесс учения в условиях которой становится преимущественно самостоятельной деятельностью, появляется возможность построения работы студентов в статических парах, обеспечивающих постоянное общение друг с другом. Технология адаптивного обучения готовит студентов к осуществлению индивидуального подхода к учащимся на уроках.

Наконец, *оценочный* компонент индивидуального стиля педагогической деятельности, позволяющий соотнести искомый и полученный результат профессиональному эталону, соединяет в себе умение, анализируя, проектировать свою будущую деятельность и дать оценку своим действиям. Критерием указанного компонента служит сформированность педагогической рефлексии. Можно использовать известные из педагогической литературы рекомендации: оценить в различной форме свое состояние, настроение в начале и в конце занятия. Иногда предлагается изобразить свое состояние жестом и мимикой, иногда оценить в баллах или нарисовать, соотнести ассоциации с цветом, погодой. На педагогической практике студентам предлагается пронаблюдать в течение всего урока за собой и учениками и после проведения урока представить, как оценят учащиеся компоненты урока по пятибалльной шкале. Полезно попросить учащихся оценить урок по тем же параметрам, а затем сравнить с собственным прогнозом. Такое задание постепенно вырабатывает привычку вставать в рефлексивную позицию по отношению к самому себе, что очень важно при осуществлении педагогической деятельности.

Итак, формирование стиля педагогической деятельности зависит от специально организованных условий:

1) осознание и понимание каждым студентом своих особенностей и способностей (осуществление психолого-педагогической диагностики),

2) привитие им интереса к педагогической деятельности,

3) создание ситуаций, требующих многовариантного решения, а также моделирующих нестандартные ситуации педагогической деятельности и общения,

4) развитие рефлексивно-оценочных способностей и навыков студентов,

5) включение их в поисково-исследовательскую деятельность.

Интегративным показателем эффективности процесса формирования индивидуального стиля педагогической деятельности является профессиональная творческая активность студентов, их самостоятельность в приобретении нового опыта, знаний и включения в свою практику. Для этого необходимы демократические, диалоговые, вариативные методы общения. Рефлексия, неизбежно возникающая при этом, способствует становлению профессионального мировоззрения. Совместную деятельность должна пронизывать идея преодоления сложностей и достижения цели; следует стремиться к достижению абсолютного признания достоинства студента, его права на выбор. И если при этом каждая личность стремится овладеть собственным, неповторимым, индивидуальным стилем, то это поднимает ее на более высокий уровень осуществления профессиональной деятельности, и можно делать вывод, что процесс подготовки специалиста в вузе осуществлен успешно.

### Библиографический список

1. *Климов Е.А.* Индивидуальный стиль деятельности в зависимости от типологических свойств нервной системы. Казань, 1969.
2. *Платонов К.К.* Способности и характер //Теоретические проблемы психологии личности / Под ред. Е.В. Шороховой. М., 1974.
3. *Успенский В.Б., Чернявская А.П.* Введение в психолого-педагогическую деятельность. М., 2003.
4. *Щедровицкий Г., Розин В., Алексеев Н., Непомнящая Н.* Педагогика и логика. М., 1993.

## О новом федеральном учебно-методическом комплекте по стереометрии для 10–11 классов с углубленным и профильным изучением математики

*Е.В. Потоскуев*

Особенностью развития системы школьного математического образования в Российской Федерации является и, по всей вероятности, будет являться в ближайшем будущем ориентация на профильную дифференциацию обучения математике.

В 2003–2005 г. вышел в свет новый учебно-методический комплект, состоящий из учебников [1, 3], задачников [2, 4] и методических пособий [5, 6] по геометрии для классов с углубленным и профильным изучением математики. Этим учебникам и задачникам решением Федерального экспертного совета МО РФ присвоен гриф “Рекомендовано”, они включены в федеральный список учебников для классов с углубленным и профильным изучением математики.

Кроме того, издательство "Дрофа" планирует издание подготовленных этими же авторами дидактических материалов.

Содержание основных частей учебников и задачников соответствует программе курса стереометрии для классов с углубленным изучением математики; помимо текста, содержащего программный теоретический материал, в учебниках имеется ряд дополнений и приложений, а в задачниках предлагаются задачи к дополнительным разделам.

При написании учебников выдержан принцип преемственности - изложение материала согласуется (как в содержательном, так и в методическом отношениях) с изложением материала в имеющихся учебниках геометрии для 7–9 классов.

Изучение программного материала рассчитано на 3 часа в неделю. Примерное почасовое планирование для каждого класса приведено в конце каждого учебника.

Остановимся кратко на каждой из частей комплекта.

Учебно-методический комплект-10, состоящий из учебника, задачника и методического пособия, предназначен для обучения геометрии (стереометрии) учащихся 10 класса школ и классов с углубленным и профильным изучением математики. Этот комплект может быть использован также для обучения геометрии учащихся и в общеобразовательных классах (с сильным составом учащихся).

"Вхождение" в курс стереометрии в учебнике для 10 класса начинается с обзора различных многогранников. На интуитивном (наглядном) уровне учащиеся знакомятся с кубом, параллелепипедом, призмой, пирамидами, в частности, с тетраэдрами. Вводятся основные элементы этих многогранников, при этом изучаются вопросы об изображении многогранников. (В конце учебника имеется дополнительный материал "Изображение фигур в параллельной проекции".)

В школьном курсе геометрии часто приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности. При изучении стереометрии авторы учебника придерживаются концепции рассмотрения в задачах начальных и основополагающих тем стереометрии, используя при этом модели и изображения куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, параллелепипеда. Такие задачи обладают конструктивностью и содержательностью, а рассуждения учащихся при их решении становятся доступными и естественными, что, в свою очередь, приводит к сознательному и эффективному формированию конструктивных пространственных представлений учеников.

Большое внимание в учебнике и задачнике уделено вопросам построения сечений многогранников. Строить сечения многогранников учащиеся могут уже при изучении первой главы. В нашем задачнике приведены многочисленные блоки рисунков для построений сечений куба. О построениях более сложных сечений многогранников речь идет в дополнении "Методы построения сечений многогранников" (в конце задачника).

В нашем учебнике нет строгого аксиоматического построения стереометрии. На основании нескольких аксиом и следствий из них последовательно доказываются теоремы стереометрии. При этом школьникам можно и нужно сказать, что приведенная в учебнике система аксиом не является полной и мы изучаем школьный предмет "Геометрия", а не институтский курс "Основания геометрии".

Программа изучения стереометрии в 10-м классе достаточно насыщена. Кроме пяти тем, в которых изучаются основополагающие вопросы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, о вычислении расстояний между ними, а также о нахождении углов между прямыми и плоскостями, в учебнике рассмотрены еще две темы: "Векторный метод в пространстве" и "Координатный метод в пространстве".

Эти темы, в отличие от пяти выше названных, могут изучаться на различных уровнях углубления. Каждый учитель сам выберет подходящий его классу уровень их изучения. Они могут быть изучены обзорно, с решением небольшого набора задач и, напротив, могут быть изучены достаточно подробно с решением многих задач, часть из которых соответствует уровню вступительных экзаменов в вузы и некоторым задачам вузовского курса аналитической геометрии.

Отличием изучения геометрии в классах с углубленным изучением математики является не только углубление и расширение теоретического материала, но и методически верная подборка решаемых задач как в количественном, так и в качественном отношении.

В этой связи задачи в задачнике подобраны по принципу: от простого – к сложному. Прежде всего, ученику необходимо решить все опорные задачи курса. Этими задачами ни в коем случае не следует пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Только после решения всех опорных задач следует переходить к решению более сложных задач. В задачнике многие задачи содержат большое количество "подзадач", связанных друг с другом и "организованных" в таблицы.

В задачнике предлагаются три "графические работы". Эти работы соответствуют темам: "Следствия из аксиом стереометрии", "Параллельность в пространстве", "Перпендикулярность в пространстве". Приведенные в этих работах задачи, с одной стороны, достаточно просты, но, с другой стороны, они очень важны. Ученик, разобравшийся в этих задачах и безошибочно выполнивший для каждой из них рисунок, достигает необходимого уровня геометрической культуры, который позволит ему справиться в дальнейшем с решением стереометрических задач повышенной сложности.

В разделе "Дополнения" нашего задачника содержатся также "Материалы для повторения и углубления планиметрии". В них собран обширный теоретический и задачный материал по планиметрии. Решения учеником данных в этом разделе около 200 задач вполне достаточно, чтобы поднять его "планиметрическую культуру".

В методическом пособии к учебнику "Геометрия. 10 кл." авторами комплекта предлагаются некоторые методические рекомендации тем учителям, которые используют или будут использовать данный комплект учебников и задачников при изучении стереометрии.

Любая задача может быть решена не единственным методом, и решения задач, приведенные в методическом пособии, не претендуют на то, чтобы быть единственно возможными. Кроме того, следует особо отметить, что эти решения ни в коем случае нельзя принимать за образцы оформления решений той или иной задачи ввиду, например, отсутствия в них полных аргументированных обоснований некоторых утверждений, что обусловлено невозможностью подробного разбора огромного количества задач в небольшой по объему книге.

В методическом пособии для 10 класса предложены десять контрольных работ, каждая из них предваряется списком подготовительных задач. Используя эти контрольные работы, учитель сам решит, полностью ли они соответствуют тому уровню знаний, который он собирается "задать" при работе с данным классом. При этом возможны как разгрузка контрольных работ посредством изменения текстов задач, введения необязательных заданий, так и усложнение текстов.

Учителя, которые сочтут нужным проводить зачеты по темам курса или итоговый экзамен по курсу стереометрии, в данном методическом пособии найдут материалы как для проведения зачетов, так и для проведения экзаменов. Каждый из 20 билетов экзамена содержат 2 устных вопроса по стереометрии и 2 задачи, при этом одна задача – по планиметрии.

В методическом пособии имеется также пример итогового теста.

Составляя задачный материал, авторы не ставили себе целью включение трудных, олимпиадных задач. В методическом пособии рассказывается о том, как стоит решать те или иные помещенные в нашем задачнике упражнения, сделать оптимальные чертежи к ним. Это, разумеется, не означает, что способ решения задачи, предложенный в пособии, является единственным или наилучшим. Как известно, в большинстве случаев такой способ трудно определить.

Учебно-методический комплект-11 состоит также из учебника, задачника и методического пособия - книги для учителя.

Тема "Геометрические преобразования пространства" занимает важное место в изучении стереометрии в 11 классе. Материал этой темы изложен в первой главе нашего учебника и может изучаться на различных уровнях сложности. Каждый учитель может сам выбрать подходящий его классу уровень изучения этой темы.

Изложение теоретического материала этой главы (как и других глав) авторы советуют вести лекционным методом, излагая материал крупными тематическими блоками.

В нашем учебнике концептуально каждое преобразование пространства (кроме преобразования подобия) изучается "конструктивно-алгоритмически": сначала "конструктивно строится" отображение пространства на себя, затем доказывается, что построенное отображение является преобразованием пространства, после чего вводится соответствующее название и определение, символическое обозначение этого преобразования и изучаются его свойства.

Корректному и последовательному изучению свойств многогранников посвящена глава 2 учебника 11 класса. Изложение теории этой главы авторы советуют вести также лекционным методом, крупными тематическими блоками.

Многогранник определяется как геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников. При этом сообщается, что в школе изучаются лишь выпуклые многогранники. Теорема Декарта-Эйлера о том, что для любого выпуклого многогранника, имеющего В вершин, Р ребер и Г граней, выполняется равенство В–Р+Г=2, принимается без доказательства. Изложение лекционного материала о введении понятия многогранника завершается рассмотрением вопроса о развертках многогранников.

На более позднем уровне, после изучения различных призм, параллелепипедов, пирамид, в нашем задачнике предлагается для решения достаточное количество задач на изготовление разверток многогранников с последующим склеиванием из них этих многогранников. Кроме того, после изучения фигур вращения в задачах требуется изготовить развертку многогранника при условии, что в него можно вписать шар или около него можно описать шар. Наиболее интересные задачи (всего 55 задач) о развертках многогранников ждут учащихся в конце нашего задачника "Геометрия. 11 класс" в дополнении "Может быть или не может быть?".

При изучении пирамид в учебнике рассматриваются некоторые частные их виды (в методическом пособии даны полезные рекомендации по вопросам изучения свойств таких пирамид). Особого внимания заслуживает изучение материала о правильных пирамидах, в частности, о правильном тетраэдре.

В учебнике доказывается теорема о существовании пяти видов правильных многогранников, при этом изучаются некоторые их свойства.

Строгое обоснование вывода формул для вычисления объемов тел в стереометрии весьма сложно. Однако этот вопрос может быть решен, если принять без доказательства принцип Кавальери: "Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны".

В нашем учебнике мы выводим формулы объемов тел, основываясь на еще более сильном утверждении: "Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются фигуры, площади которых относятся как $m : n$, то объемы данных тел относятся как $m : n$".

Используя этот принцип, в учебнике выводим формулы для вычисления объемов призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и его частей.

Фигурам вращения посвящена глава 3 учебника.

При изучении свойств цилиндра и конуса обращается внимание на правильность изображения этих фигур, а также на изображения правильных многогранников, вписанных в цилиндр и конус. При этом учащиеся классов с углубленным и профильным изучением математики узнают, что сечением конической поверхности плоскостью может быть либо окружность, либо эллипс, либо парабола, либо гипербола, либо пара пересекающихся прямых. (Подробнее о конических сечениях можно прочитать в конце нашего учебника "Геометрия. 11 класс" в дополнении "О поверхностях второго порядка".)

При изучении теоретического материала и решении задач выясняется, что, решая задачу, в которой дан правильный многогранник, вписанный в конус, не всегда нужно изображать конус и многогранник, а достаточно изобразить сечение этих фигур плоскостью, проходящей через ось конуса, причем плоскость осевого сечения конуса бывает удобно провести через диагональ основания многогранника. В таком случае решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической.

Материалом о сфере и шаре, о вписанных в них и описанных около них многогранниках, цилиндрах и конусах практически завершается изучение школьного курса элементарной геометрии в 11 классе.

В методическом пособии к учебнику "Геометрия. 11 кл." даются методические рекомендации по организации учебного процесса при изучении программного геометрического материала 11 класса, приводятся решения многих задач задачника. В этом пособии предложены восемь контрольных работ. Каждая контрольная работа предваряется списком подготовительных задач и состоит из двух вариантов. При этом возможны как разгрузка, так и усложнение контрольных работ.

## Библиографический список

1. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
2. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.

3. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
4. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
5. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я.* Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича "Геометрия. 10 класс". М.: Дрофа, 2004.
6. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича "Геометрия. 11 класс". М.: Дрофа, 2005 (готовится к изданию).

## Формирование системного стиля мышления студентов как условие профессионализации усваиваемых знаний

*Т.М. Корикова, И.В. Суслова*

В вузе закладываются основы для интеллектуального развития будущего специалиста, способствующие как формированию готовности к профессиональной деятельности, так и обеспечивающие потребность дальнейшего профессионального роста.

Важной задачей учителя в настоящее время, по мнению психологов, педагогов, методистов является не только оказание помощи учащимся в овладении базой знаний по математике, но и деятельность по их усвоению и преобразованию. Основа развития личности состоит не в том, насколько широким объемом знаний обладает ученик, а в том, как эти знания усваиваются, как функционируют; каков уровень развития мышления; достаточен ли он для того, чтобы ученик мог управлять своей деятельностью.

В нашей статье обсуждаются условия обучения, которые направленно организуют деятельность будущих учителей математики на формирование системного стиля мышления. Основная черта системного стиля мышления, на наш взгляд, – его ориентация на деятельность в познавательной и преобразовательной сферах.

Деятельностный подход в обучении наполняет дидактические принципы новым конструктивным содержанием. З.А. Решетова, доктор психологических наук, в своей работе "Формирование системного мышления в обучении", убедительно аргументируя этот тезис, выделяет принцип системности как особый дидактический принцип, позволяющий осуществлять направленность обучения на формирование у учащихся теоретических основ предмета через организацию деятельности по его системному анализу.

Принцип системности в обучении, по мнению автора, может выступать в качестве "методологической базы рассмотрения:

– во-первых, процесса обучения в целом;

– во-вторых, способа организации учебно-познавательной деятельности (программы) и построения структуры знаний о предмете;

– в-третьих, структуры ориентировочной основы усваиваемых умений и процесса постадийного ее формирования;

– в-четвертых, способа ориентировки формируемого мышления (системный)" [3. С. 93].

Принцип системности как методологический принцип направляет познавательную деятельность на раскрытие системно-структурной природы математики.

Познавательная деятельность формирует знания (математические и методологические), выделяя ориентировочную основу действий для решения учебно-профессиональных задач. Практическая деятельность, используя полученные знания, вносит преобразования в методику работы с понятием, теоремой, задачей, каким-либо разделом математики. Таким образом, преобразовательная деятельность моделирует элементы будущей профессиональной деятельности учителя математики.

Рассмотрим значение метода системного анализа и его особенности в организации познавательной деятельности студентов при работе с математическими задачами.

Деятельность по решению задач позволяет связать знания в единое целое, придает им системность – определенную структуру, логическую связь, форму обобщения. Задача (особенно нестандартная) является системным объектом. Элементы задачи могут быть заданы в различных вариантах связей и отношений, и задача выступает как предмет анализа.

При проведении анализа задачи необходимо провести анализ условия задачи, выделить ее структуру, установить цепочки связей между элементами и другие аспекты, которые имеют непосредственное отношение к выбору способа решения задачи. Именно через решение задач учащиеся могут освоить метод системного анализа как инструмент поиска решения, осознают системный принцип построения и функционирования знаний в математике.

Сложность конкретной задачи определяется тем, какие действия следует провести для раскрытия всей системы связей между данными в задаче элементами. От того, насколько полноценно решающий устанавливает возможные варианты связей и отношений, в которых задана искомая, зависит результат работы над задачей. При таком подходе к работе над задачей главным элементом процесса решения является анализ поиска решения, а не получение ответа, происходит овладение деятельностью по раскрытию связей между данными, искомыми и системой имеющихся в запасе знаний. Как результат формируется системный тип ориентировки мышления.

Общение со студентами на занятиях по элементарной математике и методике ее обучения убеждает, что при проведения поиска решения задач (особенно нестандартных геометрических) студенты испытывают затруднения. На эту проблему методики обучения решению задач обращали внимание и обращают до настоящего времени многие методисты математики (Н.Ф. Нагибин, А.А. Столяр, Ю.М. Колягин, В.Г. Гурова, В.А. Гусев, Г.И. Саранцев и др.). В частности, Г.И. Саранцев отмечает: “Еще недостаточно даже в теоретическом плане раскрыты потенциальные возможности таких этапов решения задачи, как поиск плана решения, способа (метода) решения и подведения итогов. Каждый из них обладает педагогическими достоинствами в приобщении школьников к творческой деятельности" [1].

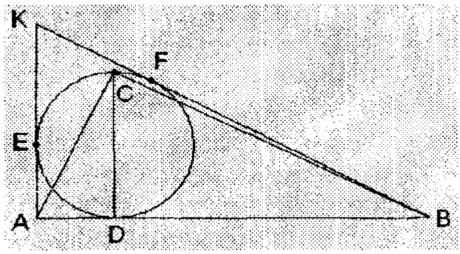
Работа со студентами по освоению метода системного анализа на занятиях по методике математики, на наш взгляд, поможет решению выделенной проблемы.

Метод системного анализа дает возможность проводить поиск решения задачи целенаправленно. Он показывает, что выбор метода решения задачи не является произвольным, а базируется на той системе связей и отношений, в которых представлено искомое.

Основываясь на логике системного анализа, считаем целесообразным выделить для студентов основные моменты анализа поиска решения задачи, указав состав деятельности, и представить обобщенную схему в виде опорной таблицы. Проиллюстрируем сказанное на примере работы с конкретной задачей школьного учебника геометрии.

**Задача** (Шарыгин И.Ф. Геометрия 7–9. 9.3 № 16).

В прямоугольном треугольнике $ABC$ с гипотенузой $AB$, равной $c$, на высоте $CD$, как на диаметре, построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки $A$ и $B$, пересекаются при продолжении в точке $K$. Чему равны касательные к окружности, выходящие из $K$?




Задача отнесена автором к числу задач, имеющих пометку "трудная". Проведем анализ поиска решения задачи.

Выделим объекты, указанные в условии и требовании задачи: прямоугольный треугольник, высота, проведенная из вершин прямого угла треугольника; окружность, построенная на заданном отрезке как на диаметре; касательные к окружности, проведенные из фиксированных точек.

В данной геометрической конструкции следует выделить три подсистемы:

– прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle C = 90°$), $CD$ – высота; прямоугольный треугольник высотой разбит на два подобных прямоугольных треугольника; имеет место соотношение $CD^2 = AD \cdot DB$.

– окружность с диаметром $CD$ касается $AB$ в точке $D$, так как $CD \perp AB$;

– треугольник $ABK$ описан около окружности диаметра $CD$; точки касания окружности со сторонами $AB$, $AK$, $KB$ соответственно $D$, $E$ и $F$. Отрезки касательных к окружности равны, следовательно, $AD = AE$, $KE = KF$, $BD = BF$.

Согласно требованию задачи необходимо найти длину отрезка $KE$, если известна длина гипотенузы $AB$ треугольника $ABC$.

Выявим связи между элементами подсистем (вертикальные связи), а именно связи между элементами двух треугольников – прямоугольного $\Delta ABC$ и $\Delta ABK$.

$AB$ – общая сторона этих треугольников. Высота $CD$ прямоугольного треугольника является диаметром окружности, вписанной в треугольник $ABK$. Диаметр $CD$ можно выразить как среднее геометрическое отрезков гипотенузы $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$ ($CD^2 = AD \cdot BD$).

Рассмотрим отрезки касательных к окружности. Через отрезки касательных можно выразить как радиус вписанной в треугольник $ABK$ окружности, так и его периметр.

Очевиден следующий план действий. Введя обозначение $AD = m$, $DB = n$, $KE = x$, запишем площадь треугольника $ABK$ с одной стороны по формуле Герона, а с другой – через радиус вписанной окружности и полупериметр этого треугольника. Приравняв полученные выражения, получим уравнение, решение которого дает ответ на вопрос задачи.

Метод решения задачи – метод площадей.

Таким образом, при проведении анализа поиска решения задачи мы разбили условие задачи на части, выделили структуры связи (горизонтальные и вертикальные), выявили отношения между ними, это позволило составить цепочку опосредствующих связей и отношений искомого с данными задачи.

Представим основные действия по поиску решения задачи в виде таблицы.

*Схема учебной деятельности по поиску решения задачи.*

Цель: Освоить деятельность по анализу поиска решения задачи.

Объект: Геометрическая задача по курсу математики средней школы.

Предмет: Анализ поиска решения геометрической задачи.

Средства: Метод системного анализа.

*Таблица 1*

| | |
|---|---|
| Состав деятельности | Выделить основные геометрические величины условия и требования задачи.<br>Разбить условие задачи на части (подсистемы) относительно рассматриваемых объектов.<br>Выявить связи элементов в каждой части.<br>Определить связи между элементами частей.<br>Определить последовательность действий по поиску решения задачи на основе установленных в процессе анализа связей.<br>Сделать выбор метода решения задачи на основе проведенного анализа.<br>Провести синтез (запись решения задачи) и презентацию полученных результатов. |
| Результат | Умение проводить анализ поиска решения математической задачи. |

Первоначально деятельность по проведению анализа поиска решения задачи выполняется как внешняя на уровне проектирования – выделены цель, средства, состав деятельности. Далее, будучи сформированной и усвоенной, она переходит во внутренний план действий, становится ориентировочной основой учебной и будущей профессиональной деятельности, превращаясь в умение проектировать и конструировать деятельность по поиску решения задач.

Логика деятельности определяется системным стилем ориентировки. Действительно, в работе по поиску решения задачи студент:

– во-первых, использует структурные связи геометрических объектов,

– во-вторых, осуществляет действия, соответствующие деятельности учителя математики.

Не менее важной в плане профессиональной подготовки учителя математики является деятельность по проведению анализа задачного материала параграфа школьного учебника. Для организации такой деятельности на занятиях по методике обучения математике полезно предложить студентам работу с опорной таблицей, которая также содержит развернутый план действий.

Предполагаемая таблица включает ориентировочную основу для формирования у студентов умений осуществлять анализ блока математических задач по конкретной теме.

*Схема анализа задач по конкретной теме школьного курса математики.*

Цель: Изучить методику и освоить деятельность по проведению анализа задачного материала темы.

Объект: Задачный материал школьного учебника математики.

Предмет: Анализ блока математических задач школьного учебника.

Средства: Метод системного анализа. Школьные учебники по математике, дидактические материалы.

*Таблица 2*

| | |
|---|---|
| Состав деятельности | Провести анализ данных в каждой из предлагаемых в теме задач, выделить ее базис.<br>Определить роль и место каждой задачи в теме.<br>Определить уровни сложности задач.<br>Выделить ключевые задачи, задачи, дополняющие теоретический материал.<br>Провести разбиение блока рассматриваемых задач на группы.<br>Выделить методы решения задач.<br>Установить связи между группами задач, а также с задачами других тем школьного курса.<br>Рассмотреть возможности:<br>– проведения обобщения и конкретизации задач;<br>– построение аналогов для отдельных задач, конструирования новых задач и др. |
| Результат: сформированные умения | – определять функции задач в процессе изучения;<br>– выявлять через задачный материал взаимосвязь знаний и их развертывание в математике;<br>– исследовать и преобразовывать набор задач учебника в процессе организации деятельности учащихся по усвоению знаний. |

Таблица представлена как системный объект с указанием цели, объекта, средства, состава деятельности и результата. Итогом проведенного анализа по указанной в таблице схеме служит представленный в целостности и взаимосвязи задачный материал параграфа учебника.

Содержание таблиц, их структура, речевая форма представления на занятии выполняют функцию регуляторов деятельности: с одной стороны – познавательной (знания), с другой – деятельности, в которой формируется ориентировочная основа умений будущего учителя математики.

Профессиональный аспект формируемых умений по анализу задачного материала обеспечивается их усвоением в качестве ориентировочной основы действий, которые в дальнейшем применяются для решения учебно-профессиональных задач.

Считаем, что описанный подход к работе с задачным материалом школьного учебника математики способствует формированию системного стиля мышления студентов, формы работы моделируют познавательные и практические задачи будущей профессиональной деятельности, это и составляет аспект профессионализации усваиваемых ими знаний.

### Библиографический список


1. *Саранцев Г.И., Миганова Е.Ю.* Функции задач в процессе обучения // Педагогика. 2001. № 9.
2. *Семенов Е.Е.* Принцип систематизации в преподавании математики // Математика в школе. 2004. № 2.
3. Формирование системного мышления в обучении: Учеб. пособие для вузов / Под ред. З.А. Решетовой. М.: ЮНИТИ–ДАНА, 2002.


## Применение вейвлет-анализа к исследованию функции Ван дер Вардена

*В.Н. Осташков*

Математическая подготовка будущих инженеров как одна из составляющих их профессиональной компетентности необходима, прежде всего, для того, чтобы инженер, перед которым производство все время ставит практические и теоретические проблемы, мог научно

– объяснять происходящие явления,

– управлять технологическими процессами,

– прогнозировать их последствия.

Рациональное осмысление триединства целей науки [объяснение + управление + прогноз] опирается, в конечном счете, на математическую модель динамического процесса, каковым является, например, вибрация сложных агрегатов (металлорежущих станков, буровых установок, мостов, геофлюидных потоков, нефтегазопроводов и т.п.). В последнюю четверть века стало понятным, что окружающий нас мир

– сильно нелинейный (для его описания используются нелинейные дифференциальные уравнения и нелинейные отображения),

– турбулентный (нет лапласовского детерминизма, но есть детерминированный хаос),

– иерархический (образно говоря, "в каждой матрешке лежат две или более подобных ей матрешек"; это немедленно привело к появлению фрактальной геометрии, изучающей самоподобные объекты и использующей новые методики вычисления – как правило, дробных – размерностей этих объектов).

Фрактальная геометрия, собрав на начальной стадии своего развития обширную коллекцию фракталов и мультифракталов и научившись их классифицировать, сегодня переходит к объяснению физических причин и следствий фрактальности в сложных системах – природных, технических, абстрактных. При этом еще более возросла роль методики определения фрактальных размерностей, так как теперь они уже являются параметрами конкретных физических моделей, что предъявляет особые требования к точности соответствующей методики.

Вибросигнал представляет собой некую функцию $s = f(t)$ от времени $t$, которая, как показывает практика, обладает тем или иным самоподобием. График самоподобной функции инвариантен относительно некоторого класса непрерывных преобразований плоскости $(t, s)$. Например, одной из многих используемых модель-ных функций является функция Ван дер Вардена $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi 2^{n+1}} \mid \arcsin \sin 2^n \pi x \mid$, $n \in \mathbf{N}$. Она инвариантна относительно аффинных преобразований

$$A : (x,\ y) \quad \mapsto \quad (\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}(x+y)),$$
$$B : (x,\ y) \quad \mapsto \quad (\tfrac{1}{2}(x+1),\ \tfrac{1}{2}(-x+y+1))$$

[3]. График этой функции представлен на рис. 1 а, б.

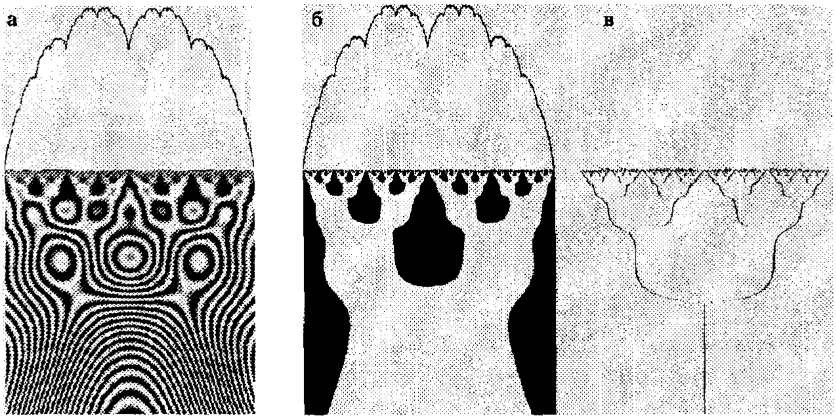



Рис. 1. а - график функции Ван дер Вардена $f(x)$ на отрезке $[0; 1]$ и рельеф поверхности $W(a, b)$, выполненных в 256 оттенках серого цвета; б - график функции $f(x)$ и поверхность $W$ (положительным значениям отвечают белые точки, отрицательным – черные); в – скелетон функции Ван дер Вардена

Вместо $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ можно рассмотреть семейство функций, если, например, менять знаки слагаемых по какому-либо правилу. Для целых $p$, $q$ рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{[np/q]} \varphi_n(x)$, где $[x]$ – целая часть числа . На рис. 2 приведены 8 графиков функций для $q = 7$.

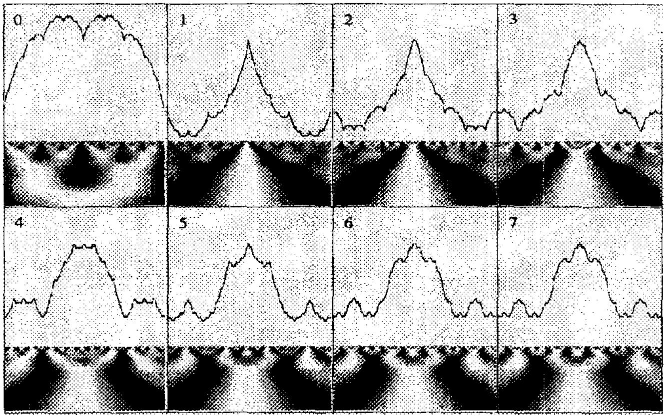



Рис. 2. Семейство кривых Ван дер Вардена и соответствующих поверхностей $W$ для $q = 7$, $p$ изменяется от 0 до 7; фрактальная размерность кривых равна 1,05

Идеи вейвлетов созвучны идеям Фурье-преобразования. Вместо базисной функции в виде комплексной экспоненты вейвлет-преобразование использует базисный вейвлет $\psi(t) = \frac{d^8}{dt^8}e^{-t^2/2}$, который удовлетворяет требованиям одновременной локализации в частотном и временном пространствах, ограниченности, нулевого среднего. В этом случае одномерное непрерывное вейвлет-преобразование функции $f(t)$, которая принадлежит пространству $L^2(R)$ (т.е. определена на всей действительной оси и обладает конечной нормой), имеет следующий вид:

$$[W^{\psi} f]\,(a,b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \qquad (1)$$

Параметры  и $b$ отвечают за сжатие и сдвиг вдоль оси $t$ базисного вейвлета, позволяя полностью сконструировать пространство $L^2(R)$.

Результатом преобразования (1) является поверхность $W$ – двумерный набор коэффициентов (его визуализируют путем проектирования коэффициентов на плоскость $ab$ и сопоставления величине коэффициентов некой цветовой гаммы), в котором, как и в коэффициентах преобразования Фурье, заключена информация о частотных характеристиках сигнала (благодаря параметру $a$). Более того, сохраняется информация и о поведении сигнала во времени (благодаря параметру $b$), что выгодно отличает вейвлет-разложение от преобразования Фурье. Платой за это является некоторое ухудшение разрешения по частоте, так как любой вейвлет, в отличие от синусоиды, в частотном пространстве не представляет собой $\delta$-функции. Однако этот недостаток во многом компенсируется гладкостью набора вейвлет-коэффициентов, которая в Фурье-анализе достигается лишь применением искусственных операций. Полученные коэффициенты легко сопоставить с привычным спектром мощности. Для этого достаточно найти следующий интеграл [1]:

$$E(a) = \int W^2(a,b)db. \tag{2}$$

Зависимость $E(a)$ иногда называют скалограммой. Смысл энергетического спектра ей придает тот факт, что для вейвлет-преобразования существует аналог теоремы Парсеваля. Для того, чтобы сопоставить спектр мощности и скалограмму, необходимо перейти от параметра к частоте $\omega$, воспользовавшись соотношением

$$a\omega = \omega_\psi, \tag{3}$$

где $\omega_\psi$ – это константа, зависящая от выбора базисного вейвлета. Проще всего ее можно оценить, применив формулу (3) к скалограмме модельного сигнала с известными частотами.

Известно, что если функция $f(t)$ самоаффинна, то есть остается инвариантной при масштабировании вида

$$t \mapsto \lambda t, \quad f \mapsto \lambda^H f,$$

то ее спектр мощности имеет степенной характер:

$$P(\omega) \sim \omega^{-2H-1}. \tag{4}$$

Такое же соотношение, очевидно, справедливо и для скалограммы (2) [4–6], однако она представляет собой уже гораздо более гладкую функцию. Это, впрочем, является не главным достоинством вейвлет-преобразования. Естественность использования вейвлетов при анализе фрактальных сигналов обусловлена иерархичностью вейвлетного базиса. Фрактальность подразумевает воспроизведение каких-либо характеристик сигнала на разных масштабах, а вейвлет-преобразование как бы производит иерархизацию особенностей сигнала в зависимости от их масштаба (частоты), с сохранением их пространственной (временной) локализации. В результате, самоподобие сигнала приводит к самоподобию картины его вейвлет-разложения. При этом разработаны различные (помимо скалограммы) способы извлечения численных характеристик из такой самоподобной картины. Так как набор вейвлет-коэффициентов несет в себе избыточную информацию, то часто используют только самую информативную часть данных, а именно, локальные максимумы (вдоль параметра $b$, при заданном значении ). Картину локальных максимумов иногда называют скелетоном (рис. 2 в). Для определения фрактальной размерности $D$ по скелетону пользуются тем фактом, что

$$\lim_{a\to 0}\frac{\log N(a)}{\log a^{-1}} = D, \tag{5}$$

где $N(a)$ – это количество локальных максимумов на масштабе $a$. Для кривых Ван дер Вардена эта размерность, как показывает численный анализ, близка к 1 и равна 1,05$\pm$0,01.

В качестве еще одного преимущества вейвлет-преобразования перед преобразованием Фурье можно привести предсказуемость влияния граничных эффектов, а именно, если базисный вейвлет имеет компактный носитель $[-S;S]$, то на масштабе $a$ влияние границы распространяется на расстояние $aS$. Область, внутри которой не происходит влияния граничных эффектов на величину вейвлет-коэффициентов, называют треугольником достоверности. Наличие такой области делает формулу (2) не совсем удобной для практических расчетов. Для устранения влияния граничных эффектов бывает удобно заменить интегрирование усреднением, которое позволяет учитывать только часть коэффициентов.

Формула (5) позволяет определять размерности монофракталов, однако из вейвлет-разложения относительно легко можно извлечь любые мультифрактальные характеристики [4]. Кроме того, вейвлет-преобразование (1) обобщается на многомерный случай [2], что позволяет анализировать двумерные наборы данных напрямую, не прибегая к анализу одномерных срезов.

## Библиографический список


1. *Астафьева Н.М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // УФН. 1996. Т. 166. № 11.
2. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001 (пер. с англ. Daubechies I., Ten Lectures on Wavelets, 1992).
3. *Осташков В.Н., Смирнов Е.И.* Формирование нелинейного мышления студентов посредством визуализации самоподобных множеств // Труды вторых колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. С. 173–189.
4. *Hansen A., Scmittbuhl J., Batrouni G.G.* Distinguishing fractional and white noise in one and two dimensions // Phys. Rev. E, **63**, 2001.
5. *Hwang W-L., Mallat S.* Characterization of Self-Similar Multifractals with Wavelet Maxima // Applied and Computational Harmonic Analysis, **1**, 1994. P. 316–328.
6. *Simonsen I., Hansen A.* Fast algorithm for generating long self-affine profiles // Phys. Rev. E, **65**, 2002.


## Структура компьютеризированного учебника по геометрии для педагогических вузов

*Т.В. Капустина*

Необходимость информатизации процесса обучения математике в настоящее время является неоспоримой в связи с наличием такого инструмента новых информационных технологий, как компьютерные математические системы (Mathematica, Maple). Актуальной задачей, призванной сдвинуть с мертвой точки внедрение информатизации в обучение математике, является разработка соответствующего методического обеспечения и программных продуктов учебного назначения. Одним из видов методического обеспечения учебного процесса по математике являются компьютеризированные учебные пособия.

В настоящей заметке будем рассматривать компьютерную систему Mathematica в качестве основного средства создания таких пособий, поскольку она обладает не только возможностями вычислений (численных, символьных, графических), но также является языком программирования сверхвысокого уровня, чрезвычайно удобным для пользователя. За рубежом компьютеризированные учебники на основе системы Mathematica уже создаются (например, книги А. Грея [3, 4]).

Под *компьютеризированным учебником (задачником)* будем понимать учебник (задачник) нового поколения, представляющий собой печатное издание, предусматривающее систематическое применение системы Mathematica. Это выражается в том, что классическое изложение в тексте учебника дополняется специальным разделом, содержащим параллельное сопровождение основных формул и опорных задач предметного раздела программами для их реализации в среде Mathematica. Цель такого дополнения – автоматизация вычислений и визуализация графических объектов (кривых, поверхностей, векторных полей, семейств кривых, сетей на поверхностях и т.п.). Именно курс геометрии является благодатной почвой для создания учебных пособий такого рода, так как появляется возможность по-новому изложить материал и включить в него вопросы, ранее рассматривавшиеся лишь теоретически (например, восстановление формы кривой по ее натуральным уравнениям).

Итак, компьютеризированный учебник должен состоять из двух основных частей: классически изложенной теоретической части и дублирующего ее раздела, который содержит реализацию основных формул в среде Mathematica, а также запрограммированные в этой среде опорные задачи для их автоматического решения. Программирование этих формул и опорных задач неизбежно происходит в характерном для среды Mathematica стиле *функционального* программирования; при этом должны быть сделаны все необходимые пояснения о структуре программ. Третья, необязательная составляющая компьютеризированного учебника – компакт-диск, в котором содержатся все файлы с формулами второго раздела. Эти файлы могут быть организованы как документы среды Mathematica (с расширением **.nb**) или как стандартные дополнения среды Mathematica [1]. Стандартные дополнения представляют собой, по сути, расширение ядра среды, они содержат новые (так называемые "внешние") функции, которых нет в ядре (функции ядра называются встроенными). Подключив стандартное дополнение, можно пользоваться внешними функциями так же, как встроенными, не вводя программы для этих функций.

Второй раздел компьютеризированного учебника может быть выдержан в таком стиле программирования, когда содержащиеся в нем программы автономны, насколько это возможно. (Отметим, что стремление к автономности отдельных программ не способствует их компактности.) В этом случае можно не дополнять учебник компакт-диском с пакетом стандартных дополнений. Студенты при использовании учебника могут сами делать вводы содержащихся в нем программ и проводить вычисления с их помощью.

Оптимальный способ применения компьютеризированного учебника может быть достигнут в том случае, когда он дополнен специально созданным пакетом стандартных дополнений, содержащим все имеющиеся в учебнике программы. Пользователь будет иметь возможность легко интерпретировать эти программы в среде Mathematica, применяя готовые внешние функции пакета. К тому же, благодаря взаимосвязи всех внешних функций в пакете, программы могут быть составлены компактно.

Компьютеризированный учебник, добавленный к нему компьютеризированный задачник и сопровождающий их пакет стандартных дополнений составляют целостный учебный комплекс для компьютерного сопровождения нормативного курса геометрии. Вероятно, что в ближайшее десятилетие эти комплексы будут созданы по всем основным математическим дисциплинам учебного плана педагогического вуза.

Необходимость скорейшего издания учебников нового поколения (то есть компьютеризированных учебников) отмечается в [2].

Проведем структурирование содержания семинарских занятий по нормативному курсу "Геометрия" для физико-математических факультетов педагогических вузов, имеющее целью выделить темы, для изучения которых необходимо компьютерное сопровождение. (Применение компьютера во время чтения лекций каждый преподаватель должен осуществлять в соответствии с индивидуальным взглядом на организацию этого вида учебной деятельности; компьютерное сопровождение лекций в подавляющем большинстве вузов сдерживается не столько отсутствием необходимого оснащения, сколько нехваткой необходимых педагогических программных продуктов.)

Основные цели применения компьютера на занятиях по геометрии:

1) исключение рутинной работы;

2) визуализация геометрических объектов;

3) конструктивная деятельность в этой предметной области.

Поскольку большинство задач курса "Геометрия" может быть отнесено (в той или иной степени) к типу расчетных (за исключением задач раздела "Конструктивная геометрия и методы изображений"), то применять систему Mathematica можно почти на каждом занятии в форме свободной работы пользователя в ее среде. Нас же будет интересовать другое: какие опорные задачи курса "Геометрия" следует запрограммировать, с тем чтобы создать программные продукты учебного назначения в среде Mathematica для наиболее эффективного компьютерного сопровождения? Ниже дадим перечень этих задач. В нем будут выделены курсивом те задачи, которые не включают в программу (в силу большой затратности времени на их решение или невозможности аналитического решения) и рассмотрение которых стало реальным благодаря замечательным возможностям системы Mathematica.

**Аналитическая геометрия**

1. Общая теория линий второго порядка (определение асимптотических направлений и асимптот; составление уравнения диаметра, сопряженного данному направлению, и диаметра, проходящего через данную точку; определение центра линии второго порядка; составление уравнения касательной к линии второго порядка (по данной точке касания, по данному направлению касательной, по точке, через которую проходит касательная); определение главных направлений и главных диаметров; приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду).

2. Геометрические преобразования плоскости (составление формул аффинного преобразования по данным трем парам соответственных точек; определение образа и прообраза данной прямой при аффинном преобразовании; *определение образа и прообраза при аффинном преобразовании произвольной кривой, заданной неявным уравнением;* определение инвариантных точек и инвариантных прямых данного аффинного преобразования).

3. *Составление уравнения поверхности вращения, ось которой не совпадает ни с одной из координатных осей.* Составление уравнения цилиндрической поверхности по данной направляющей кривой и данному направлению образующих. Составление уравнения конической поверхности по данной направляющей и вершине. *Опорные задачи общей теории поверхностей второго порядка.*

4. *Все опорные задачи теории геометрических преобразований пространства.*

**Проективная геометрия**

1. Составление уравнений коллинеации, заданной четырьмя парами соответственных точек. Определение образа и прообраза точки и прямой при данной коллинеации.

2. Поляритет относительно линии второго порядка на проективной плоскости. Определение типа квадрики на проективной плоскости по ее уравнению.

**Дифференциальная геометрия**

1. Вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление кривизны плоской кривой. Нахождение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых. Нахождение эволюты плоской кривой. Нахождение семейства эвольвент плоской кривой. Составление натурального уравнения плоской кривой. *Восстановление плоской кривой по ее натуральному уравнению.*

2. Вычисление длины дуги пространственной кривой. Вычисление кривизны и кручения пространственной кривой. Нахождение элементов сопровождающего трехгранника кривой. Составление натуральных уравнений пространственной кривой. *Восстановление пространственной кривой по ее натуральным уравнениям.*

3. Составление уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности. Нахождение огибающей однопараметрического семейства поверхностей. Вычисление первой квадратичной формы поверхности. Длина дуги линии, принадлежащей поверхности. Угол между двумя линиями на поверхности. Площадь области поверхности.

Вычисление второй квадратичной формы поверхности. Вычисление нормальной кривизны, соответствующей данному направлению на поверхности. Вычисление главных кривизн поверхности. Полная и средняя кривизны поверхности. Сопряженные сети. Асимптотические линии. Линии кривизны.

Вычисление символов Кристоффеля. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. *Вычисление кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности. Визуализация геодезических.*

В качестве примера приведем решение задачи о восстановлении формы плоской кривой по ее натуральному уравнению $k = k(s)$. Mathematica позволяет сделать это благодаря возможности решения в ее среде систем дифференциальных уравнений (в большинстве случаев, естественно, приближенного, но с требуемой точностью) и наличия уникального объекта – так называемой интерполяционной функции. Тело программы для визуализации кривой, заданной натуральным уравнением, общий вид которого $k =$

$fun\,(s)$, выглядит так:

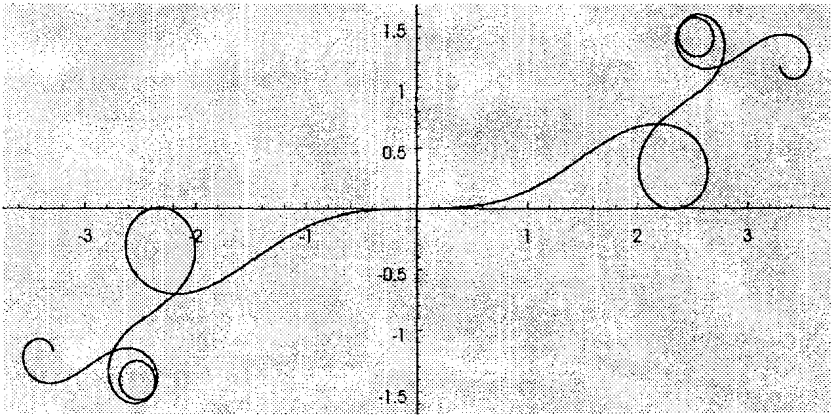
```
plotncurve2D[fun_,a_:0,{b_:0,c_:0,b1_:1,c1_:0,b2_:0,
  c2_:1},optsnd___,{smin_:-10,smax_:10},optspp___][t_]:=
  ParametricPlot[Module[{x,y,l,m},{x[t],y[t]}/.NDSolve[
  {x''[ss]==fun[ss]*l[ss],y''[ss]==fun[ss]*m[ss],
  l'[ss]==-fun[ss]*x'[ss],m'[ss]==-fun[ss]*y'[ss],
  x[a]==b,y[a]==c,x'[a]==b1,y'[a]==c1,l[a]==b2,m[a]==c2},
  {x,y,l,m},{ss,smin,smax},optsnd]]//Evaluate,
  {t,smin,smax},AspectRatio->Automatic,optspp]
```

Здесь реализованы формулы Френе; plotncurve2D – имя внешней функции. Добавим, что программа абсолютно автономна, то есть не использует другие внешние функции.

Для кривой, заданной натуральным уравнением $k = s\cos s$, применение внешней функции plotncurve2D выглядит так:

```
plotncurve2D[# Cos[#]&,0,{0,0,1,0,0,1},{-9,9},
PlotPoints->80]
```

В результате получается следующее изображение:




Системное внедрение в учебный процесс вуза компьютерной системы Математика как средства новых информационных технологий и как среды для создания и использования программных средств учебного назначения служит целям оптимизации процесса обучения математике. Для педагогических вузов это особенно актуально, так как современный учитель, кроме знаний по предмету (математике), должен обладать знаниями в области применения средств новых информационных технологий.

## Библиографический список

1. *Капустина Т. В.* Информатизация процесса обучения математическим дисциплинам в педагогическом вузе на основе компьютерной системы Mathematica // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. С. 191–199.
2. *Мантуров О.В.* Mathematica (3.0–5.0) и ее роль в изучении математики // Проблемы и перспективы информатизации математического образования: Сборник научных работ, представленных на всероссийскую научно-методическую школу-семинар "Проблемы и перспективы информатизации математического образования". Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2004. С. 3–10.
3. *Gray A.* Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed. CRC Press, 1997.
4. *Gray A., Mezzino M., Pinsky M.* Ordinary Differential Equations with Mathematica. TELOS, 1996.

## Дифференциация и интеграция математических знаний в процессе решения профессионально-ориентированных экономических задач

*Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец*

В современных условиях рыночной экономики существенно возросли требования к качеству подготовки выпускников экономических специальностей вузов, которые должны уметь решать не только типовые задачи учетно-расчетного характера, при решении которых доминирующую роль играет операционная составляющая, но также и сложные задачи аналитического характера, при решении которых доминирующую роль играет интеллектуальная составляющая, базирующаяся на умении анализировать текущее и прогнозировать будущее состояние экономических объектов и процессов, мыслить и действовать в изменяющихся условиях, моделировать и находить оптимальные решения, основанные на применении современных математических моделей и методов. Наиболее известными из последних являются: оптимизационные модели и методы (в частности ассортиментная задача Канторовича, транспортная задача, задача о назначениях и др.), балансовые модели (в частности модель межотраслевого баланса Леонтьева, модель соотношения национальных доходов стран), модели теории вероятности и математической статистики.

Данное обстоятельство нашло свое отражение в Государственном образовательном стандарте, где определены достаточно высокие требования к уровню математической подготовки современного специалиста финансово-экономического профиля. При этом изучение математических дисциплин призвано раскрыть не только содержание собственно математических знаний, но и установить тесные интегративные связи со специальными дисциплинами, особенно с теми, изучение которых сопровождается решением профессионально-ориентированных задач с использованием экономико-математических методов и моделей. Основная интегративная роль здесь принадлежит математике. Поэтому первоочередной задачей математической подготовки в вузах на экономических специальностях, на наш взгляд, является обучение будущего специалиста умению разрабатывать или обоснованно выбирать математические модели и применять математические методы для решения практических задач будущей профессиональной деятельности.

Анализ современного состояния проблемы интеграции математических знаний позволяет констатировать, что в настоящее время заметно усилился интерес ученых к исследованию данной проблемы и ряду смежных вопросов. При этом исследования проводятся, главным образом, в рамках следующих научных направлений: реализация внутри- и межпредметных связей, разработка интегрированных курсов, формирование прикладной направленности в обучении математике, укрупнение дидактических единиц, разработка форм и средств интеграции математических знаний, наглядно-модельное исследования учебно-познавательной деятельности.

На основе проведенного анализа научных трудов, Государственного образовательного стандарта, учебных и рабочих программ было установлено, что:

а) к настоящему времени еще недостаточно разработаны педагогические условия, методы и формы реализации интегративной направленности обучения математике при моделировании экономических процессов и явлений;

б) в теории и практике обучения математике еще не сформировалось понимания сущности, характеристик и критериев интеграции математических знаний на основе наглядного моделирования.

Это, в свою очередь, порождает противоречие между органически целостной структурой и сущностью математического знания и наличием традиционно формализованной на данный момент системы обучения математике студентов экономических специальностей вузов.

Технология наглядного моделирования применяется в процессе обучения математике студентов экономических специальностей Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ), Международного университета бизнеса и новых технологий (института) (МУБиНТ) Ярославского филиала Московской финансово-юридической академии (ЯФ МФЮА) при решении профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ).

Для решения некоторых ПОЭЗ необходимо использовать сложные наукоемкие экономико-математические методы, требующие проведения большого объема вычислительной работы. Для решения подобного рода задач целесообразно использовать компьютер, а занятия проводить в аудиториях, оснащенных средствами вычислительной техники.

Рассмотрим более подробно одну из таких профессионально-ориентированных задач, для объяснения решения которой используется табличный процессор Microsoft Excel. Предлагаемая задача связана с оценкой рисков инвестиционных проектов и имеет важную прикладную направленность. Для решения задач по оценке рисков в современной финансово-экономической практике используются различные методы, которые рекомендованы такими организациями, как UNIDO (Организация объединенных наций по промышленному развитию), Министерство финансов, Министерство экономики, Госстрой. Одним из наиболее эффективных, но одновременно и одним из наиболее сложных методов является метод имитационного статистического моделирования (или метод Монте-Карло), который используется в процессе решения рассматриваемой задачи.

***Постановка задачи.*** Для производства некоторой продукции "X" планируется привлечение инвестиций из внебюджетных источников. В процессе предварительного анализа выявлены параметры проекта, часть из которых экспертами-аналитиками была отнесена к детерминированным, а часть – к случайным (стохастическим), см. рис. 1. Для случайных параметров проекта определен возможный интервал их вариации (прогнозируемые max и min значения).

Требуется ответить на вопрос, следует ли принимать данный проект к реализации и какова вероятность того, что он окажется убыточным.

Прежде чем переходить к демонстрации решения задачи в среде табличного процессора Microsoft Excel, рассмотрим, какое место занимают процессы дифференциации и интеграции математических знаний в ходе ее решения.

Следует отметить: ввиду того, что задача имеет сложный междисциплинарный характер, при ее решении наблюдается несколько уровней дифференциации.

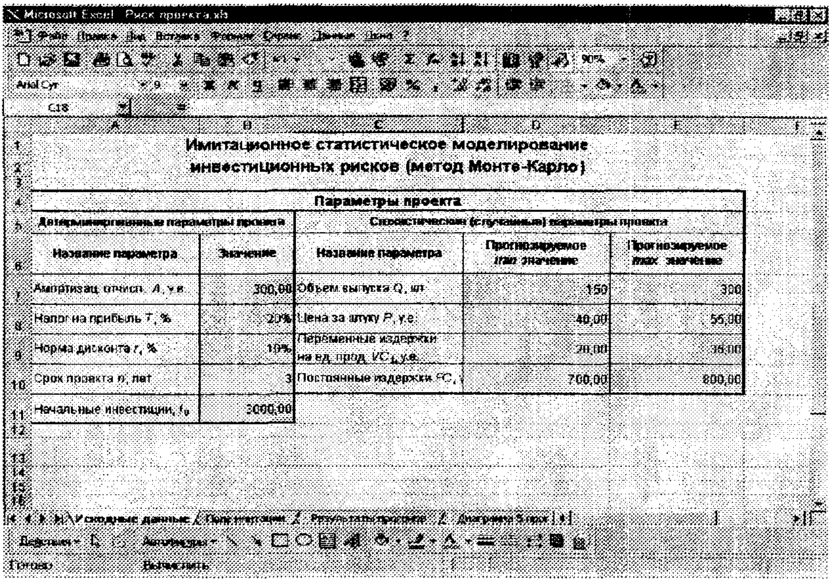



Рис. 1

Первый происходит на уровне учебных дисциплин, так как для решения задачи требуются знания из различных дисциплин, основными из которых являются экономическая теория, математика, финансово-экономические расчеты, эконометрика, информатика.

Второй уровень дифференциации связан с особенностью решения задачи методом Монте-Карло. Для реализации этого метода необходимо разработать три модели: модель воздействий случайных факторов, модель экономической системы и модель статистической обработки. На этом этапе модели пока имеют только самое общее (абстрактное) представление и не реализованы в виде конкретных математических моделей. Для построения таких моделей необходимо отобрать соответствующие математические знания, что ведет к третьему уровню дифференциации.

Третий уровень – дифференциация на уровне математических знаний. Так, базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели воздействий случайных факторов, являются: понятие случайной величины; вероятностные законы распределения; предельные теоремы теории вероятностей; методы моделирования случайных величин. Базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели экономической системы, являются: схема наращения; схема дисконтирования; геометрическая прогрессия; логарифмы; количественные методы оценки инвестиционных проектов. Базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели статистической обработки, являются: методы статистического оценивания числовых характеристик случайных величин; методы проверки статистических гипотез.

Последовательное изучение и применение отобранных знаний в соответствии с логикой решения задачи определяют суть процесса интеграции математических знаний. В рассматриваемой задаче результатом процесса интеграции математических знаний являются математические модели, которые, в отличие от абстрактных моделей 2-го уровня дифференциации, имеют конкретное наполнение в виде совокупности математических выражений. Таким образом, можно сказать, что в процессе интеграции математических знаний происходит трансформация абстрактных моделей в математические модели, которые в рассматриваемой задаче представляют собой:

1) модель воздействий случайных факторов – это модель (поле) имитации стохастических параметров инвестиционного проекта;

2) модель экономической системы – это модель оценки эффективности инвестиционного проекта по показателю *NPV (net present value* – чистая современная стоимость);

3) модель статистической обработки – модель статистической оценки стохастических параметров проекта.

Разработанные модели должны быть объединены в единую комплексную модель, что можно рассматривать как 2-й уровень интеграции. Работа с комплексной моделью в общем-то и позволяет решить рассматриваемую задачу.

Следует отметить, что здесь также можно выделить и третий уровень интеграции – интеграцию на уровне дисциплин, так как полученные знания могут в последующем использоваться обучаемыми при изучении таких дисциплин, как финансовый анализ, управление проектами, ценные бумаги, инвестиции, бизнес-планирование.

Таким образом, весь процесс решения рассматриваемой задачи распадается на ряд последовательных этапов дифференциации и интеграции, ключевыми из которых являются этапы дифференциации и интеграции математических знаний.

Разработанные на уровне интеграции математических знаний модели достаточно легко реализуются программным образом в среде табличного процессора Microsoft Excel.

### Библиографический список

1. *Макарова Н.В., Трофимец В.Я.* Статистика в Excel. М.: Финансы и статистика, 2002. 365 с.
2. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.:Гардарики, 2002. 383 с.
4. *Трофимец Е.Н.* Наглядное моделирование экономических явлений и процессов как средство интеграции математических знаний в процессе обучения математике студентов экономических специальностей вузов. Дис.... канд. пед. наук. Ярославль, 2004. 194 с.

## Учащиеся – авторы задач школьных учебников

*Н.М. Епифанова*

Известно много случаев яркого проявления математических способностей в детском и юношеском возрасте. Исторический опыт свидетельствует о том, что подростки "порой способны найти исключительно простое и остроумное решение задачи, которое нередко ускользает от умственного взора взрослого человека" [2]. Но исключительно редко можно столкнуться с таким явлением, чтобы задача, составленная подростком, вошла в популярные сборники задач и школьные учебники математики.

Об одном уникальном случае проявления математических способностей и будет рассказано в данной статье.

Журнал "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" (издавался с 1886 по 1918 год), предназначавшийся, по мнению первого редактора журнала Э.К. Шпачинского, "для воспитания в наших учебных заведениях юношества" и "разъяснения различных педагогических вопросов" [2], был популярен среди учителей средних учебных заведений и учащихся, интересующихся, как правило, отделом задач.

Редактор отдела задач Е.Л. Буницкий вел систематическое наблюдение, "как юноша начинает сначала решать предлагаемые задачи, затем начинает сам предлагать задачи, пока не вырастает до уровня других отделов журнала" [2].

В статье, посвященной двадцатипятилетию журнала, редакционная коллегия с гордостью отмечала, что первый импульс к серьезным занятиям математикой на страницах журнала "получили: ученик Екатеринославской гимназии В. Каган (приват-доцент, редактор данного журнала), ученик одесской гимназии Ю. Рабинович (приват-доцент в Казани), М. Зимин из Ельца (приват-доцент в Новочеркасске), И. Александров (Москва )..." [2].

В каждом номере журнала "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" в разделе "Задачи" помещались:

– несколько задач с указанием фамилии приславшего ту или иную задачу и места его жительства;

– решения предлагавшихся ранее задач, с указанием фамилии и места жительства читателя (ученика, преподавателя), приславшего свое решение;

– "Задачи на премию" (авторы лучшего решения получали книги по выбору на сумму 10 рублей).

По этому отделу особенно видно, что "Вестник" был действительно всероссийским журналом. Например, в № 505 тексты и решения задач были присланы читателями из Киева, Казани, Уфы, Козлова, Варшавы, Винницы, Шацка, Одессы, Ярославля, Пинеги, Стерлитамака, Санкт-Петербурга, Самары.

В "Вестнике" за первое полугодие 1910 года (№ 505–516) в разделе "Задачи" наиболее часто мелькает фамилия Л. Богданович (Ярославль). За указанный период этим читателем были присланы правильные решения 31 задачи и были предложены 5 авторских задач для решения подписчикам журнала.

Вызывают восхищение

– необыкновенная работоспособность автора (в каждый номер (в течение года выходит 24–30 номеров) им присылается верное решение 3–5 задач);

– его широкий математический кругозор (при решении задач он свободно пользуется знаниями по тригонометрии, планиметрии, стереометрии, комбинаторике, дифференциальному исчислению...);

– умение составлять задачи и упражнения разнообразного математического содержания. (В период с 1910 по 1913 годы (№ 505–588) им были предложены для решения читателям журнала 32 оригинальные авторские задачи.)

Оказалось, что данный автор (Л. Богданович) был родным братом Максима Богдановича, выдающегося белорусского поэта, почти всю жизнь прожившего на берегах Волги – сначала в Нижнем Новгороде, затем в Ярославле.

Удивительна судьба старших братьев талантливой семьи Богдановичей!

В семье учителя Минского приходского училища и земского деятеля Адама Егоровича Богдановича и Марии Афанасьевны Мякото было три сына: Вадим (1889 г.), Максим (1891 г. – будущий выдающийся белорусский поэт), Лев (родился в городе Гродно в 1893 г.).

Раннее детство братьев было счастливым. Благоприятная атмосфера в доме, прогулки в лес, лето в деревне у бабушки, музыка, чтение книг. Дети росли в семье, в которой все способствовало пробуждению и развитию способностей детей. Прабабушка и бабушка были талантливыми сказительницами, хорошо знавшими бесконечное количество песен, сказок, легенд и народных преданий. Отец, Адам Богданович, был личностью значительной в белорусской культуре: выдающийся этнограф, фольклорист, краевед, общественный деятель, замечательный педагог. Мать, Мария Афанасьевна Мякото (из рода священников, дочь губернского секретаря), обладала большим литературным и музыкальным дарованием.

В октября 1896 года семью постигает большое горе: от скоротечной чахотки, ускоренной рождением четвертого ребенка (дочери Нины), умирает мать. Адама Егоровича переводят по службе в Нижний Новгород, где он вскоре женится на Александре Павловне Волжиной, родной сестре Екатерины Павловны Пешковой, жены Максима Горького.

В Нижнем Новгороде старшие дети (Вадим, Максим, Лев) пошли в гимназию. Именно в этом городе началась литературная деятельность Максима: появился его первый рассказ "Музыка" ("Скрипач"), который был напечатан в белорусской газете "Наша нива" в 1907 году. Но семью вновь постигает несчастье. От чахотки умирает старший сын – Вадим.

В 1908 году Адама Богдановича переводят на службу в Ярославль, где он работает в должности "непременного члена крестьянского земельного банка", затем управляющим этого банка. Дети посещают Ярославскую мужскую гимназию (ныне здание ЯрГУ на Красной площади).

Большая семья постоянно испытывала денежные затруднения. (У Адама Богдановича от третьего брака (он был женат на родной сестре своей первой жены – Александре Афанасьевне Мякото) родились еще пятеро сыновей.) Поэтому Максим давал уроки детям фабриканта Дунаева; Лев, проявлявший незаурядные математические способности, был постоянным участником конкурсов задач, объявляемых журналом "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики", получая за участие вознаграждение, позволявшее частично оплачивать учебу в гимназии.

После окончания гимназии Максим хотел поступать в Петербургский университет, куда он был рекомендован белорусскими издателями журнала "Наша нива" в надежде, что талантливый юноша в дальнейшем займет кафедру белоруссоведения. Но отец не отпустил сына в Петербург, ссылаясь на нездоровый климат (в старших классах гимназии у Максима были обнаружены признаки туберкулезного процесса в легких) и невозможность содержать двух студентов (на будущий год предстояло поступать в университет младшему сыну Льву). Максиму пришлось остаться в Ярославле. В 1911 году он поступил в Демидовский юридический лицей. В 1913 году в Ярославле им был подготовлен сборник стихов "Венок", написанный на белорусском языке (единственный прижизненный сборник).

Окончив Демидовский лицей, Максим в 1916 году уехал работать в Минск. Напряженная деятельность в Минском губернском продовольственном комитете, Белорусском комитете помощи жертвам войны, материальные лишения тяжелого военного времени, бытовая неустроенность привели к обострению болезни, и сослуживцы отправили его в Ялту. Лечение не помогло. Максим Богданович умер в Ялте 25 мая 1917 года в возрасте 26 лет. Отец передал рукописи сына, чуть не сгоревшие в 1918 году во время белогвардейского мятежа в Ярославле, Белорусской академии. В 1927 году в Минске вышло первое двухтомное собрание сочинений Максима Богдановича.

Лев Богданович, младший брат Максима, весьма способный математик, в 1912 году, окончив гимназию "с отличными успехами в науках, в особенности же в математике", поступил на математический факультет Московского университета. Учился отлично, в Ярославль приезжал на каникулы. Когда началась Первая мировая война, Лев оставляет университет, поступает в Александровское военное училище и добровольцем идет в действующую армию. Во время Брусиловского прорыва в 1917 году под Тернополем был ранен в ногу, отправлен сначала во фронтовой госпиталь, затем переведен в офицерский госпиталь в Киев. Трагически погиб в возрасте 25 лет в августе 1918 года. (Со слов денщика, Лев Адамович вместе с другими офицерами был выброшен большевиками в окно.)

Остальные дети в семье также были не лишены таланта: Алексей стал способным художником-пейзажистом (умер в 27 лет от туберкулеза); Павел, человек всесторонне образованный, оригинальный, принципиальный, весьма способный математик, долгие годы работал в Ярославле преподавателем математики в школе, располагавшейся в бывшей мужской гимназии, которую окончили его талантливые братья (умер в 1967 году).

Большая и дружная семья поддерживала тесные связи со своими многочисленными родственниками. Вместе с Максимом учился в Демидовском лицее и его двоюродный брат Петр Гапанович, оставивший воспоминания о жизни братьев Максима и Льва Богдановичей. Двоюродная сестра Нюта (Анна Гапанович) увлекалась математикой и так же, как Лев, посылала решения конкурсных задач в журнал “Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики”. (В журнале за 1910 год 9 раз можно встретить подпись – “Нюта (Нижний Новгород)”. Это единственное женское имя, встречающееся в перечне читателей, приславших решения в раздел “Задачи”.) Письма свидетельствуют, что сестра поддерживала тесные отношения со Львом даже тогда, когда он был студентом университета.

*Левушка! Не будешь ли ты бесконечно любезен, не сделаешь ли одну из задач. У меня получаются ужасныя формулы, так что я в отчаяние прихожу. Из знакомых мне (...) нижегородского математического мира никто сделать не может. Я была бы безконечно благодарна.*

*1. Гипотенуза равна 5 м.; биссектор большаго из острых углов равен $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Найдите катеты.*

*2. В окружность вписан равнобедренный треугольник $ABC$, в котором $AB=AC=a$. Через точку $A$ проведена хорда $AK=в$, которая пе-*

*ресекает BC в точке M. Найдите AM. Ответ* $a^2/в$.

*А. Гапанович 29 окт. 1912 г.*

Сам Адам Егорович Богданович, являясь довольно колоритной личностью для Ярославля той поры (этнограф, библиограф, в 1920–1931 годах – заведующий научной библиотекой Ярославского государственного музея, один из организаторов секции краеведения ЯЕИКО), был и прекрасным отцом, заботящимся о здоровье своих детей, следящим за их духовным развитием. Его письма к детям дышат любовью и уважением.

*Милый Лева! Вот видишь – и простудился. А что я тебе говорил? Впредь будь осторожнее. Сожалею, что университет не доставил тебе такого удовольствия, какого хотелось бы. Что делать. Старайся использовать с наибольшей выгодой то, что он дает: иначе жалко было бы времени, здоровья, средств. Плохо то, что ты, как говоришь, меньше занимаешься, чем дома. Если этому виной особенности твоей квартиры, то ищи другую: время у тебя есть.*

*А. Богданович. 1912 г.*

*Дорогой сынок! Твоя болезнь меня сильно опечалила. Особенно простуда, одевайся потеплее, носи шерстяные носки и фуфайку. Купи себе на завтрак и ужин масло и грудинку. Я тебе прибавлю на этот расход рублей пять. Далеко ли до столовой?*

*Папа. 24 сентября 1913 г.*

*...Лессинга читай: важны его принципы искусства, а примеры хотя он берет из неведомых тебе произведений, но приводит полностью. Лед у нас сломало, но затор образовался. Жаворонок. Тоже хорошая погода.*

*А.Б. 22. 03. 13*

*Сынок! Меня удивляет твой отзыв о переводе Мицкевича. Ты просто не умеешь читать стихов и не понимаешь красоты такого произведения, как Пан Тадеуш. Ну, не беда; все придет в свое время. Ты ведь вообще развивался своеобразно: односторонне, а потому в других отношениях медленно.*

*А. Богд. 15.02.13*

Адам Егорович умер в 1942 году, похоронив 9 из 12 своих детей.

Имя Максима Богдановича принадлежит истории. Его знаменитая "Лявониха" стала уже белорусской народной песней. Гимн

Белоруссии также принадлежит перу поэта.

Имя Льва Богдановича тоже не должно быть забыто, так как задачи, придуманные девятнадцатилетним юношей, входят во многие математические сборники.

Например, в 1913 году в 582 номере журнала "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" на странице 172 под номером 96 была напечатана за подписью "Л. Богданович" следующая задача: доказать справедливость неравенства $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$, где $h_a$, $h_b$, $h_c$, $r$ – суть высоты и радиус вписанного круга некоторого треугольника.

В сборнике В.В. Прасолова [3] в главе 10 под номером 10.12 приводится текст аналогичной задачи: докажите, что $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$.

Интересно сравнить решения данной задачи, предложенные авторами. Решение В.В. Прасолова более изящно. Решение, предложенное Львом Богдановичем,

– позволяет закономерность, увиденную автором, использовать применительно к другим элементам треугольника;

– свидетельствует о прекрасном знании им алгебраического и геометрического материала курса математики, а также о владении гимназистом основными приемами исследовательской и творческой деятельности (умением последовательного, правильного расчлененного логического рассуждения; умением ставить новые вопросы; умением сопоставлять выводы; умением анализировать; умением вычленять и устанавливать зависимости между различными элементами чисел и геометрических фигур; точно, сжато, словесно ясно выражать мысли).

Задачи, предложенные юным автором в 1910–1912 годах читателям журнала "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" по теме "Вневписанная окружность", вошли во многие современные сборники олимпиадных задач. Например:

1. Доказать следующее предложение: если в треугольнике $r_a - r = 2R$, где $r_a, r, R$ суть радиусы кругов вневписанного, вписанного и описанного, то это треугольник прямоугольный.

2. Доказать тождество, где $r_a, r, R$ суть радиусы кругов вневписанного, вписанного и описанного треугольника, а $p$ – полупериметр данного треугольника:

a) $\frac{r_b+r_c}{a} + \frac{r_a+r_c}{b} + \frac{r_a+r_b}{c} = \frac{p}{r}$;

b) $\frac{a}{r_a-r} + \frac{b}{r_b-r} + \frac{c}{r_c-r} = \frac{p}{r}$;

c) $\frac{a^2}{r_b+r_c} + \frac{b^2}{r_a+r_c} + \frac{c^2}{r_a+r_d} = 2(2R-r)$;

d) $\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c} + \frac{c^2-a^2}{r_c-r_a} + \frac{a^2-b^2}{r_a-r_b} = 4(R+r)$;

e) $ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R-r) \ldots$

Вызывают восхищение

– лаконичность, строгость выводов в приводимых автором решениях задач по темам “Ряды”, “Комбинаторика”, “Тригонометрия”;

– важность подмеченных гимназистом, студентом 1–2 курсов университета математических закономерностей;

– редкое умение “сочинять задачи”. (В 1910 году автором было предложено для решения читателям журнала 20 оригинальных задач, в 1911 году 26...)

“До какого совершенства дошли бы его способности, если бы он получил образование и имел случай чаще упражнять их”, – писал о своем сыне Адам Егорович.

Нерукотворным памятником этому талантливому юноше служат его задачи, решаемые нынешним поколением школьников.

## Библиографический список

1. *Астафьев А.В., Астафьева Н.И.* Писатели Ярославского края. Ярославль, 1990. 400 с.
2. Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики. Одесса, 1910–1913.
3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие. 3-е изд., стер. М.: Наука, Физматлит, 1995. 320 с.

## Теория и методика решения уравнений, неравенств и их систем с параметром

*Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титоренко*

Уравнения, неравенства и их системы с параметром традиционно входили в курс математики средней школы (до 60-х годов XX века). Задачами с параметрами, уровень сложности которых был вполне доступен учащимся, обычно заканчивалась изучаемая тема. И это не случайно. Параметр позволяет задавать целые классы структур (выражений, уравнений, неравенств, систем уравнений (неравенств), геометрических фигур и т.д.). Этим обстоятельством нельзя не воспользоваться для обобщения, систематизации и контроля знаний учащихся по математике. Например, предложив ученику решить неравенство $\log_a x < 3$, мы проверим знание им определения логарифмической функции, ее области определения, умение применять свойство монотонности для каждого из видов неравенств: $\log_a x < 3$, где $a > 1$, и $\log_a x < 3$, где $0 < a < 1$.

Включение параметра в задачный материал школьной математики позволяет не только разнообразить его, но и углубить знания учащихся, выявить пробелы, определить уровень овладения практическими навыками, применять как известные, так и новые методы исследования в нестандартной ситуации. Задачи с параметрами развивают логическое мышление школьников, формируют первоначальные навыки исследовательской деятельности, развивают алгебро-геометрический язык, воспитывают самоконтроль, способствуют искоренению формализма в знаниях, поднимают уровень математической культуры. Причем достичь этого можно на несложных, но дидактически грамотно подобранных системах упражнений с параметром. При этом надо постоянно помнить, что параметр, входящий в условие, существенно влияет на логический и технический ход решения, а также на форму ответа.

Знакомство с параметром в средней школе поможет учащимся – будущим студентам при изучении высшей математики. Большое число математических проблем функционального анализа и других областей высшей математики изначально формулируются как задачи с параметром.

Мы считаем, что тема "Задачи с параметрами" должна занять достойное место в курсе математики общеобразовательной школы, а не только в материалах выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

Задания с параметрами, включаемые в ЕГЭ в последние годы, имеют такой уровень сложности, что не под силу даже учителям школ, не говоря об учащихся, многие из которых впервые встречаются с такими упражнениями только на экзамене.

В имеющейся учебно-методической литературе, посвященной задачам с параметрами, нет четкой трактовки основных понятий (параметра, области определения уравнения (неравенства) с параметром, что значит решить уравнение (неравенство) с параметром и др.). И каждый авторский коллектив производит свою классификацию задач с параметром: по особенностям математической деятельности, необходимой для решения задачи [4]; по важнейшим темам школьного курса математики [5]; по некоторому узкому кругу вопросов и т.д. Во многих из этих пособий не соблюдены основные дидактические принципы, поэтому они трудны для восприятия учащимися средних школ, да и не только ими.

Остановимся на понятии "параметр".

Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим некоторые из них.

"Параметр (от греч. $\pi\alpha\rho\alpha\mu\varepsilon\tau\varpi\nu$) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой" [1]. Например, в декартовых координатах уравнение $y = ax^2$, $a \neq 0$, задает множество всех парабол с вершинами в начале координат. И при конкретном значении $a \in \mathbf{R}$ мы получаем одну из парабол этого семейства.

В задачах с одним параметром разделительная функция параметра может проявляться по-разному.

1. В зависимости от значений параметра может изменяться вид уравнений (неравенства). Например, уравнение $(b-2)x^2+2x-3=0$

при $b = 2$ является линейным, а при $b \neq 2$ – квадратным.

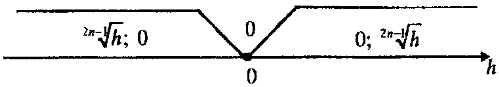
2. Ось параметра, используемая при решении уравнений и неравенств с параметром, делится на промежутки, на которых удается проследить качественные изменения структуры множества решений [7–11].

3. Изменяясь непрерывно, параметр может принимать критическое значение, начиная с которого резко изменяется множество корней уравнений (неравенства).

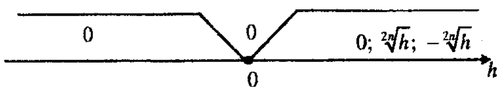
**Пример.** Даны уравнения с параметром $h$:

$$x = (1 - h)x + x^k, \quad \text{где} \quad k \in \mathbf{N}, \quad k \geqslant 2. \tag{1}$$

Все эти уравнения имеют при любом $h$ решение $x = 0$, которое будет единственным при $h = 0$. Нас будут интересовать случаи, когда уравнения (1) имеют решения $x(h) \neq 0$ такие, что $x(h) \to 0$ при $h \to 0$. При $k = 2n$, $n \in \mathbf{N}$ множество ненулевых решений уравнения (1) задается формулой $x = \sqrt[2n-1]{h}$ ($x \to 0$ при $h \to 0$).




При $k = 2n + 1$, $n \in \mathbf{N}$ картина несколько иная. Если $h \leqslant 0$, то ненулевых решений нет. Если $h > 0$, то имеем две ветви решений: $x = \sqrt[2n]{h}$, $x = -\sqrt[2n]{h}$.




Видим, что при нечетном $k$ при изменении $h$ значение $h = 0$ является критическим. При нем происходит скачкообразное изменение количества корней. Общая задача для уравнений типа (1) в бесконечномерном пространстве была подробно изучена М.А. Красносельским и его учениками [3].

Нам представляется более доступным для учащихся следующее определение параметра.

"Неизвестные величины, значения которых задаем мы сами, называются параметрами" [2]. Там же читаем: "Какие неизвестные следует выбрать в качестве параметров, обычно определяется уже самим подходом к исследованию выражения".

Пусть, например, нужно решить уравнение

$$x^4 + x^3 - x^2(1 + 2a) - x(a + 1) + a^2 + a = 0.$$

Легко видеть, что в роли параметра лучше сначала выбрать $x$ и решать квадратное относительно $a$ уравнение. Получим:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x. \end{array}\right.$$

А теперь поменяем $x$ и $a$ ролями. Тогда остается решить два квадратных относительно $x$ уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a + 1, \\ x^2 + x - a = 0. \end{array}\right.$$

Из приведенных выше двух определений следует, что параметр является переменной величиной и имеет при этом двойственную природу: 1) параметр – число; 2) параметр – неизвестное число.

Его первая функция позволяет обращаться с параметром, как с числом. А вторая создает дополнительные трудности в работе с параметром, ограничивая свободу общения его неизвестностью.

Будучи убежденными в необходимости планомерного изучения в курсе математики средней школы задач с параметром, мы попытались разработать теорию и методику решения уравнений, неравенств и их систем с параметром, подобрали системы упражнений, классифицируя их по видам функций в соответствии с программой по математике общеобразовательных школ [7–11]. Часть задач может включаться в содержание уроков и домашних заданий, другие – в факультативные курсы по математике.

Остановимся на методических особенностях наших пособий, которые прошли многолетнюю апробацию в школах и вузах г. Воронежа, Воронежской и ряда других областей. Изданные книги [7–11] рекомендованы УМО по специальности педагогического образования в качестве учебных пособий для обучающихся по специальности 032100 – математика.

В каждом из пособий содержится пункт "Основные понятия". Сформулируем определения основных понятий.

**Определение 1.** Пусть дано равенство с переменными $x$ и $a$: $f(x;a) = 0$. Если ставится задача для каждого действительного значения $a$ решить это уравнение относительно $x$, то уравнение $f(x;a) = 0$ называется уравнением с переменной $x$ и параметром $a$.

**Определение 2.** Под областью определения уравнения $f(x;a) = 0$ с параметром $a$ будем понимать все такие системы значений $x$ и $a$, при которых $f(x;a)$ имеет смысл.

Заметим, что иногда область определения уравнения устанавливается довольно легко, а иногда в явном виде это сделать трудно. Тогда ограничиваемся только системой неравенств, множество решений которой и является областью определения уравнения. Этого бывает, как правило, достаточно для решения уравнения.

**Примеры:**

1. $2x - a = a + 1$. О.О.У.: $\begin{cases} x \in \mathbf{R}, \\ a \in \mathbf{R}. \end{cases}$

2. $\frac{x}{a} + x^2 = \sqrt{x}$. О.О.У.: $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ a \neq 0. \end{cases}$

3. $\frac{x-2c+1}{cx-3} = 0$ О.О.У.: $\begin{cases} cx \neq 3, \\ c \in \mathbf{R}. \end{cases}$

4. $\log_{(a-1)}(x^2 - a^2) = 3$ О.О.У.: $\begin{cases} x^2 - a^2 > 0, \\ a > 1, \\ a \neq 2. \end{cases}$

**Определение 3.** Под решением уравнения $f(x;a) = 0$ с параметром $a$ будем понимать систему значений $x$ и $a$ из области определения уравнения, обращающую его в верное числовое равенство.

**Определение 4.** Решить уравнение $f(x;a) = 0$ с параметром $a$ – это значит для каждого действительного значения $a$ найти все решения данного уравнения или установить, что их нет.

Договоримся все значения параметра а, при которых $f(x;a)$ не имеет смысла, включать в число значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

**Определение 5.** Уравнения $f(x; a) = 0$ и $\varphi(x; a) = 0$ равносильны при фиксированном значении $a = a_0$, если уравнения без параметра $f(x; a_0) = 0$ и $\varphi(x; a_0) = 0$ равносильны.

**Пример.** Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнения $(a-1)x = a-2$ и $(a-1)x = 3a-8$ равносильны.

**Решение.**

1. При $a = 1$ оба уравнения решений не имеют, а потому равносильны.

2. Если $a \neq 1$, то $x = \frac{a-2}{a-1}$ – решение первого уравнения, $x = \frac{3a-8}{a-1}$ – решение второго уравнения.

Найдем значения $a$, при которых эти решения равны.

$$\frac{a-2}{a-1} = \frac{3a-8}{a-1}, \quad a = 3. \quad \text{При} \quad a = 3, \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $a = 1$; $a = 3$.

**Определение 6.** Уравнение $f(x; a) = 0$ является следствием уравнения $\varphi(x; a) = 0$ при некотором значении $a = a_0$, если множество решений уравнения $\varphi(x; a_0) = 0$ содержится среди множества решений уравнения $f(x; a_0) = 0$.

**Пример.** При каких значениях $a$ неравенство $2x > a$ (1) является следствием неравенства $3x + 2 \geqslant 2a$ (2)?

**Решение.** Решаем каждое из неравенств:

(1) $\begin{cases} a \in \mathbf{R}, \\ x > \frac{a}{2}. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} a \in \mathbf{R}, \\ x \geqslant \frac{2a-2}{3}. \end{cases}$

А теперь достаточно решить неравенство

$$\frac{2a-2}{3} > \frac{a}{2}: \quad 4a-4 > 3a, \quad a > 4.$$

Ответ: $a \in (4; +\infty)$.

2. Широко используется координатная прямая параметра, которая служит не только для иллюстрации аналитического решения,

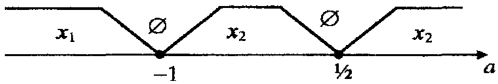
но является инструментом работы. Это помогает снять проблему записи ответа (он легко считывается с оси). Завершение заполнения координатной прямой параметра обычно служит сигналом окончания решения (если задание не содержит дополнительных условий).

При решении тригонометрических уравнений и неравенств применяется и вторая модель множества действительных чисел – единичная окружность.

**Пример.** Решите уравнение $\frac{ax+1}{x+2} = 2a+1$.

**Решение.**

О.О.У.: $\begin{cases} x \neq -2, \\ a \in \mathbf{R}. \end{cases}$




$$ax+1 = 2ax + x + 4a + 2, \quad x(a+1) = -1-4a.$$

1. $a = -1 : x \cdot 0 = 3$. Решений нет.
2. $a \neq -1 : x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}$.

Исследование.

1. $\begin{cases} x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}, \\ -\frac{1+4a}{a+1} \neq -2, \\ a \neq -1, \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}, \\ a \neq \frac{1}{2}, \\ a \neq -1. \end{cases}$ 2. Если $a = \frac{1}{2}$, то решений нет.

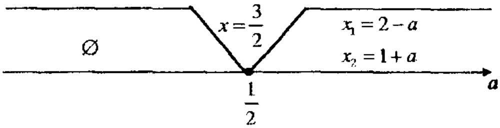
Ответ: Если $a \neq -1$, $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = -\frac{1+4a}{a+1}$. Если $a = -1$ или $a = \frac{1}{2}$, то решений нет.

3. Графическая интерпретация ответа, особенно в начале работы с параметром, помогает лучше увидеть связь переменной и параметра в уравнении (неравенстве), а также глубже понять природу параметра.

**Пример.** Решите уравнение $|3-2x| = 2a-1$.

**Решение.**

О.О.У.: $\begin{cases} x \in \mathbf{R}, \\ a \in \mathbf{R}. \end{cases}$

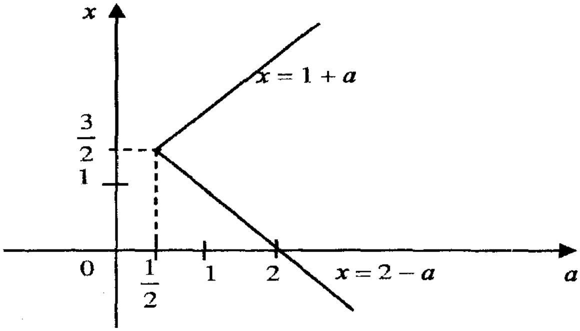



1. $a = \frac{1}{2} : |3 - 2x| = 0, \ x = \frac{3}{2}$.

2. $a > \frac{1}{2} : \left[ \begin{array}{l} 3 - 2x = 2a - 1, \\ 3 - 2x = -2a + 1, \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} x_1 = 2 - a, \\ x_2 = 1 + a. \end{array} \right.$

3. $a < \frac{1}{2}$ : решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат $(aOx)$.




4. Разработанные содержание и методика решения уравнений и неравенств с параметром позволяют знакомить учащихся с параметром, начиная с 7 класса (и даже раньше), а затем продолжать далее по мере изучения основных видов функций и соответствующих им классов уравнений и неравенств (без увеличения количества часов).

5. Все пособия [8–11] содержат необходимый справочный материал, который предшествует изложению заданий с параметром.

Цель такого раздела – систематизация основных сведений по видам функций; построение теории равносильности уравнений и неравенств и ее применение при решении базисных типов уравнений и неравенств без параметра, а затем и с параметром.

6. Почти все разделы, посвященные уравнениям и неравенствам с параметром, начинаются с подготовительных упражнений, которые помогут ученику перейти к более сложным заданиям, являясь

как бы своеобразным "переходным мостиком". А слабым учащимся, возможно, будет достаточно овладеть приемами решения хотя бы только таких уравнений (неравенств).

7. Базисные упражнения пункта решаются авторами с подробным объяснением, а для закрепления читателю предлагается решить серию аналогичных заданий. Такое построение пособий позволяет использовать их и для самостоятельного изучения материала.

8. Сложность задач возрастает постепенно. Завершается каждый раздел более трудными упражнениями, в том числе и олимпиадными. Объем изучаемой информации можно определять в соответствии с уровнем подготовленности обучаемых, т.е. осуществлять дифференцированный подход.

9. Авторы отдают предпочтение аналитическому методу решения уравнений, неравенств и их систем с параметром как более богатому своими дидактическими возможностями. Но активно привлекается и графический метод решения в системах координат $(xOy)$, $(aOx)$, $(xOa)$ там, где он более эффективен.

10. Значительная часть упражнений решается несколькими способами, что позволяет обобщить и систематизировать более обширный теоретический и практический материал.

## Библиографический список

1. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия. 1988. С. 451.
2. *Фрид Э. и др.* Малая математическая энциклопедия. Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1976. С. 84.
3. *Красносельский М.А., Забрайко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1979. С. 512.
4. *Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. Киев: РИА "Текст", МП "ОКО", 1992.
5. *Амелькин А.А., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. Минск: Асар, 1996.

6. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочные материалы. М.: Просвещение, 1988.

7. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Уравнения и неравенства с параметром первой степени и к ним сводимые: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 80 с.

8. *Беляева Э.С., Потапов А.С., Титоренко С.А.* Уравнения и неравенства второй степени с параметром и к ним сводимые: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 191 с.

9. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 179 с.

10. *Беляева Э.С., Потапов А.С., Титоренко С.А.* Иррациональные уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. 2-е издан., перераб., испр. и доп. Воронеж: ВГПУ, 2004. 239 с.

11. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2002. 256 с.

# Глава 4

## История математики и математического образования

### Загадка древнерусской системы чисел

*Р.А. Симонов*

К наиболее раннему проявлению научного творчества в области древнерусской математической культуры относится формирование оригинальной системы наименований и обозначений больших числовых разрядов. А.Н. Паршин недавно обратил внимание на "загадочные обозначения в древнерусских математических текстах для больших и очень больших чисел – легионов, леодров и т.д., которые своей уникальной системой круговых штрихов разной фактуры напоминают круги ангельской иерархии. Можно поставить вопрос: не было ли в Древней Руси явно выраженного представления о такой связи разрядов чисел и ангельских чинов?" В примечании: "Я спрашивал об этом Р.А. Симонова, и он сказал, что подобные взгляды ему неизвестны, но, по его мнению, они вполне возможны. См. его работы "Новые материалы по истории математики Древней Руси" Историко-математические исследования. 2000, вып. 5" [1. С. 147, 152].

Доклад А.Н. Паршина на семинаре "Неклассическая наука" в Институте истории естествознания и техники РАН, сделанный 20 декабря 2003 г., легший в основу процитированной статьи [1], а также личное общение с докладчиком убедили меня в необходимости обобщить данные по истории древнерусских чисел, увязав ее с выводами А.Н. Паршина.

Интересен факт совпадения количества древнерусских разрядов чисел (единицы, десятки, сотни, тысячи, тьмы (варианты: тъмы, тмы) – 10 тыс., легионы (вариант: легеоны) – 100 тыс., леод(о)ры (варианты: лиодоры, легиодры, легеорды) – 1 млн, вороны (вариант: враны) – 10 млн, колоды – 100 млн) с количеством ангельских чинов – по девяти. Менее очевидной является особенность древнерусской системы, состоящая в практическом отсутствии ее понятийных вариантов, несмотря на долговременный процесс формирования системы на протяжении XI–XVII вв. Получается, что древнерусская система чисел не была придумана людьми по произволу, а как бы "раскрывалась" ими в процессе ее "исчерпывания", вплоть до последнего (девятого) стомиллионного разряда – "колоды".

Древнерусская традиция "буквенной" записи чисел восходит к соответствующей византийской, основанной на употреблении в цифровом значении 24 букв греческого алфавита, дополненных 3 специальными цифровыми знаками – "эписемами". Этими 27-ю "буквенными цифрами" записывались числа до 999 включительно. Для обозначения тысяч использовался специальный значок в виде "хвостика", прикреплявшегося к "буквенным цифрам" слева. Для выражения десятков тысяч в византийской традиции использовался термин "мириада" (10 тыс.); в сокращенном варианте применялась буква М, которая ставилась сбоку или сверху "буквенной цифры".

Под воздействием славянского письма кириллицы отдельные "буквенные цифры" (особенно "эписемы") претерпевали графические изменения (имеется случай обратного влияния) [2]. Система обозначений больших чисел, начиная с десятка тысяч в славяно-русской традиции была оригинальной, отличной от византийской. Так, знак, обозначающий 10 тыс., имел форму окружности, обведенной вокруг "буквенной цифры". Впервые этот знак встречается на деревянной основе Новгородской псалтыри 1-й четверти XI в. [3. С. 31]. Памятник найден в 2000 г. в виде сложного типа церы, состоявшей из трех "сброшюрованных" дощечек для писания по воску [4]. Судя по неоднократно повторенным в Новгородской псалтыри числовым рядам, самый "длинный" из них является наиболее ран-ним древнерусским "цифровым алфавитом"[1], обобщающим данные о "буквенных цифрах" (рис. 1).

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Единицы | а | в | г | д | є | ѕ | з | и | ѳ |
| Десятки | і | к | л | м | н | ѯ | о | п | ч |
| Сотни | р | с | т | ѵ | ф | х | ѱ | ѿ | ц |
| Тысячи | ҂а | ҂в | ҂г | ҂д | ҂є | ҂ѕ | ҂з | ҂и | ҂ѳ |
| Дес. тыс. | а | | | | | | | | |

Рис. 1. "Цифровой алфавит" Новгородской псалтыри 1-й четверти XI века (реконструкция)

До этого был известен "цифровой алфавит" с предельными десятками тысяч в окружностях на берестяной грамоте № 342 начала XIV века (рис. 2) [7. С. 29–31].

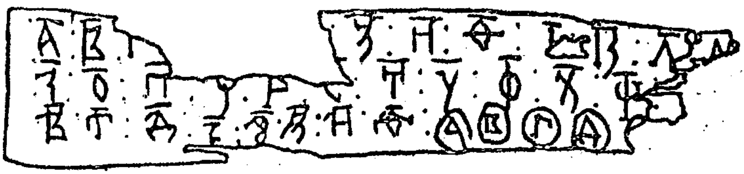


Рис. 2. Берестяная грамота № 342 начала XIV века

[1]Понятие "цифровой алфавит" раскрыто, напимер, в работах [5. С. 267–273; 6. С. 137].

Расширение номенклатуры славяно-русских обозначений больших чисел, возможно, связано с творчеством средневекового ученого (математика, компутиста, философа) и религиозного деятеля Кирика Новгородца. В его “Учении им же ведати человеку числа всех лет” (1136 г.) десятитысячный разряд имеет форму сплошной окружности, а стотысячный разряд представлен окружностью из точек вокруг “буквенных цифр” [8. С. 174–176, 188–190] (рис. 3).

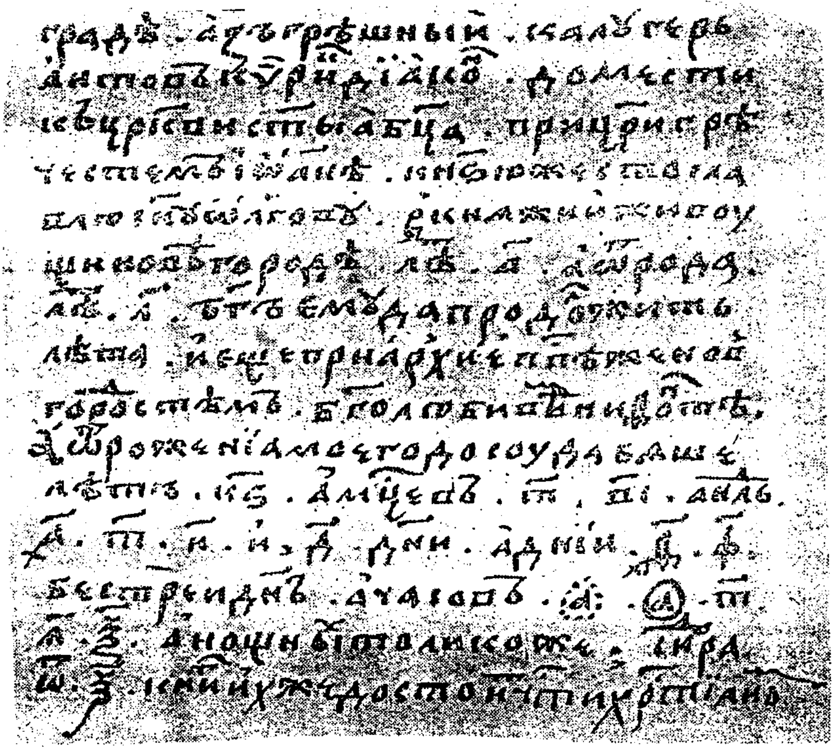


Рис. 3. Фрагмент “Учения” Кирика Новгородца (1136 г.) по Погодинскому списку XVI века

Кирик мог самостоятельно создать обозначение стотысячного разряда или заимствовать его из какого-нибудь "цифрового алфавита". От XII в. они не сохранились; подобный содержится на пергаменной "обложке" рукописного Апостола-апракоса кон. XIII–нач. XIV вв., хранящегося в монастыре св. Екатерины на Синае (Sin. Slav. 39) (рис. 4) [9].

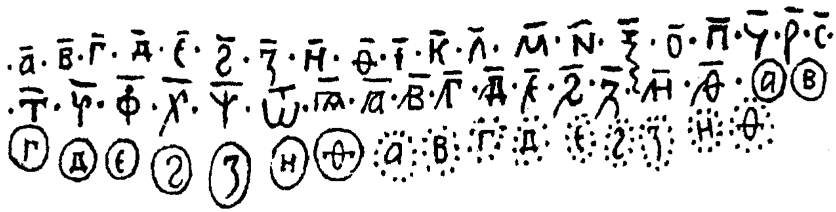


Рис. 4. Воссозданный "цифровой алфавит" Апостола-апракоса конца XIII–начала XIV в. (монастырь св. Екатерины на Синае)

Обозначения точечными окружностями стотысячного разряда (как предельного) также встречаются в "цифровых алфавитах" Сборника богослужебного 1405 г. (ИРЛИ, собрание В.И. Перетца, № 21, л. 254) и пергаменного Ирмология XV в. (РНБ, Соф. 4817, л. 1об.) (рис. 5) [5. С. 269–270].

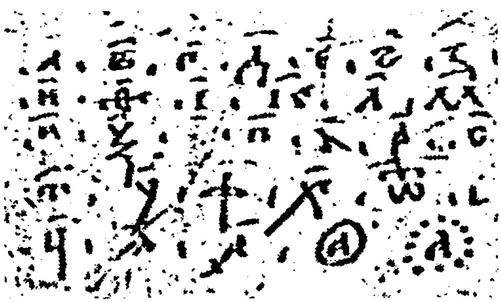


Рис. 5. "Цифровой алфавит" Ирмология XV века, хранящегося в Российской национальной библиотеке

Впервые (насколько так позволяют считать обнаруженные древнерусские тексты) обозначение миллионного разряда в виде окружности из расходящихся лучей встречается в "цифровом алфавите" кон. XV–нач. XVI вв. Псалтыри с восследованием (ГБЛ, ф. 354, № 14, л. 659об.) (рис. 6) [10; 11. С. 253–258].

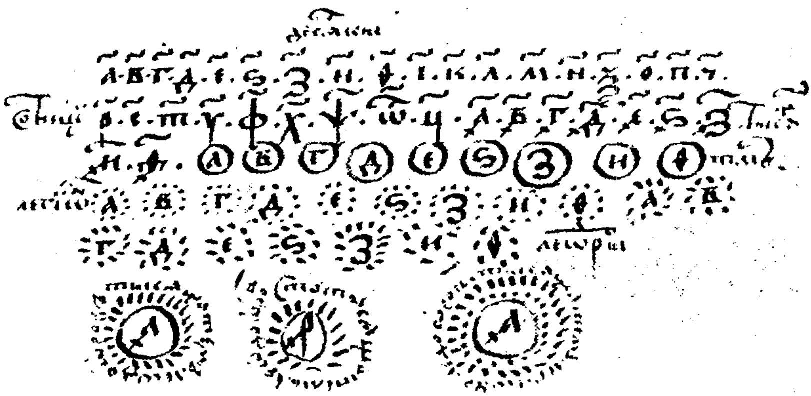


Рис. 6. "Цифровой алфавит" Псалтыри с восследованием конца XV–начала XVI в. (Российская государственная библиотека, Волог. 14)

Аналогичные данные содержит Сборник богослужебных текстов конца XV века (датировка Н.Н. Розова), хранящийся в С.-Петербурге (РНБ, Соф. 169, л. 1об.) (рис. 7).

Названием следующего разряда – 10 млн – является "ворон", который обозначался с помощью окружности из крестиков или путем проставления кириллической буквы "како" слева и справа от "буквенной цифры". В "Пискаревском летописце" (вскоре после 1615 г.) встречается "цифровой алфавит" с предельным "леодром" (1 млн), завершающийся словами: "А еже книжное число, то все, а еже не книжное, ворон рекше" [12. С. 31]. Эту фразу можно понять так: для выражения чисел, которые встречаются в письменной практике, достаточно "леодра", а неопределенно большие количества называют "вороном".

Рис. 7. "Цифровой алфавит" Сборника богослужебных текстов конца XV века (?) (РНБ, Соф. 169)

Однако после того, как название большого количества "ворон" приобрело значение десятичного разряда, оно использовалось и в записи чисел. Так, в рукописном "восьмитысячнике" (список последней четверти XVII в.), содержащем календарно-арифметические расчеты на конец XVI в., число 36264000 выражено в форме "3 ворона и 6 легеордов (вариант или искажение слова "леод(о)ров". – Р.С.) и 20 легионов и 64000" (по данным Н.К. Гаврюшина [13. С. 211]).

Наименованием следующего числового разряда – 100 млн - является "колода". В рукописи "Простословий", датируемой И.В. Ягичем 1589–1600 гг. – с учетом лет правления первого Русского патриарха [14. С. 624], – воспроизводится текст о наименованиях и обозначениях больших числовых разрядов до "ворона" (10 млн). Далее указывается "колода" как равная 10 "воронам", то есть 100 млн. Однако обозначение "колоды" (100 млн) здесь отсутствует. Оно встречается в "Азбуке" 1643 г. (РГБ, ф. 256, № 326, в конце свитка, каковую форму имеет памятник). "Колода" (100 млн) здесь передавалась с помощью прямоугольных скобок, проставлявшихся сверху и снизу "буквенных цифр".

Суммируя, можно заключить, что древнерусская система больших чисел формировалась постепенно, на протяжении примерно шести веков: с 1-й четверти XI в. по первые десятилетия XVII в. (рис. 8).

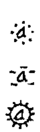
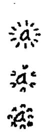
| Разряды | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Наименования | Тьма | Легион Легеон | Легиодр Леодр Леодор Лиодор | Ворон Вран | Колода |
| Обозначения |  |  |  |  как |  |
| Вероятное время появления обозначений | Не позже XI в. | XII (?)— XIV вв. | Конец XIV— начало XV в. | Середина или 2-я половина XVI в. | 1-я половина XVII в. (не позже 1643 г.) |

Рис. 8. Сводка древнерусских обозначений больших чисел

Одним из нерешенных вопросов является этимология наименований больших чисел. Краткий обзор сведений по этому вопросу таков:

"Гьма" – десять тысяч, вероятно, тюркского [15] или монгольского[1] происхождения.

"Легион (легеон)" – сто тысяч, возможно, из латинского legio через греческий legeon в смысле "отряд большой численности; полк, легион" [16. С. 188].

"Леод(о)р" – миллион; этимология неясна. Вероятно, искусственная словесная конструкция, о чем как будто бы говорят единичные варианты написания: "легеорд", "легиодр" [17. С. 541].

"Ворон" – 10 миллионов. Связь с птицей вороном, возможно, обусловлена представлением об очень отделенном месте его полетов, отраженном в поговорке: "Куда ворон костей не занесет" [18. С. 212].

"Колода" – 100 миллионов. На Руси этим словом назывался "обрубок дерева, чурбан" [19. С. 335]. Связь с таким толкованием подтверждается рисунками "колоды", завершающими некоторые "цифровые алфавиты". На основном изображении "колода" имеет вид бруска с надписью с одной стороны "д(ъ)ска", с другой – "исподъ", на дополнительном – записи чисел "буквенными цифрами". "Дсками" на Руси называли деревянные долговые бирки, выдаваемые в качестве ссудных документов на небольшие суммы [20. С. 81–82]. Значит, "колода" как наименование числового разряда (100 млн) имеет связь со счетно-финансовой деятельностью. Это также подтверждается специальной математической статьей "О колоде" о каком-то средстве или способе счета, как правило, идущей после "цифрового алфавита" в некоторых списках XVI- XVIII вв. Однако "сжатость" текста не позволяет дать ему окончательную убедительную интерпретацию. Не исключено, что в нем отражены реминисценции счета на абаке [5. С. 278–282].

---

[1]Так считает А.С. Львов, полагая при этом, что такое замиствование не было непосредственным, а вошло "в славянские языки через какой-то язык – посредник" (Львов А.С. Очерки по лексике памятников старославянской письменности. М., 1966. С.248).

Итак, в древнерусской математике сложилась стройная система наименований и обозначений больших чисел, которая появилась не позже 1-й четв. XI в., а окончательно сформировалась до 1643 г. Она состояла из следующих терминов: "тьма" – 10 тыс., "легион (легеон)" – 100 тыс., "леод(о)р" – 1 млн, "ворон" – 10 млн, "колода"– 100 млн. То, что эта система возникла не единовременно, а пополнялась все более крупными разрядами постепенно, свидетельствуют источники: "цифровые алфавиты", числовые записи и др. Так, ранее XVI в. в них никогда не встречаются наименования и обозначения десятимиллионного ("ворон") и стомиллионного ("колода") разрядов. Об историческом развитии этой системы как будто бы говорят и особенности языка. Термин "тьма" встречается в старославянских письменных памятниках в значении "много", иногда "10000", а "легион" - очень большого числа [21. С. 13–14]) и, очевидно, оттуда перешли в культуру Руси. Кроме того, достаточно ясным кажется иноземное происхождение этих слов по сравнению с русскими "ворон" (10 млн), "колода" (100 млн). Термин "леод(о)р" (1 млн), по-видимому, искусственно построен, возможно, под влиянием иноземного "легион (легеон)" (100 тыс.); представляет собой переходное звено между иноземными "тьма" (10 тыс.), "легион (легеон)" (100 тыс.) и русскими "ворон" (10 млн), "колода" (100 млн).

Если бы наименования разрядов создавались единовременно, то не было бы такой языковой последовательности: сперва появляются иноземные названия, затем – русские, свидетельствующей о развитии терминологической системы. Вместе с тем обнаруживается любопытная особенность, состоящая почти в полном отсутствии разнообразия, которое, казалось бы, должно возникнуть при неуправляемости процесса образования рассматриваемой разрядной терминосистемы. Отсутствуют данные о том, что новые наименования разрядов всегда разрабатывались в каком-нибудь одном центре, обязательно регламентировались церковью и централизованно распространялись в неизменном виде по всем храмам, монастырям и скрипториям. Да и сделать это было невозможно при условии необъятной страны, развивавшейся в неблагоприятных исторических условиях (территориальной раздробленности, татаро-монгольского ига и др.). При стихийном расширении номенклатуры разрядных наименований неизбежно было бы ожидать значительного разнообразия: почти каждый скрипторий мог формировать свою систему разрядных терминов. Но этого фактически не произошло, чему должно быть объяснение, каковое отсутствовало.

Отклонений от магистрального пути формирования древнерусской терминосистемы больших чисел почти нет. Выше говорилось о вариативности названия миллионного разряда: леод(о)р, легеорд, легиодр. Частотность употребления терминов различна. Если первый имел преимущественное использование, то два других встречаются по одному разу. Они, очевидно, являются вариантами одного общеупотребительного слова "леод(о)р".

Существует, кажется, единственный случай "раздвоения" рассматриваемой системы больших чисел. Он представлен в рукописном "Сборнике" 4-й четв. XVIII в. (РГБ, ф. 218, № 695, л. 73) (рис. 9) [5. С. 301].

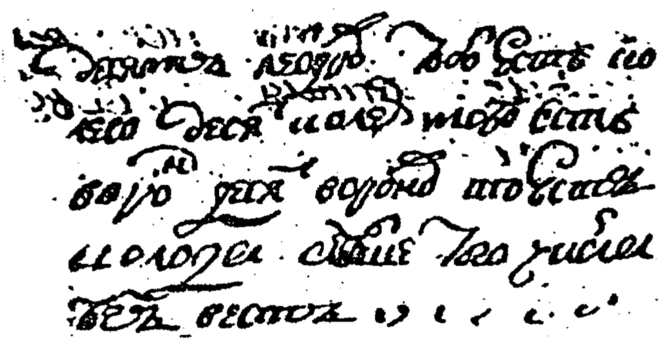


Рис. 9. Фрагмент "цифрового алфавита" с разрядом "колесо" (10 млн). Сборник по списку XVIII века из собрания РГБ, фонд 218, № 695

Термин "колесо" дан в значении 10 млн; последовательность наименований больших чисел такова: "тма" (10 тыс.), "легион" (100 тыс.), "леодр" (1 млн), "колесо" (10 млн), "ворон" (100 млн), "колода"

(1 млд). "Колесо" (10 млн) здесь не является ошибочным включением, о чем свидетельствует математический контекст: "...десять леодров – колесо, десять колес – ворон...". Схема появления отмеченного "разветвления" системы больших чисел такова:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 тыс. | – | "тьма" | |
| 100 тыс. | – | "легион" | |
| Миллион | – | "леод(о)р" | |
| 10 млн | – | "колесо" | "ворон" |
| 100 млн | – | "ворон" | "колода" |
| Миллиард | – | "колода" | |

Терминосистема с "колесом" (10 млн) не оказалась жизнеспособной и пока известна только по одному памятнику. Соответствующая информация была дана более 35 лет назад [22. С. 214], но никаких дополнительных данных о "колесе" (10 млн) до сих пор не обнаружилось. Можно предположить, что после того, как терминосистема больших чисел окончательно сложилась (до 1643 г.), была сделана попытка ее модернизации путем включения "колеса" (10 млн) между "леод(о)ром" (1 млн) и "вороном", который автоматически стал 100-миллионным разрядом, а "колода" – миллиардным.

Возникает вопрос, почему "колесо" поставили не в конец уже сложившегося ряда терминов, то есть после "колоды", а в середину – именно после "леод(о)ра"? Ответ как будто бы содержит "цифровой алфавит" рукописи кон. XV–нач. XVI вв. Волог. 14 (рис. 6). Здесь система больших чисел доводится до "леод(о)ров" (1 млн) с добавлением комбинированных круговых обозначений очень больших чисел: 10 в 13, 10 в 15 и 10 в 18 степенях. Эти обозначения содержат несколько круговых колец из сплошных, точечных и лучевых окружностей и расположенных по внешнему кругу числовых названий: "тысяща темъ леодооровъ" (10 в 13 степени), "сто тысящь темь леодооровъ" (10 в 15 степени) и "тысяща темь легионо(въ) леодооровъ" (10 в 18 степени) [11. С. 253–256; 23].

Такая конструкция сложных цифровых знаков, отдаленно напоминающая колесо, возможно, послужила основанием для введения в готовую терминосистему дополнительного разряда под названием "колесо" (10 млн). В таком случае далекое от счета слово "колесо" приобрело математический смысл большой числовой величины. Предложенная интерпретация включения "колеса" (10 млн) в терминосистему больших числовых разрядов не претендует на окончательное решение вопроса. При этом следует иметь в виду, что "колесо" было синонимично слову "круг". Например, в "Арифметике" Л.Ф. Магницкого (1703 г.) вместо термина "круг", который встречается всего 2–3 раза в астрономической части книги, употребляется слово "колесо" [24. С. 46].

Возвращаясь к поставленному А.Н. Паршиным вопросу о соответствии древнерусских обозначений больших чисел ангельским чинам, следует отметить, что и до него в историографии усматривалась связь этих знаков с религиозными реалиями. Например, А.И. Филиппов писал в 1922 году: "Начертания символов высших разрядов также указывают на их мистический характер. Так, символы тьмы, легеона и леодра образуют ореолы, внутри которых помещается цифра разряда. Символ напоминает "шестикрылого серафима" [25. С. 15]. В 1927 г. на ту же тему высказывался И.И. Чистяков: "Оказывается, что они (обозначения больших чисел. – Р.С.) – религиозного и мистического происхождения. Об этом говорит уже самый вид соответствующих символов; например, знак леодра – буква в лучах – напоминает солнечное сияние; знак наибольшего числа 10 в 49 степени – буквы Ы с тремя чертами внизу, с правой и левой стороны и крестом наверху – знак шестикрылого серафима" [26. С. 37].

А.Н. Паршин обсуждает не условное сходство[1](о "натянутости" утверждения о тождестве знака "тма тем" "шестикрылому серафиму" говорилось ранее, см.: [27. С. 88]), а возможную онтологическую связь разрядов больших чисел и ангельских чинов. В развитие такого подхода можно высказать следующее. Как известно, чинов ангельской иерархии девять. Разрядов древнерусской систе-

---

[1]При этом он ссылается на православную традицию, где "отношение к таким прямолинейным связям всегда было негативным" [1. С. 145].

мы чисел, как отмечалось выше, также девять. Такое совпадение может быть случайным или не случайным[1]. Однако вспомним, что попытка введения "колеса" (10 млн), доведшая количество числовых разрядов до десяти, не увенчалась успехом. Если совпадение количества (девять) древнерусских числовых разрядов и ангельских чинов было как-то онтологически обусловлено, то и форма числовых обозначений ряда больших чисел в виде окружностей и ореолов ("тьма", "легион", "леод(о)р", "ворон"), возможно, была следствием этой обусловленности.

## Библиографический список

1. *Паршин А.Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вестник русского христианского движения. 2004. № 188. С. 117–153.
2. *Симонов Р.А.* О греко-византийской основе "буквенных цифр" кириллицы // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. 2002. № 4 (10). С. 48–56; 2003. № 1 (11). С. 24–29.
3. *Зализняк А.А.* Древнейшая кириллическая азбука // Вопросы языкознания. 2003. № 2. С. 3–31.
4. *Янин В.Л.* Открытие древнейшей славянской книги в Новгороде // Румянцевские чтения. М., 2001. С. 23–29.
5. *Симонов Р.А.* Математические тексты и материалы в славяно-русских рукописях XI–XV вв. // Методические рекомендации по описанию славяно-русских рукописей для Сводного каталога рукописей, хранящихся в СССР. М., 1976. Вып. 2. Ч. 2. С. 257–304.
6. Антология педагогической мысли Древней Руси и Русского государства XIV–XVII вв. / Сост. С.Д. Бабишин, Б.Н. Митюров. М., 1985.

[1] Например, в индийском учении "вайшешика", разрабатывавшем и философию числа, классов субстанций также имелось девять: "земля, вода, огонь, ветер, акаша (эфир, пространство), местоположение, время, атман (душа) и манас (координатор органов чувств)" [28. С. 313].

7. *Арциховский А.В.* Новгородские грамоты на бересте (Из раскопок 1958–1961 гг.). М., 1963.
8. Кирик Новгородец. Учение им же ведати человеку числа всех лет // Историко-математические исследования (далее – ИМИ). М., 1953. Вып. 6. С. 174–191.
9. *Симонов Р.А.* Математический документ конца XIII–начала XIV вв. в древнерусской пергаменной рукописи // Памятники науки и техники. 1982–1983. М., 1984. С. 110–114.
10. *Симонов Р.А.* О новом типе обзначений больших чисел // Румянцевские чтения. М., 1996. С. 130–132.
11. *Симонов Р.А.* Новые материалы по истории математики Древней Руси // ИМИ. Вторая серия. М., 2000. Вып. 5 (40). С. 244–271.
12. Полное собрание русских летописей. М., 1978. Том 34.
13. *Гаврюшин Н.К.* "Поновление стихий" в древнерусской книжности // Отечественная общественная мысль эпохи средневековья. Киев, 1988.
14. *Ягич И.В.* Рассуждения южнославянской и русской старины о церковнославянском языке. СПб., 1896.
15. *Фасмер М.* Этимологический словарь русского языка: В 4-х т. СПб., 1996. Т. 4. С. 134.
16. Словарь русского языка XI–XVII вв. М., 1981. Вып. 8.
17. *Симонов Р.А.* Реминисценции "Учения" Кирика в древнерусской книжности // Герменевтика древнерусской литературы. М., 2000. Сб. 10. С. 529–550.
18. Словарь русского языка: В 4-х тт. М., 1981. Т. 1.
19. *Преображенский А.Г.* Этимологический словарь русского языка: В 2-х тт. М., 1959. Т. 1.
20. *Янин В.Л.* Надписи на деревянных "счетных" бирках // Новгородские грамоты на бересте (Из раскопок 1977-1983 гг.). М., 1986. С. 81–86.

21. *Супрун А.Е.* Старославянские числительные. Фрунзе, 1961.

22. *Симонов Р.А.* Русская средневековая система больших чисел // История и методология естественных наук. Вып. 9: Математика, механика. М., 1970. С. 212–217.

23. *Симонов Р.А.* О новом типе обозначений больших чисел // Румянцевские чтения. М., 1996. С. 130–132.

24. *Кутина Л.Л.* Формирование языка русской науки. М.; Л., 1964.

25. *Филиппов А.* Великий счет (очерк истории математики). Одесса, 1922.

26. *Чистяков И.И.* Числовые суеверия. М.; Л., 1927.

27. *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М., 1977.

28. *Лысенко В.Г.* Философия числа в вайшешике (по материалам "Раздела числа" из "Собрания характеристик категорий Праштастанады") // Историко-философский ежегодник-99. М., 2001. С. 312–344.

## Арифметическая техника и развитие математики [1]

*Г.А. Зверкина*

Несмотря на то, что математика на протяжении всей своей истории использует числа (или их обобщения) и операции над ними, мы почти никогда не задумываемся о том, как именно записаны эти числа и каким образом производится над ними та или иная операция. Однако системы записи чисел и техника арифметических действий оказали огромное влияние на развитие математики на первом этапе ее развития.

По естественной причине (количество пальцев) устные системы нумерации практически всех известных древних цивилизаций основывались на числах 5, 10 и 20. Однако не всегда создавалась соответствующая письменная позиционная система записи чисел.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-06-80226а) и CNRS (проект "Les instruments du calcul savant").

Первые обозначения чисел – черточки и точки – с появлением письменности заменялись новыми символами – пиктограммами. Иногда эти пиктограммы содержали некую информацию о составе числа, что существенно усложняло их вид. В иероглифической письменности они превратились в иероглифы, а в алфавитной в ряде случаев заменялись буквами или их комбинациями. Чаще всего древние нумерации содержали специальные знаки для 1, 2,..., 9, 10, 20,..., 90, 100, 200,.. и т.д. [7]. Но иногда письменная нумерация соответствовала устному названию числа; в Китае это позднее привело к формированию позиционной десятичной нумерации. Позиционная система с основанием 20 и знаками для 0, 1, 5 сформировалась в математике майя, десятичной системой пользовались древние инки, т.е. в Южной Америке, Китае, а позднее в Индии были позиционные нумерации с основанием 10 и 20 (Обозначим эти нумерации “А”).

В древней Месопотамии возникшая было десятичная почти позиционная (без знака 0) система нумерации была скомбинирована с шестеричной системой, происхождение которой неизвестно[1]. Эта нумерация не была полноценной позиционной (такой, какой она позднее стала в работах греческих астрономов и арабских ученых) и была мало пригодна для сложных арифметических расчетов.

О египетской иероглифической нумерации и греческой алфавитной известно достаточно много [3]. В древней Индии использовались нумерации, схожие по структуре с греческой алфавитной (“Шульба-Сутра”, нумерация “брахми” – [6])[2]. (Эту группу нумераций обозначим “Б”; к ней относится и древнерусская математика). В нумерациях группы “Б” имелись трудности с записью дробных чисел, в то время как в позиционной системе были достаточно

[1] Возможно, она произошла из неких национальных традиций, подобно тому, как некоторые племена Папуа-Новой Гвинеи обзавелись развитой одиннадцатеричной (устной) системой счета.

[2] Надо отметить, что все нумерации в своем развитии тяготели к позиционности: в Египте времен Новой Империи нумерация в демотических текстах схожа с китайской, а в поздней Византии числа иногда записываются в позиционном виде.

быстро введены десятичные дроби [1, 2][1]. Поэтому в вычислениях естественно возникали различные алгоритмы.

Так, в Месопотамии был изобретен так называемый метод Герона для вычисления приближенных значений квадратных корней (см, например, [3]). Использовавшие этот метод греки были вынуждены не только умножать и складывать[2] большие числа, но и упрощать затем полученную дробь с помощью антифайрезиса (алгоритма Евклида), эквивалентного представлению числа цепной дробью: эта цепная дробь "округлялась", а затем полученное выражение представлялось в виде суммы аликвотных дробей (т.е. дробей с числителем 1). А в индокитайской математике при вычислении корня использовали более удобную схему Горнера, фактически подбирая десятичные знаки искомого числа по достаточно простому алгоритму, основанному на формуле квадрата суммы.

Итак, уже этот простой пример показывает, что *использовавшаяся система нумерации влияла на численные методы и на их удобство.*

Далее, почему греки (а перед ними египтяне и вавилоняне) ориентировались на геометрические построения в математике, почему они изобрели то, что теперь называется геометрической алгеброй древних и почему они пытались свести алгебраическую задачу к геометрическому построению? Почему они пытались квадрировать (т.е. сопоставить с равным по площади квадратом) различные фигуры? И почему в качестве инструментов геометрических построений они выбрали только циркуль и линейку? Почему при решении алгебраических задач третьего порядка они строили специальными инструментами отличные от окружности и прямой кривые, а не вычисляли решения с необходимой точностью, как это делали на Востоке? Ответ на этот вопрос очевиден: *греки геометрическими построениями заменяли слишком сложные в их нумерации*

[1]Поэтому, в частности, в индокитайской математике не было представления об иррациональности.

[2]При этом в таблице умножения и сложения были отдельные формулы для сложения и умножения единиц, десятков, сотен и т.д. – таблица умножения была в 10 раз больше нашей таблицы умножения.

*вычисления.* Именно это привело к столь высокому развитию геометрических методов, но это и ограничивало в некоторой степени теоретические исследования греческих математиков. Все исследуемые ими геометрические методы решения задач были переложением на геометрический язык алгебраических методов, при этом часто игнорировалось более простое чисто геометрическое решение задачи[1].

С другой стороны, математика с нумерациями группы "А" для решения геометрических задач активно применяла алгебру. Так, китайское доказательство теоремы Пифагора из сочинения "Чжоу би суань цзин" ("Канон расчета чжоуского гномона") построено на алгебраических преобразованиях и арифметической технике определения одинаковых площадей на разграфленном чертеже. Главную роль здесь играет не наглядность чертежа, а скрупулезное выискивание одинаковых геометрических фигур и их подсчет. Это, скорее, не доказательство теоремы Пифагора, а доказательство прямоугольности треугольника со сторонами 3, 4, 5, основанное на факте: $3^2+4^2=5^2$. Позднее это рассуждение трансформировалось в широко известные в индокитайской математике доказательства теоремы Пифагора уже в общем виде. В обоих случаях доказательство основано на биноме Ньютона. В рассуждениях роль аксиом (очевидных фактов) играли именно алгебраические правила.

Математическое образование в Индии и в Китае включало в себя заучивание наизусть правил арифметических действий с различным образом представленными величинами. Это были правила раскрытия скобок, сокращенного умножения, операции с величинами, имеющими разные знаки. Они заучивались наизусть, часто в виде стихов, и на них были основаны геометрические доказательства. Алгебраические формулы в юго-восточной математике (Индия, Китай, Япония, Корея) не доказывались – происхождение их следует искать в вычислительной практике, поскольку позиционная система позволяла производить достаточно сложные вычисле-

[1]В задаче о "приложении площадей" $S=x(a-x)$ вместо простого геометрического решения Евклид предлагает выполнить геометрически всю цепочку алгебраических операций с вычислением дискриминанта.

ния без чрезмерных усилий.

Не так обстояло дело в греческой математике. Значительная часть "Начал" Евклида посвящена именно доказательству алгебраических формул. Алгебраические правила в Греции требовали доказательства. Причиной этого была сложность греческой нумерации для выполнения многочисленных вычислений, требовавшихся на практике. Чертеж в греческой математике представлял собой аналог современной формулы для решения задачи. Это был алгоритм, следуя которому и проявляя достаточную аккуратность в геометрических построениях, можно было построить сколь угодно точное решение задачи.

То есть *геометрическая алгебра есть не самостоятельная дисциплина, происходящая из геометрических рассуждений, а средство решения алгебраических задач в терминах отрезков с помощью геометрических методов в ситуации, когда неудобная система нумерации и отсутствие эффективной техники счета не позволяют достаточно быстро находить решения алгебраических задач с достаточной степенью точности.*

С другой стороны, отсутствие удобной позиционной нумерации для записи дробных чисел привело греков к идее выражать все отношения величин как отношения целых чисел. Отсюда происходит открытие ими несоизмеримости. Этого не было и, видимо, не могло случиться в позиционной математике (по крайней мере, на первом этапе ее развития). В арифметической технике позиционной нумерации любое число могло быть вычислено с любой степенью точности. И лишь по прошествии некоторого времени математики заметили бы, что в одном случае решение представляется периодической десятичной дробью, а в другом – непериодической, т.е. была бы открыта иррациональность.

Итак, мы приходим к выводу, что именно *удобство или неудобство системы нумерации для арифметики, или, что то же самое, эффективность или неэффективность используемой техники вычислений определяет направление развития математики в начальный период ее становления.* Этот тезис подтверждает и математика древней Индии [6], и архитектурная математика древней Руси [4, 5].

Также и философия в древности и в средневековье претерпевала изменения в соответствии с господствовавшим в математике отношением к числу. Вначале, когда человек еще не привык к обыденности чисел, казавшихся ему божественным даром, пифагорейцы строили свою философию как "числовую", искавшую причину всего в числе и числовых закономерностях. Однако с изменением математики и геометризацией знания и философия начинает опираться на геометрические рассуждения (Платон). Когда в Европе стала обиходной позиционная нумерация, вслед за математикой алгебраизируется и философия.

В развитии математики в Новое время существовавшая техника вычислений также оказывала существенное влияние на развитие науки. Так, формирование теории рядов и осознание возможности вычисления любой функции со сколь угодно высокой точностью способствовало развитию теории функций и свободному применению логарифмов.

Сейчас, когда вычислительная техника позволяет не только обрабатывать большие массивы данных, но и быстро производить большие объемы точных вычислений, новую жизнь получили давно изобретенные численные методы. Так, метод Эйлера интегрирования дифференциальных уравнений развился в методы Рунге-Кутта различных порядков. Также метод Монте-Карло, методы комбинаторной и дискретной математики не реализуемы без использования вычислительной техники. Описывающие реальные процессы системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и стохастические модели практически никогда не допускают полного математического анализа, однако исследуются численными методами. Постепенно меняется подход к методам доказательства математических фактов. Так, решение задачи о раскраске карты было сделано с использованием машинного перебора большого количества вариантов структуры карты. Возможно, уже в ближайшее время получит право на законное существование доказательство, состоящее из текста программы и распечатки результата ее работы.

Содержание представленной статьи обсуждалось с профессором $\boxed{\text{И.Г. Башмаковой}}$. Автор также выражает признательность за ценные советы и содержательное обсуждение вопроса проф. А.С.Братусю, И.Х.Сигалу, Р.З.Гушель и участникам семинара по истории математики МГУ.

### Библиографический список

1. *Жаров В.К.* О "Введении" к трактату "Чжу Шицзе Суань сюе ци Мэн" // ИМИ. Вып. 6(41). М., 2001. С. 347–353.
2. *Жаров В.К.* Развитие методов преподавания традиционной китайской математики. М., 2002.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия // Под ред. А.П. Юшкевича. М., 1970. Т. 1.
4. *Рыбаков Б.А.* Архитектурная математика древнерусских зодчих // Б.А. Рыбаков. Из истории культуры древней Руси. Исследования и заметки. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 82–104.
5. *Рыбаков Б.А.* Мерило новгородского зодчего XIII в. // Б.А. Рыбаков. Из истории культуры древней Руси. Исследования и заметки. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 105–118.
6. Bibhutibhusan Datta. The Science of the Sulba. 1932.
7. *Ifran G.* Histoire universelle des chiffres. T. 1–2. Paris, 1994.

## К реконструкции итерационного метода решения кубических уравнений у ал-Бируни и Леонардо Пизанского

*А.И. Щетников*

Абу-р-Райхан ал-Бируни при вычислении тригонометрических таблиц в 3 главе III книги "Канона Мас'уда" (ок. 1030) выполняет приближенное построение правильного девятиугольника [1. Ч. 1.

С. 260] и по ходу этого построения отыскивает приближенные решения кубических уравнений

$$x^3 = 1 + 3x, \tag{1.1}$$

$$x^3 + 1 = 3x. \tag{1.2}$$

Свой метод отыскания решений он никак не разъясняет. Для уравнения (1.1) найденное приближенное значение положительного корня в шестидесятеричных дробях равно 1;52,45,47,13. Уравнение (1.2) имеет два положительных корня. Исходя из геометрических соображений, Бируни ищет меньший из них – тот, который близок к $1/3 = 0;20$. Найденное им приближенное значение корня равно 0;20,50,16,01. О существовании второго положительного корня, близкого к $3/2$, Бируни ничего не говорит, поскольку этот корень его не интересует.

Из истории средневековой математики известно также, что Леонардо Пизанский, известный под прозвищем Фибоначчи, в трактате "Цветок" (1225) исследовал кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20, \tag{2}$$

предложенное ему Иоанном Палермским на математическом состязании при дворе императора Фредерика II (см. [2. Т. 1. С. 266]). Сам Иоанн Палермский почти наверняка заимствовал это уравнение из трактата Омара Хайяма "О доказательствах задач алгебры" (1074), где оно приводится как пример одного из видов в классификации кубических уравнений [3. С. 107]. Леонардо Пизанский исследовал уравнение (2) и решил его численно. Найденное им значение корня равно 1;22,07,42,33,04,40. Подобно Бируни, он не разъясняет своего метода. Правдоподобно будет предположить, что Леонардо научился этому методу у математиков Востока во время своих путешествий.

В настоящей статье делается попытка восстановить методы и воспроизвести результаты Бируни и Леонардо. Сразу же сообщим, что реконструированные нами итерационные формулы по виду совпадают с формулами так называемого метода Ньютона (он же – метод касательных). Однако в качестве рабочих средств для их получения мы будем пользоваться не алгебраическими выражениями, раскладываемыми по порядкам малости, как это делал сам Ньютон в "Анализе уравнений с бесконечным числом членов" (1669), но традиционными для античной и средневековой математики плоскими и телесными фигурами "геометрической алгебры". Ньютон имеет дело с алгебраическими символами; когда он говорит об отбрасывании членов по их сравнительной малости, эти члены мыслятся им как числа, которыми можно пренебречь в вычислениях по сравнению с другими числами. Математики средневековья, в отличие от Ньютона, мыслили свои уравнения телесно; и их соображения об отбрасывании малых членов должны отсылать не к числовым оценкам, но к геометрической интуиции, согласно которой пространственное тело, его тонкий поверхностный слой ("лист бумаги"), узкая граница этого слоя ("волос") и короткий конец этой границы ("песчинка") образуют иерархию последовательно убывающих порядков малости.

При чтении статьи читателю рекомендуется постоянно помнить о том, что мы записываем квадратные и кубические уравнения в привычной нам алгебраической символике, а математики средних веков формулировали эти уравнения словесно. К примеру, уравнения (1.1) и (1.2) у Бируни формулируются так: "единица в сумме с тремя вещами равна кубу вещи" и "куб вещи в сумме с единицей равны трем вещам" [1. Ч. 1. С. 260]. Такие словесные описания сами по себе не могут служить субстратом алгебраических преобразований, и потому они отсылают к изображениям плоских (в случае квадратных уравнений) или телесных (в случае кубических уравнений) фигур, которые и играют роль действительного оперативного материала алгебры.

Надо понимать и то, что для нас кубические уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой два варианта одного и того же уравнения, тем более, что одно из них преобразуется в другое заменой $x \to -x$. Но для средневековых математиков эти два уравнения были существенно различными, поскольку они изображались и решались с помощью разных чертежей, как это будет показано ниже. Само собой разумеется, отрицательные корни уравнений в расчет не принимались, поскольку неизвестное в исходных формулировках выступало как отрезок, сторона квадрата, ребро куба. Точно так же и суммарные величины, стоявшие в правой и левой частях уравнения, изначально считались положительными, поскольку они представляли собой некоторые площади в случае квадратного уравнения и объемы в случае кубического уравнения.

Рассмотрим кубическое уравнение (1.1), которое решал Бируни:

$$x^3 = 1 + 3x.$$

Начнем процесс решения с подбора "вручную" такого $x_0$, чтобы при $x = x_0$ численные значения правой и левой частей не сильно отличались друг от друга. Удобно положить $x_0 = 2$, при этом в левой части получается 8, а в правой части 7, и левая часть превышает правую на 1. Нетрудно понять, что начальное приближение $x_0 = 2$ оказалось завышенным по сравнению с точным значением корня, и его надо уменьшить на некоторую величину $\delta$.

Будем мыслить это "уменьшение подбираемой вещи" геометрически: со стоящего в левой части "куба вещи" надо снять гномон толщины $\delta$, а со стоящего в правой части "тела" с площадью основания 3 и высотой $x$ надо снять пластину объемом $3\delta$. Основная идея решения состоит в том, что при вычислении объема гномона мы будем приближенно считать, что он складывается из трех квадратных пластин площадью $x_0^2$ и толщиной $\delta$; тем самым объем гномона приближенно равен $3x_0^2\delta = 12\delta$. Величину $\delta$ нужно подобрать так, чтобы объем гномона $12\delta$ оказался на единицу больше объема пластины $3\delta$:

$$12\delta = 1 + 3\delta,$$

откуда $\delta = 1/9 = 0;06,40$. Тем самым очередное приближенное значение "вещи"

$$x_1 = x_0 - \delta = 2 - 0;06,40 = 1;53,20.$$

Каждая следующая итерация будет приводить к уравнению для определения толщины гномона $\delta$, имеющему вид

$$x_n^3 - 3x_n^2\delta = (3x_n + 1) - 3\delta,$$

откуда получается итерационная формула

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3 - (3x_n + 1)}{3(x_n^2 - 1)} = \frac{2x_n^3 + 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Вычисления по этой формуле дают результат Бируни уже на третьем шаге:

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 2 |
| $x_1$ | 1;53,20 |
| $x_2$ | 1;52,46,... |
| $x_3$ | 1;52,45,47,13... |

Для уравнения (1.2) соответствующая итерационная формула строится аналогичным образом; она имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Стартуя с $x_0 = 1/3 = 0;20$, мы получаем результат Бируни уже на втором шаге:

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 0;20 |
| $x_1$ | 0;20,50 |
| $x_2$ | 0;20,50,16,01... |

Если стартовать с $x_0 = 3/2 = 1;30$, итерационный процесс будет сходиться ко второму положительному корню уравнения (2.1):

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 1;30 |
| $x_1$ | 1;32 |
| $x_2$ | 1;31,55,31... |
| $x_3$ | 1;31,55,31,11,57,56... |

Зададимся теперь вопросом: если Бируни и в самом деле пользовался описанным выше методом, то как он производил оценку точности полученных результатов? На каждой итерации имеет смысл оставлять в результате только верные шестидесятеричные знаки, чтобы не делать лишних вычислений. Но как узнать, сколько найденных знаков являются точными, не выполняя следующей итерации? Возможно, что здесь применялся эмпирически установленный на многих примерах факт удвоения числа верных знаков с каждой следующей итерацией.

Применим этот алгоритм к отысканию положительного корня кубического уравнения (2), которое решал Леонардо Пизанский. Пусть приближение $x_n$, подставленное в левую часть уравнения (2), дает результат, отличный от 20. Получившаяся разница может быть представлена как $x_n^3+2x_n^2+10x_n-20$. С другой стороны, мы представляем ее как суммарный объем гномонов всех тел, из которых составляется левая часть уравнения (2). Если пренебречь столбиками сечением $\delta^2$ и кубиком $\delta^3$, эта сумма будет приближенно равна $(3x_n^2+4x_n+10)\delta$. Отсюда

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3+2x_n^2+10x_n-20}{3x_n^2+4x_n+10} = \frac{2x_n^3+2x_n^2+20}{3x_n^2+4x_n+10}.$$

Стартуя с $x_0 = 1;30$, мы вновь получаем требуемую точность уже на третьем шаге:

| | |
|---|---|
| $x_0$ | 1;30 |
| $x_1$ | 1;22... |
| $x_2$ | 1;22,07,42... |
| $x_3$ | 1;22,07,42,33,04,37... |

Весомым доводом в пользу того, что Бируни и Леонардо могли пользоваться описанным выше методом, служит совпадение результатов вычислений, проведенных в две или три итерации без какого-либо специального подбора начального приближения, с теми результатами, которые сообщают сами эти математики.

С другой стороны, во всей этой истории имеется одна существенная проблема: по нашему методу последовательные приближенные значения должны подходить к корню уравнения (2) снизу, а сам Леонардо получил завышенное приближенное значение корня. Расхождение нашего результата с результатом Леонардо составляет 3 единицы в шестом знаке; при этом истинное значение корня лежит примерно посередине между этими двумя приближениями. И, конечно, желательно было бы показать, откуда у Леонардо могло возникнуть отклонение в другую сторону от точного значения.

Ранее попытка реконструировать итерационный метод Леонардо Пизанского была сделана С. Глушковым. В работе [4] им было выдвинуто предположение, что Леонардо вычислял приближенное значение корня, пользуясь методом линейной интерполяции (в средние века этот метод называли правилом двух ложных положений). В соответствующих вычислениях результат Леонардо достигается на 18-й итерации. Думается, что третий шаг итерационного процесса, на котором требуемая точность достигается в нашей реконструкции, является достаточно сильным аргументом в пользу ее большего правдоподобия по сравнению с реконструкцией Глушкова.

Другая реконструкция итерационного метода Леонардо Пизанского описана Б.Л. Ван дер Варденом [5. С. 34]. Он предполагает, что Леонардо мог строить последовательные приближения по схеме Горнера. (Отметим, что сама эта схема для извлечения квадратных и кубических корней была описана под названием "метода небесных элементов" в древнекитайском трактате "Математика в девяти книгах" (II в. до н.э.), а китайские математики Цзу Чунчжи (V в.) и Ван Сяо-тун (VII в.) решали этим методом кубические уравнения [2. Т. 1. С. 171].) Так, для уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

на первом шаге устанавливается, что $1 < x < 2$. Затем полагается $x = 1 + y/60$, что после раскрытия скобок приводит к кубическому уравнению

$$y^3 + 5,00y^2 + 17,00,00y = 7,00,00,00$$

(коэффициенты записаны в шестидесятеричной системе), для которого подбором устанавливается, что $22 < y < 23$ (при подборе удобно двигаться сверху, вычитая одну за другой единицы из приближения $7,00 : 17 \approx 24$). На следующем шаге точно так же кладется $y = 22 + z/60$, получается новое кубическое уравнение и отыскиваются целочисленные границы, внутри которых заключено значение $z$; и так далее.

Проблемная точка у этой реконструкции та же самая, что и у нашей: если бы Леонардо находил приближенные значения корня по этой схеме, то на шестой итерации он неминуемо получил бы результат 1;22,07,42,33,04,38, а у него в шестом шестидесятеричном знаке стоит 40.

В целом вопрос, конечно, нельзя считать окончательно решенным; для его дальнейшего прояснения было бы желательно применить реконструированный в настоящей статье метод к каким-нибудь другим уравнениям, решавшимся в средневековой математической литературе. В частности, большой интерес представляли бы примеры численного решения алгебраических уравнений степени выше третьей, так как для них описанная выше процедура "снятия гномона" уже не допускает наглядной геометрической интерпретации и требует формальных алгебраических рассуждений, основанных на использовании таблицы биномиальных коэффициентов.

## Библиографический список

1. *Беруни Абу Райхан.* Канон Мас'уда // Беруни Абу Райхан. Избранные произведения. Ташкент: Фан, 1973–76. Т. 5. Ч. 1–2.
2. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука, 1970: В 3 т.
3. *Хаййам 'Омар.* Трактаты. М.: Изд. вост. лит., 1964.

4. *Glushkov S.* On approximation methods of Leonardo Fibonacci. Historia Mathematica. 1976. V. 3. P. 291–296.
5. *Van der Waerden B.L.* A history of algebra: From al-Khwarizmo to Emmy Noeter. Berlin a. o., Springer, 1985.

## О некоторых задачах двойственности

*Г.И. Синкевич*

История математики знает немало примеров двойственных задач, наиболее известная – это обнаруженная Исааком Барроу двойственность между задачами о нахождении касательной к кривой и о нахождении площади под кривой, что привело к открытию связи между дифференцированием и интегрированием. Конец девятнадцатого – начало двадцатого века характеризовались появлением большого количества математических наблюдений, новых математических объектов, формированием новых теорий.

Польский математик В. Серпинский, создавая теоретическую платформу польской школы, видел необходимость упорядочения аксиоматики теории множеств относительно аксиомы выбора и гипотезы континуума. В период с 1914 по 1918 гг. он жил в Москве и общался с математиками Московского университета: Б.К. Млодзеевским, Д.Ф. Егоровым и Н.Н. Лузиным. В беседах с Лузиным у Серпинского появляется критический взгляд на гипотезу выбора и природу континуума. Вообще говоря, Лузин не был сторонником применения аксиомы выбора. Его интересы лежали в области эффективных множеств, но при построении примеров совместно с Серпинским он осознанно пользуется аксиомой выбора. Заметим, что в некоторых ранних работах Лузина часто встречается произвольный выбор. Из девяти работ Лузина, в которых явно используется аксиома Цермело, три работы написаны совместно, одна является письмом к Серпинскому, а остальные (кроме одной) содержат либо обращение к работам Серпинского, либо ссылку на беседы с ним. Это показывает влияние идей Серпинского на творчество

Лузина. Правда, в конце третьего десятилетия XX века, видимо под влиянием Бореля, позиция Лузина меняется, хотя он не отказывается от аксиомы выбора окончательно. Приведем здесь высказывание Лузина 1933 г., достаточно полно характеризующее его позицию: "Я рассматриваю вопросы существования с точки зрения натуралистов, как это делает Борель – великий натуралист нашего времени. С этой точки зрения нет никакой разницы между применением рассуждения Цермело во всей его полноте и употребления так называемой "гипотезы континуума". Все эти вещи одинаково нереальны.

Если я трачу время на рассмотрение этих вещей, то не потому, что считаю их действительно серьезными, а потому, что через множество чисто словесных "существований", слишком легких, чтобы принимать их всерьез, я вижу слабый свет настоящей интуиции, могущей привести нас к совершенно неожиданным фактам, которые мы обнаружим, если следовать другому пути" [1. Т. 2. С. 707].

Но в период 1914–1918 гг. Лузин не был столь осторожен, и немалую роль в этом сыграл Серпинский. Результаты, полученные ими совместно, во многом послужили основой для дальнейших разработок Серпинского и ученых польской школы; таковым было, например, множество Лузина. Это название в литературе имеют несколько объектов; мы будем иметь в виду несчетное множество первой категории на всяком совершенном множестве, расположенном в сегменте. Это множество было построено Лузиным в 1914 г. в работе "Об одной проблеме Бэра" [1. Т. 2. С. 683–685].

Благодаря Лузину Серпинский стал требовательней к строгости доказательств. В 1918 г. им был предложен новый способ доказательства – так называемый принцип минимума. Впервые Серпинский использовал его в статье "Аксиоматическое определение множеств, измеримых B" [2. Т. 2. С. 187–191].

Другая проблема, поставленная Лузиным и также увлекшая Серпинского, – это сохранение свойств Бэра и измеримости при суперпозиции функции. Относительно измеримых функций Лебег установил только, что сумма и предел сходящейся последовательности измеримых функций есть измеримая функция, отсюда измеримы все бэровские функции. Серпинский завершил цикл работ по инвариантности, измеримости и свойству Бэра перед Второй мировой войной, а начал его в московский период. Много своих работ он посвятил связи аксиомы выбора с гипотезой континуума и исследованию множества Лузина, которое он использует во многих своих работах, в том числе в одной из центральных своих работ по мере и категории "Двойственность между первой категорией и мерой ноль".

И Серпинский, и Лузин формировали свою методологию при разработке общих проблем. Лузин тяготеет к конструктивности, анализу свойств существующих объектов. Серпинского же интересует наличие отображений, логически двойственные объекты. Эти тенденции впоследствии проявятся ярко в творчестве каждого из них.

Наиболее значительным из всех исследований Серпинского, после работ по упорядочению основ теории множеств, является цикл работ двадцатых и тридцатых годов XX века по мере и категории. При этом Серпинский пользовался довольно широким понятием функции – как функции множества, а не как функции точки, различая ее поведение на различных подмножествах области определения.

Смещение приоритета от функции точки к функции области обусловлено работами Лебега, Бэра, Бореля и Цермело. В методе интегрирования Лебега область определения функции подвергается перегруппировке точек для удобства интегрирования, то есть в понятии функции уже не столь важным становится закон соответствия, сколько множества определения и изменения функции.

При этом, наряду с представлением о функции как конструктивном объекте (для которого прежде всего устанавливается, как осуществляется соответствие), возникает неэффективное представление (свое начало оно берет, видимо, с определения Дирихле, согласно которому совершенно не важно, как осуществляется это соответствие).

В работах Серпинского и его современников образ функции одного аргумента – это одномерное множество таких точек $y$, для которых $y = f(x)$, а график такой функции – это плоское множество таких точек $(x, y)$, для которых $y = f(x)$. Лузин, например, в журнале "Fundamenta mathematicae" ставит вопрос так: любая ли функция, образ которой обладает свойством Бэра, будет обладать свойством Бэра?

Функция обладает свойством Бэра, если она непрерывна для некоторого совершенного множества $P$, кроме, может быть, множества первой категории. (У Бэра условие сформулировано так: "Если функция точечно разрывна на любом совершенном множестве, кроме, может быть, множества первой категории".)

Работа Серпинского "Функции, обратные функциям, удовлетворяющим условию Бэра" (1939 г.) [2. Т. 3. С. 409–410], посвященная вопросу о сохранении свойства Бэра при отображениях, была написана уже после открытия им двойственности между мерой и категорией. Необходимость ее была вызвана тем, что, доказав существование взаимнооднозначного соответствия между множествами меры нуль и множествами первой категории и исследовав, на основании предыдущих работ, свойства отображающей функции, Серпинский задался вопросом о существовании обратного отображения и его свойствах. Можно предположить, что если бы не вскоре начавшаяся война, он решил бы проблему обратного отображения полностью.

В 1934 г. Серпинским была написана работа, занимающая центральное место среди исследований этого цикла. Она носит название "Дуальность между первой категорией и мерой нуль" [3]. Постановка вопроса такова. Известно много теорем о множестве первой категории, которые остаются верными и для множества меры нуль, и наоборот. С помощью гипотезы континуума доказывается теорема, объясняющая эту двойственность: если верна гипотеза континуума, то существует такое взаимно однозначное отображение $f(x)$ множества $X$ всех действительных чисел на себя, что когда есть подмножество множества $X$ первой категории, тогда $f^{-1}(E)$ есть множество меры нуль; когда же есть подмножество множества $X$ меры нуль, тогда $P^*(E)$ будет множеством первой категории. Серпинский отмечает, что остается открытым следующий вопрос: существует ли преобразование $f(X)$, которое удовлетворяет условиям теоремы и такое, что если $E$ – множество меры нуль из $X$, то $f(E)$ будет первой категории, а если $E$ – множество первой категории из $X$, то $f^{-1}(E)$ – множество меры нуль? Иными словами, существует ли взаимно однозначное отображение прямой на себя, которое переводит все множества первой категории во все множества меры нуль и все множества меры нуль во все множества первой категории? Серпинский приложил немало усилий для решения этого вопроса, но окончательный ответ на него дал венгерский математик П. Эрдёш.

Серпинский первым привел случай неприменимости теоремы о двойственности. Позднее Хаусдорф выделил пространства, где эта двойственность имеет место, назвав их пространствами меры, согласованной с категорией.

Зависимости теоремы дуальности от гипотезы континуума и характера функции, осуществляющей это преобразование, посвящена работа Серпинского "О некоторых взаимно однозначных преобразованиях прямой на себя". Автор утверждает, что функция, осуществляющая указанную связь, не может быть измеримой. С помощью множества Лузина и множеств, названных позднее множествами Серпинского, он формулирует следующую теорему: "В предположении гипотезы континуума существует функция $f(x)$, которая преобразует взаимно однозначным образом прямую на себя и одновременно преобразует множество меры нуль во множество первой категории и каждое множество первой категории во множество меры нуль". Тем не менее, отмечает здесь же Серпинский, даже допуская гипотезу континуума, пока невозможно решить проблему существования функции, преобразующей взаимно однозначно прямую на себя, обратная к которой преобразует каждое множество первой категории во множество меры нуль и каждое множество меры нуль во множество первой категории.

В 1943 г. венгерский математик П. Эрдёш опубликовал статью "Некоторые замечания по поводу теории множеств" [4], первая часть которой посвящена доказательству указанной теоремы. Наложив условие на функцию $f(x)$, он получает требуемое утверждение:

"Существует ли функция, которая имеет указанное свойство и также еще такое свойство – она отображает множества первой категории во множества меры нуль, а обратная к ней отображает множества меры нуль во множества первой категории? Мы докажем, что такая функция существует. Наше доказательство аналогично доказательству Серпинского: мы, конечно, полагаем, что гипотеза континуума выполняется."

Дж. Окстоби в своей книге "Мера и категория" [5], высоко оценивая значение этой теоремы и отмечая, что Эрдёш лишь слегка усовершенствовал доказательство Серпинского, предлагает такой вариант теоремы (теперь она носит название теоремы Серпинского-Эрдёша):

Пусть $P$ – утверждение, в которое входят понятия множества меры нуль, множества первой категории и понятия чистой теории множеств. Пусть $P^*$ – утверждение, полученное из $P$ взаимной заменой всех терминов "нуль-множество" и "множество первой категории". Тогда каждое из утверждений $P$ и $P^*$ следует из другого при условии, что справедлива гипотеза континуума.

Итак, несмотря на то, что окончательный вариант результата принадлежит Эрдёшу, Серпинский сделал большую часть исследования: поставил и решил проблему одностороннего отображения, поставил проблему одновременного отображения, охарактеризовал функцию, осуществляющую отображение, рассмотрел зависимость теоремы от гипотезы континуума, а также показал ограниченность действия теоремы.

Теорема Серпинского-Эрдёша имеет методологический характер и в позднейшей литературе часто называется “методом двойственности”.

Можно предположить, почему Серпинскому не удалось доказать желаемую теорему. Он искал наиболее общий вид функции, описал некоторые ее свойства. Эрдёш удовлетворился частным случаем, не заботясь о степени общности.

В польской школе труды Серпинского по методу категорий были развиты К. Куратовским, С. Банахом, Э. Марчевским, В. Орличем и другими.

Преимуществом метода категорий перед конструктивным методом является то, что он не требует значительных построений. С. Хартман [6] отмечает ту особенность теории категории и меры, что она позволяет доказать чисто теоретико-множественные теоремы о несуществовании универсальной меры, что было разработано К. Куратовским, С. Банахом, Э. Марчевским, С. Уламом. Принцип двойственности широко применяется и в доказательстве теорем существования.

## Библиографический список

1. *Лузин Н.Н.* Собрание сочинений в трех томах. М., 1953–1959.
2. *Sierpinski W.* Oeuvres choisies. Warszawa: Panstowe wydwnictwo Naukowe. T. 1. 1974. 500 s. T. 2. 1975. 780 s. T. 3. 1976. 686 s.
3. *Sierpinski W.* Sur la dualite entre la premiere categorie et la mesure nulle // Fundamenta mathematicae. Vol. 22, p. 276–280.
4. Erdos P. Some remarks on set theory // Ann. of math. 1943. Vol. 44. № 4. p. 643–646.
5. *Oxtoby J.C.* Measure and category N.Y. Heidelberg, B. Springer, 1971. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
6. *Hartman S.* Merure et categorie. Congruence des ensembles // В кн. [3. V. 2. P. 20–25].

## Годы и судьбы: русский институт в Белграде

*Н.В. Локоть*

Восемьдесят пять лет в жизни человека – это почти все отведенное ему земное существование; восемь с половиной десятков лет в жизни цивилизации – это миг, но порой этот миг перестраивает судьбы людей и стран. В этом году среди знаменательных дат была еще одна, которую нужно вспомнить: ровно 85 лет назад в Париже была образована Русская Академическая группа, в состав которой вошли ученые-эмигранты из России.

Через некоторое время после революции правительство большевиков, по существу, начало высылку интеллигенции из страны. Огромное число ученых разных научных направлений вынуждено было покинуть родину "легально" или "нелегально". Одни уезжали с глубочайшей горечью и, порой, непониманием происходящего: почему их труд на поприще науки, образования, культуры не нужен России. Другие, осознанно владея ситуацией, понимали необходимость выезда, но все равно, еще надеясь на что-то, пытались наладить подобие прежней жизни на "островках", где еще не было большевиков.

Вот пример одной из многих тысяч судеб, характерный для того времени: *Федор Васильевич Тарановский (1875–1936) – уроженец Плоцка, воспитанник юридического факультета Варшавского университета; получил в 1917 году кафедру в Петроградском университете, но в связи с начавшимся террором и гонениями работать не смог и вместе с рядом столичных ученых бежал на юг, долго скитался, уклоняясь от предложенного ему поста министра в гетманском правительстве. Затем "...он принял звание члена украинской АН, возглавляемой тогда В.И. Вернадским, и деятельно участвовал в попытке сохранить или наладить настоящую академическую работу в Киеве, Полтаве, Харькове, Екатеринославе и Симферополе. После крушения белого движения он без колебания предпочел горечь изгнания рабскому про-*

*зябанию под игом большевиков. В 1920 году Ф.В. эмигрирует с семьей из России. За рубежом ему представилась возможность получить кафедру в Варшаве, Софии, Белграде. Он предпочел Белград. В течение 16 лет, до смерти, он оставался профессором Белградского университета по пустовавшей до него в течение 17 лет кафедре истории права славянских народов. За это время он проявил совершенно исключительную научную производительность... Внешним выражением признания его ученых заслуг было звание члена трех академий и председателя РНИ в Белграде... он стал исключительным по ширине горизонта историком права в европейском ученом мире"* [3. С. IX–XI]. Примерно то же самое можно сказать о биографиях многих русских ученых, волею судеб оказавшихся за пределами России. История русской научной эмиграции сложна, запутана и очень мало изучена. Но ведь уже сложившиеся к началу XX века русские школы в математике, естествознании, медицине, гуманитарных науках, имеющие свои традиции, свои направления, методологию исследований, не могли не повлиять на развитие науки в странах, принявших русскую интеллигенцию. Тема эта находится еще в стадии становления в связи с появлением некоторого доступа к документам рассматриваемой эпохи. История русской математической эмиграции достойна изучения и анализа, особенно в наше сложное для науки время. Цель данной статьи – попытка рассмотреть малую толику обозначенной проблемы. В русском журнальном фонде РНБ сохранились "Записки Русского научного института в Белграде" (РНИ), которые содержат ценнейшие документы той эпохи [2].

Сведениям об истории создания таких институтов за рубежом мы обязаны историку Е.В. Спекторскому :

*"Русские ученые, не принявшие ига большевиков и покинувшие родину, не ограничились приисканием себе заработка на чужбине. Начиная с 1920 года, по примеру Белградского Общества русских ученых и Парижской Академической группы, они образовали в разных странах профессиональные объединения. На первом зарубеж-*

*ном академическом съезде, состоявшемся в 1921 году в Праге, эти объединения учредили Союз русских академических организаций за границей"* [3. С. 3]. Возникающие организации были призваны решать три основные задачи: 1) правозащитную, 2) помощь эмигрантской молодежи в получении образования, 3) сохранение и углубление традиций русской науки, дальнейшее изучение собственного отечества.

*"В связи с этою последнею задачею явилась мысль об основании особых русских научных институтов на чужбине. Во исполнение этой мысли и в связи со вторым академическим съездом в 1922 году в Праге был открыт Русский институт, преследующий цель поддержания изучения наук, искусства, литературы, права, хозяйства, истории и природных сил России. ... Второй научный институт был основан в Берлине, третий в Белграде"* [3. С. 4]. Идея создания такого института возникла еще в 1922 году. В речи на открытии РНИ в Праге его первый председатель – П.И. Новгородцев – говорил о том, что *"...есть еще один славянский народ и одно государство, среди которого также возможно сейчас же основание такого института"*, имея в виду Сербию, Хорватию и Словению. Это заявление не было голословным: известно, что правительство Югославии пыталось многое сделать, чтобы облегчить чужестранцам тяготы жизни, создав так называемую Державную Комиссию, призванную заботиться об удовлетворении материальных и учебных нужд русских эмигрантов в Югославии. Председателем комиссии был А.И. Белич, президент Сербской АН, питомец Московского университета. Кроме того, под покровительством короля Александра I *"была образована особая Культурная Комиссия, поставившая себе задачею содействие русской науке и искусству... Первое организационное собрание Института состоялось 23 июня 1928 г. Торжество открытия Института было приурочено к первому заседанию четвертого съезда русских ученых в Белграде, 16 сентября 1928 г., в большой физической аудитории нового здания университета"*.

В торжественной речи председатель РНИ четко определил задачу и направления будущей работы:

"*Задача... двоякая – исследовательская и просветительская. Работа... предполагается в трояком направлении: разработка общих вопросов науки с применением традиций и методов русской науки, изучение прошлого и настоящего России,... и, наконец, изучение страны, гостеприимством которой мы пользуемся.... В задачу института входит также подготовка молодых ученых и печатание научных трудов*" [3. С. 6].

Первоначально состав РНИ был немногочислен, на проекте его устава всего 21 подпись, дальнейшее пополнение института происходило путем избрания. Согласно Уставу, члены РНИ делились на почетных, действительных и сотрудников: почетными могли стать "*лица, оказавшие крупные услуги институту или пользующиеся известностью, благодаря своим выдающимся научным трудам,... действительными... только лица, занимавшие прежде кафедры в высших учебных заведениях России или состоящие ныне ординарными или экстраординарными профессорами университета Югославии, членами-сотрудниками – ... лица, принимающие участие в научных исследованиях*" [3. С. 9]. В 1938 году Устав был немного изменен: действительными членами РНИ могли быть все занимавшиеся преподаванием в югославских университетах, а также магистры и доктора российских университетов. Институт до 1932 года мог себе позволить приглашать ученых и деятелей искусства и культуры из других стран, давать стипендии молодым ученым, как проживающим в Югославии, так и приглашенным (например, впоследствии известный геометр В.Х. Даватц – стипендиат РНИ). Институт был организован по русским академическим традициям и управлялся Советом. Первым председателем института был избран философ Е.В. Спекторский (1928–1930), затем его сменил историк права Ф.В. Тарановский (1930–1936), о жизненном пути которого упоминалось в начале статьи; в 1936–37 гг. руководил РНИ историк церкви А.П. Доброклонский, с 1938 по 1939 – профессор медицины А.И. Игнатовский. В октябре 1928 года в институте было образовано пять отделений: ***философское, языка и литературы, общественных и исторических наук, естественных, агрономических и медицинских наук, математических и технических наук.***

У института была своя небольшая библиотека; Народная библиотека Белграда и книгохранилище Сербской Королевской Академии предоставляли свои фонды РНИ, но русскими изданиями ученых обеспечивала, в основном, университетская библиотека Гельсингфорса. В институте проводились торжественные публичные собрания, посвященные знаменательным датам и юбилеям, а также закрытые – для бесед с приезжавшими в Белград учеными и писателями *(З. Гиппиус, Д. Мережковский, К. Бальмонт (1928); С. Маслов (1930); И. Северянин, А. Алехин, И. Лапшин (1931)).*

Для ознакомления интересующихся и особенно начинающих ученых с методами научной работы, с современным положением отдельных научных дисциплин были организованы семинарии, которыми руководили 17 членов института, читался ряд систематических курсов.

Председателем интересующего нас отделения в 1928–1933 гг. был инженер-механик Г.Н. Пио-Ульский.

*Георгий Николаевич Пио-Ульский (1864–1938) родился в Пскове, окончил Морское Инженерное Училище в Кронштадте (1884) и Николаевскую Морскую Академию по механическому отделению (1890). С 1891 года преподавал в Кронштадтском инженерном училище, затем в институте инженеров путей сообщения, политехническом институте, после революции в Донском и Кубанском политехникумах, а после эвакуации (1920) – в Белградском университете, где являлся ординарным, а после выхода на пенсию в 1928 году – гонорарным профессором. "Специальностью [его] были паровые турбины и термодинамика, по этим наукам Г.Н. напечатал целый ряд научных трудов и учебников на русском, сербском и иностранных языках. Г.Н. не ограничился преподава-*

*тельской деятельностью, а, оставаясь в России (до 1919 г.) на действительной службе во флоте (где он достиг чина генерал-майора корпуса инженеров-механиков флота), проводил и провел в жизнь применение паровых турбин на военном флоте... На техническом факультете БУ [он] организовал музей машин и оставил наилучшую память как энергичный организатор, отличный профессор и отзывчивый коллега"* [3. С. II–III].

С 1933 года деятельность отделения математики и механики связана с именем выдающегося, но почти не известного в России математика – Николая Николаевича Салтыкова.

*"Салтыков Никола (25.9.1872–28.9.1961) – югославский математик. Проф. ун-та в Белграде. Осн. труды по теории дифференциальных уравнений в частных производных. С 1921 года опубликовал ок. 300 работ"* – это дословная запись из справочника [1. С. 458]. Именно при изучении вклада Салтыкова в развитие теории дифференциальных уравнений возникла идея рассказать о Русском научном институте в Белграде.

Николай Николаевич Салтыков родился в Вышнем Волочке, учился в Харьковском университете (1891–1895), после его окончания был оставлен для приготовления к профессорскому званию, в Харькове защитил магистерскую (1899) и докторскую (1907) диссертации. В Белград он приехал в 50-летнем возрасте зрелым ученым, имея уже более 20 лет научного стажа и более полусотни опубликованных научных работ по теории дифференциальных уравнений в частных производных, теоретической механике, методике преподавания математики и др.

Будучи уже ординарным профессором Белградского университета, Салтыков входил в первоначальный состав РНИ, участвовал в работе редакционной комиссии, в 1933 году возглавил отделение математики и механики, руководил семинариями, читал курсы лекций для русскоязычных студентов. В белградский период у него появилось еще более 150 научных публикаций. Сербская АН, учитывая огромные заслуги Николая Николаевича в развитии математики, издала в 1947 году его объемную монографию ***"Методы интегрирования дифференциальных частных уравнений 1 порядка одной неизвестной функции"***, в которой были изложены наиважнейшие результаты многолетней работы. По своему историческому подходу, по методам изложения, по содержанию книга имеет характер энциклопедии: она разошлась по 700 странам, издана на многих языках, а русского издания до сих пор нет!

Основание русских научных организаций за рубежом давало возможность издавать свои труды: многие *"русские ученые в эмиграции получили возможность печатать свои научные труды на всевозможных языках до японского включительно и по всем дисциплинам от богословия до радиотехники"* [3. С. 24]. Тем не менее, сложности в издании научной продукции на русском языке у руководства РНИ были огромны. Спекторский приводит примеры того, что *"на одной из выставок в Праге находилось математическое исследование Н.Я. Подтягина, который домашним способом собственноручно набрал и переплел свою работу... Совершенно готовые к печати труды третьего съезда русских ученых в Праге в 1924 году доныне [1938 г.!] остаются в рукописи. Прекратилась издательская деятельность русских ученых в Берлине. Молодые ученые, желающие получить от русских академических организаций степень магистра или доктора, принуждены представлять свои исследования в рукописном виде..."* [3. С. 24].

На II съезде в Праге (1922) была образована комиссия по изданию трудов русских ученых на родном языке, но за недостатком средств все разработанные ею планы изданий остались на бумаге. В Белграде же все сложилось иначе. Благодаря *"сочувственному отношению Культурной комиссии Югославии"*, осенью 1928 года в РНИ было утверждено Положение об издании трудов, которое предусматривало *"... печатание диссертаций, монографий, в случае возможности – курсов наук, преподаваемых в высших школах, если они представляют известную оригинальность, а так-*

*же Записок, содержащих научные и критико-библиографические статьи...”* [3. С. 25]. Из-за недостатка средств Положение было выполнено частично, но Институту удалось напечатать два тома ***“Трудов четвертого съезда русских академических организаций за границей”*** (2-й том посвящен математическим, техническим и естественным наукам, в нем 13 статей – по математике, технике, физике), первый выпуск ***“Материалов для библиографии русских научных трудов за рубежом”*** (1930), четырнадцать выпусков ***“Записок Русского научного института”*** (в них 77 из 163 статей посвящены математике и естественным наукам). Отметим, что в “Записках РНИ” помещались работы не только его членов и авторов, проживающих в Югославии, но и русских ученых из Франции, Германии, Чехословакии, Америки, что придает этому изданию *“характер ученого органа всей русской эмиграции”* [3. С. 25].

По случаю празднования десятилетия РНИ Совет постановил издать II выпуск библиографических “Материалов”, а также “собрать автобиографии членов Института с их фотографическими карточками. Институт вступает во второе десятилетие своего существования с верою, что ему и впредь удастся работать в том направлении, которое определилось в течение первого десятилетия. Будущие историки русской эмиграции выяснят, какова культурная ценность этой работы” [3. С. 27].

## Библиографический список

1. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Выдающиеся математики. Киев: Радяньска школа, 1987.
2. Записки Русского научного института в Белграде. 1930–1939. Вып. 1–14.
3. *Спекторский Е.В.* Десятилетие Русского научного института в Белграде // Записки Русского научного института в Белграде. 1939. Вып. 14. С. 3–35.

4. *Локоть Н.В.* Забытые имена: Николай Николаевич Салтыков (1872–1961) // История науки в вузе и школе. Мурманск, 1996. Вып. III. С. 14–40.

## Формирование исследовательских умений будущего учителя в процессе изучения истории математики

*Н.Д. Кучугурова*

Образование в высшем учебном заведении предполагает не только получение фундаментальных научных знаний студентами, но и личностную ориентацию процесса обучения. Наиболее полно этим требованиям удовлетворяет научно-исследовательская работа, поскольку она способствует профессиональному росту, творческому саморазвитию личности.

Современный преподаватель должен отличаться общей культурой, иметь глубокие психолого-педагогические знания, высокий уровень профессиональной подготовки в своей предметной области, являться творческой развивающейся личностью. Целью образовательного процесса в настоящее время становится не усвоение готовых знаний, а усвоение определенного *способа мышления*, обеспечивающего получение и производство новых знаний.

Естественно, высшая школа не может полностью охватить все задачи воспитания творца-исследователя, но она может решать ряд локальных задач этого направления, в частности, методики формирования исследовательских умений у школьников. В настоящее время владение элементарными исследовательскими умениями математического характера необходимо каждому человеку для обеспечения подготовки к творческому труду в широкой сфере деятельности, т.к. математические методы исследования проникли во все области науки, техники и производства и неизмеримо возросла потребность в подготовке людей, не только обладающих некоторой системой математических знаний, но и умеющих их применять, причем в неизвестной заранее ситуации.

Для формирования творческой личности будущего учителя курс истории математики имеет большой потенциал. Основой творчества являются исследовательские умения, которые мы стремимся развивать в процессе изучения истории математики.

Психологи отмечают, что осваивать эвристические приемы следует с развития *умения видеть*, которым, естественно, обладают студенты старших курсов, но мы предполагаем развитие умения видеть на более высоком уровне креативности, т.е. на основе уже полученного фундаментального багажа математических знаний исследовать развитие математических идей, провести сравнительный анализ появления новых математических фактов, оценить роль интуиции в открытии новых идей и законов.

Учим студентов "перенестись" в ту или иную эпоху, самостоятельно увидеть и сформулировать проблему того времени, выдвинуть гипотезу, найти или изобрести новый способ ее проверки; собрать исторические данные, проанализировать их, предложить методику их обработки; сформулировать выводы и увидеть возможности практического применения полученных результатов как в той эпохе, так и в настоящее время.

На примерах из истории развития математики мы предлагаем проследить развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом, с помощью математики осмыслить мир, в котором мы живем, осознать новейшие математические достижения и их роль в современной науке.

Для обеспечения творческих условий познавательной деятельности необходимо приучить студентов к работе с первоисточником, с книгой, монографией, научной статьей; научить его приемам просмотрового чтения для быстрого нахождения нужной информации. С этой целью мы проводим творческие дискуссии на занятиях или за "круглым столом", создавая в доброжелательной обстановке возможности релаксации, свободы обмена мнениями, чтобы развивать воображение, гибкость и дивергентность мышления, используем методы развития творчества, такие как метод мозгового штурма для генерации идей, отбора идеи; синектику, способ организации коллективной мыслительной деятельности на основе четырех приемов: рассмотрение проблемы в том виде, как она дана; отказ от очевидного решения; проведение прямой аналогии с чем-либо; формулировка проблемы в общем виде.

Поскольку всякая исследовательская деятельность начинается и заканчивается процедурой анализа (ситуации, результата деятельности), в значительной части исследовательских заданий этому элементу уделяется большое внимание, тем более, что это является слабым звеном у студентов даже старших курсов.

Для развития аналитических умений будущих учителей каждая профессиональная задача (элемент профессиональной деятельности), осваиваемая в ходе обучения, должна быть осознана, проанализирована на предмет выявления ее содержания, структуры, способов выполнения, возможных форм реализации и форм, предпочтительных для конкретного студента. С этой целью предлагаются задания типа:

– приведите примеры задач, которые умели решать вавилонские, древнеегипетские, индусские математики. Какие вам известны материальные источники, свидетельствующие об этих знаниях и умениях математиков древности? Проанализируйте методы их решения и сравните с современными подходами к их решению;

– охарактеризуйте книгу "Начала" Евклида. В чем ее принципиальное отличие от предшествующих математических работ. Какую роль играет данное произведение в настоящее время?

– представьте мнение автора (или различных авторов) указанной книги по заданной исторической проблеме на основе выписок или конспекта.

Для составления исследовательских заданий и их решения мы широко используем книгу Г.Д. Глейзера [3].

При формировании исследовательских умений мы большую роль отводим дальнейшему развитию интуиции и воображения, т.к. они являются важнейшим механизмом развития творчества. В этом нам помогает, в частности, книга В. Босса [1]. Мы предлагаем студентам следующие задания:

– проанализируйте “Загадки теории вероятностей” [1. С. 68–76]. Какова роль интуиции в решении этих загадок? Подберите современные загадки теории вероятностей для учащихся средней школы, разработайте методику их решения;

– проанализируйте главу “ДНК истории” [1. С. 106–116]. Объясните причину выбора автором данной структуры указанной главы.

История математики полна неожиданных и интересных софизмов и парадоксов, разрешение которых также приводило к новым открытиям, поэтому в исследовательские задания мы включаем анализ и разрешение разнообразных софизмов и парадоксов и советуем использовать книгу [2].

В комплексе исследовательских заданий не последнее место мы отводим работам студентов, направленным на освоение ими методов и приемов работы по самообразованию и профессиональному самосовершенствованию, а также основным методам осуществления педагогического исследования. Существенное внимание уделяется овладению способами поиска, извлечения, переработки и представления необходимой для творческого процесса информации. С этой целью в учебном процессе используются задания типа:

– провести сравнительный анализ методов решения задач в различные эпохи (по указанию преподавателя или по желанию студента);

– написать реферат по заданной теме с известным, а затем и самостоятельно составленным списком источников;

– написать реферат по свободной теме с целью определения области профессиональных интересов студента для формирования темы курсового, дипломного исследования и т.д.;

– написать аннотацию на книгу по истории математики или журнальную статью и т.п.;

– подготовить выступление (сообщение) по заданной теме;

– подобрать литературу по заданной проблеме;

– составить тест для контроля знаний по указанной теме или по теме, выбранной студентом.

Каждое учебно-исследовательское задание направлено на овладение конкретным набором элементов или видом профессиональной деятельности учителя математики и предполагает освоение студентом исследовательского подхода. Поэтому общая структура выполнения заданий включает в себя осознание (осмысление) задачи; разработку плана ее решения, реализацию плана и анализ полученного решения.

Для развития исследовательских умений поиска и переработки информации у студентов, которые обучались по индивидуальному плану, им давалось задание подготовить творческий отчет, включающий разнообразные задания по различным темам истории математики, который засчитывался как зачет по истории математики.

Заключительной работой по этому направлению является выполнение студентами (по желанию) курсовой работы по методике преподавания математики, связанной с историей развития математики или использованием исторических сведений на уроках математики в школе, которая затем перерастает в квалификационное исследование.

Таким образом, курс истории математики дает широкую возможность эффективной подготовки студентов к профессиональной исследовательской деятельности в рамках традиционной системы методической подготовки будущего учителя математики.

## Библиографический список

1. *Босс В.* Интуиция и математика. М.: Айрис-пресс, 2003. 192 с.

2. *Мадера А.Г.* Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения. Приводящие к ошибочным рассуждениям: Кн. для учащихся 7–11 кл. / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. М.: Просвещение, 2003. 112 с.

3. Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. 384 с.

## Об опыте чтения курса истории математики на физико-математическом факультете Оренбургского университета

*И.К. Зубова*

Понятие "университетское образование студента" предполагает не только наличие определенной суммы знаний в его профессиональной области, но и широкий кругозор, достаточную эрудицию, некоторое представление о науке в целом и о том, какое место занимают точные науки в жизни современного общества. Именно поэтому в учебном плане физико-математического факультета целесообразно предусмотреть чтение гуманитарных курсов, в том числе курса истории математики.

Нередко случается, что студент, даже неплохо справляющийся с требованиями учебной программы, с трудом применяет на практике имеющиеся у него знания, особенно когда в рамках одного предмета сталкивается с проблемой, требующей привлечения сведений из другой дисциплины. Историко-научное образование помогает успешно преодолевать такого рода недостатки, укрепляя межпредметные связи.

Читая в течение многих лет в техническом вузе курсы высшей математики и математического анализа, автору приходилось замечать, что изложение любой сложной темы можно сделать намного доступнее, если во введении или заключении к ней дать обзор истории формирования изучаемой теории. Такие обзоры можно включить и в курс истории математики, если представляется возможность прочитать его параллельно с курсом математического анализа.

В Оренбургском государственном университете, созданном в 1996 году на базе политехнического института, лекции по истории математики читаются с 2003 года. Особенность этого курса состоит в том, что он включен в учебный план первого или второго семестра, тогда как обычно этим курсом завершается образование студентов-математиков. В нашем учебном заведении будущие программисты, изучающие основные математические дисциплины

– алгебру, геометрию, математический анализ – в течение первых трех семестров, параллельно знакомятся с историей этих дисциплин. Курс традиционно называется "История математики и техники", но точнее было бы назвать его "Историческое введение в высшую математику". Из нескольких вариантов построения курса наиболее удачным оказался тот, где на него отводилось 68 часов во втором семестре. Распределение материала по лекционным и семинарским занятиям зависит от подготовленности студентов. В сильных группах, как правило, всегда находятся желающие выбрать тему для самостоятельного изучения и подготовить по ней сообщение, которое затем обсуждается и дополняется на семинарском занятии. В более слабых группах целесообразнее больше времени отвести на лекции.

Первое занятие мы начинаем обычно с беседы об элементарной математике и о тех разделах высшей, с которыми студент уже начал знакомиться в университете. Приходится, к сожалению, констатировать, что во втором семестре студент – первокурсник нередко затрудняется при ответах на вопросы, связанные с основными понятиями математического анализа, хотя в это время уже знаком с основами дифференциального исчисления функции одной переменной. Для того, чтобы систематизировать имеющиеся у него знания, мы знакомим его с периодизацией развития математики, предложенной академиком А.Н. Колмогоровым, которая положена в основу построения всего курса.

Выделив основные черты первого этапа развития математической науки (период зарождения математики), мы останавливаемся на формировании понятия числа, системах счисления, а затем – на математике и технике Древнего Египта и Вавилона. На обсуждение этих тем отводится шесть часов.

Следующие шесть часов посвящаются началу второго этапа развития математики (период математики постоянных величин), общей характеристике математики Древней Греции, школам Фалеса (624–548 до н.э.) и Пифагора (ок. 570–500 до н.э.), геометрической алгебре древних греков и трем знаменитым задачам древности.

Далее десять часов отводятся математике эпохи эллинизма. Здесь целесообразно выделить следующие темы:

1) аксиоматическое построение курса геометрии в “Началах” Евклида (ок. 340–287 до н.э.);

2) возникновение теории конических сечений в трудах Архита (ок. 428–365 до н.э.), Менехма (IV в. до н.э.), Аполлония (вторая половина III в. до н.э.–первая половина II в. до н.э.);

3) жизнь и научное творчество Архимеда (ок. 287–212 до н.э.).

Обсуждая первую из этих тем, мы вспоминаем изученную в средней школе элементарную геометрию – планиметрию и стереометрию. Особое внимание обращаем на постулаты Евклида. Поскольку курс геометрии на нашем факультете не включает подробных сведений о неевклидовых геометриях, мы делаем попытку дать некоторое представление о них в связи с пятым постулатом Евклида.

Лекцию о конических сечениях Аполлония целесообразно прочитать, если к этому времени в курсе геометрии студенты уже познакомились с кривыми второго порядка. Здесь представляется удобный случай напомнить им об основных свойствах указанных кривых и показать связь этих свойств с эллиптической, гиперболической и параболической задачами геометрической алгебры, объяснив при этом происхождение названий “эллипс”, “гипербола”, “парабола”.

Жизни и творчеству Архимеда посвящается семинар, который обычно проходит при большой активности студентов. Но, поскольку в курсе математического анализа они к этому времени еще не подошли к понятию определенного интеграла, занятие имеет скорее общеобразовательный, чем математический характер. К интеграционным методам Архимеда мы возвращаемся позже, рассматривая вопрос о возникновении понятия интеграла в XVII в.

Следующие восемь часов посвящаются математике средневекового Востока. Особое внимание уделяем здесь важнейшим моментам истории арифметики и алгебры – началу широкого применения десятичной позиционной системы счисления с нулем и решению алгебраических уравнений второй степени. В лекции о Самаркандской школе Улукбека (1394–1449) сообщаются сведения об астрономических инструментах дотелескопического периода.

Далее следует беглый обзор математики средневековой Европы и эпохи Возрождения. Эти два занятия (лекционные или семинарские) носят в основном общеобразовательный характер.

Шесть следующих часов посвящены истории развития алгебры. Вначале на семинарском занятии студентам поручается выделить основные этапы формирования этой науки до XVI века, а затем читается лекция, посвященная решению уравнений третьей и четвертой степеней Сципионом дель Ферро (1465–1526), Никколо Тартальей (1499–1557), Джироламо Кардано (1501–1576) и Луиджи Феррари (1526–1565).

Для того, чтобы завершить исторический обзор развития алгебры, приходится, временно отказавшись от хронологического принципа изложения материала, рассказать о попытках разрешения в радикалах алгебраических уравнений более высоких степеней, поисках условий разрешимости этих уравнений и возникшей в связи с этим теорией Эвариста Галуа (1811–1832). Затем дается краткий обзор истории алгебраической символики.

XVII век в истории математики – это начало периода математики переменных величин. Основные темы следующей лекции – общая характеристика науки этого столетия, жизнь и творчество величайших ученых XVII в., предпосылки возникновения дифференциального исчисления. Здесь студентам приходится основательно вспомнить материал курса математического анализа первого семестра.

Далее мы переходим к предпосылкам возникновения интегрального исчисления, начиная с идей Архимеда. К этому времени в курсе математического анализа уже начато ознакомление с понятиями интеграла Ньютона-Лейбница, сумм Дарбу, интеграла Римана, потому полезно проследить предысторию этих понятий. Всего на математику XVII века, предысторию и формирование дифференциального и интегрального исчисления отводится восемь часов.

Математику XVIII века проанализировать не удается прежде всего из-за недостаточности знаний у студентов, которые к этому моменту еще не знакомы ни с теорией рядов, ни с дифференциальными уравнениями. Поэтому оставшиеся восемнадцать часов можно использовать для лекций и семинаров общеобразовательного характера, посвятив их общей характеристике науки XVIII века, событиям, происходившим в это время в России, биографиям выдающихся математиков столетия. Сведения об их научной деятельности имеет смысл перенести в третий семестр, в завершающую часть курса математического анализа. Последнюю его лекцию можно закончить кратким обзором математики первой половины XIX века, а затем – характеристикой начала периода современной математики. При этом мы создадим у слушателей некоторое предварительное представление о тех математических курсах, которые будут читаться в следующих семестрах, – "Дифференциальные уравнения", "Функциональный анализ" и другие.

## О профессиональной направленности курса истории математики в педвузе

*Г.Н. Никитина*

Один из выдающихся математиков XX века, А.Н. Колмогоров выделил четыре периода в истории развития математики: первый период – зарождение математики (от глубокой древности до VI–V вв. до н.э.); второй период – период элементарной математики (от VI–V вв. до н.э. до XVI в.); третий период – период создания математики переменных величин (от XVI в. до середины XIX в.) и четвертый период – современная математика (от середины XIX в. и до наших дней).

Для нас особенно важным является второй период, который стал периодом математики постоянных величин, периодом создания глубокой научной теории. Именно тогда были разработаны все традиционные разделы современной школьной математики, поэтому читаемый нами курс истории математики в основном посвящен данному периоду.

Это в некоторой мере обеспечивает соблюдение принципа профессионально-педагогической направленности при обучении истории математики студентов в педвузе. Основным условием профессиональной направленности в обучении является, как известно, мотивационное обеспечение всей учебной работы и каждой отдельно взятой темы изучаемой дисциплины.

Существуют различные подходы к чтению курса истории математики в педвузе. Мы апробировали два из них: горизонтальный – по основным цивилизациям (Древний Египет, Вавилон, Древняя Греция, эллинистические страны, Китай, Индия, страны ислама) и вертикальный – по содержательно-методическим линиям школьного курса математики. Остановимся более подробно на втором подходе.

Перечень основных содержательно-методических линий школьного курса математики регламентируется программой для общеобразовательной школы, в соответствии с которой рассматриваются следующие содержательные линии:

– числа и величины;

– выражения и преобразования;

– уравнения и неравенства;

– функции;

– геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин.

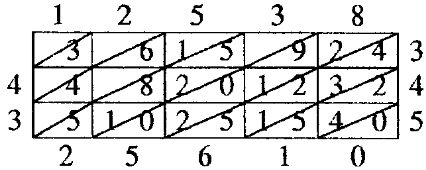
Знакомство студентов с историей развития каждой содержательно-методической линии школьного курса математики и является, на наш взгляд, важной предпосылкой создания положительной мотивации к учению, способствуя развитию у студентов интереса не только к истории математики, но и к самой математике.

Опыт работы показывает, что эффективным средством профессиональной направленности в обучении истории математики является обогащение методической копилки будущего учителя математики интересными историческими задачами и их реконструкциями. Проиллюстрируем это на примерах.

При изложении истории развития содержательно-методической линии "Числа и величины" мы подробно останавливаемся на системах счисления и вычислительной технике у разных народов. Так, на первый взгляд кажется, что рисование египетских иероглифов, таких как мерная палка, путы для стреноживания коров, веревка для обмера полей, цветок лотоса, указательный палец, лягушка, удивленный человек и, наконец, солнце, которые соответствуют числам $10^n$, где $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, является потерей бесценного времени. Однако, как оказалось, именно этот материал во время активной педагогической практики студенты наиболее часто используют на кружковых занятиях по математике с учащимися среднего звена. У учащихся 5–6 классов вызывают интерес не только способы написания чисел у разных народов, но и их вычислительная техника: умножение и деление по-египетски, вавилонские таблицы умножения, индийский алгоритм умножения многозначных чисел и др. При этом учащиеся знакомятся с различными принципами записи чисел: аддитивным, субстрактивным и мультипликативным. Они узнают о различных системах счисления: непозиционных и позиционных, в том числе и о первой в истории науки позиционной вавилонской шестидесятеричной системе счисления. Вместе с тем они знакомятся с историей так называемой арабской системы счисления, которой пользуются в настоящее время большинство народов.

Что касается техники вычислений, то индийский алгоритм умножения никого не оставляет равнодушными: ни студентов, ни учащихся. Напомним этот алгоритм.

Счетную доску, на которой работали индийцы, расчерчивали на сетку прямоугольников, каждый из которых делился пополам диагональю. По сторонам сетки записывали сомножители, промежуточные произведения писали в треугольниках и затем складывали их по диагоналям. В приведенной ниже таблице умножаются числа 12 538 и 345.




Итак, $12538 \cdot 345 = 4325610$.

Содержание данной методической линии также позволяет с исторической точки зрения более глубоко взглянуть на многие математические проблемы. Так, изучение истории развития теории действительного числа от Евдокса (IV в. до н.э.), Евклида (III в. до н.э.), О. Хайяма (XII в.) и ат-Туси (XIII в.) до Р. Дедекинда и К. Вейерштрасса (XIX в.), сравнительный анализ этих теорий, установление аналогий между теориями Евдокса и Дедекинда может служить материалом курсового сочинения. История формирования абстрактного понятия отрицательного числа от математиков Древнего Китая (II в. до н.э.) до Р. Декарта и П. Ферма (XVII в.) также является хорошим материалом для курсовых сочинений по методике преподавания математики.

Другой содержательно-методической линией школьного курса математики, богатой для приложений в будущей профессиональной деятельности, является геометрическая. Опыт работы показывает, что только конкретный фактический материал из курса истории математики дает возможность студенту применить это знание в школе. Начиная с геометрии древних египтян, мы даем студентам не только исторические задачи и их реконструкции с целью подтверждения тех или иных гипотез о математических результатах математиков древности, но и различные гипотезы получения ими всевозможных математических формул. Проиллюстрируем это на гипотезах открытия египтянами точного способа вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием:

$$V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

Как известно, о получении этой формулы в папирусах ничего не сказано. Однако трудно предположить, что она была получена эмпирически. Очевидно, что это можно сделать только логическим путем с использованием геометрических и арифметических рассуждений.

Немецкий историк математики О. Нейгебауэр предложил вывод этой формулы (для усеченной пирамиды частного вида с боковым ребром, перпендикулярным плоскости основания), основанный на разбиении данной пирамиды на четыре многогранника: на параллелепипед, две равных между собой треугольных призмы и четырехугольную пирамиду (рис. 1).

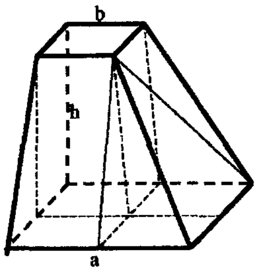


рис. 1

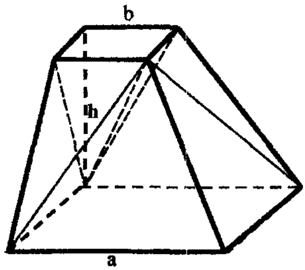


рис. 2

Тогда $V = b^2h + \frac{1}{3}(a-b)^2h + 2\cdot\frac{1}{2}h(a-b)b = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$. При такой реконструкции следует постулировать умение египтян выполнять некоторые алгебраические преобразования, например, знать формулу $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Между тем, явных подтверждений того, что они этим владели, в источниках нет.

Профессор Мордовского университета А.Е. Раик предположила, что этот замечательный результат получен гораздо проще. А именно, разбиением усеченной пирамиды данного вида на четыре пирамиды (рис. 2).

Тогда $V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abh + \frac{1}{3}ha^2 + \frac{1}{3}hb^2 = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$.

Очевидно, что обе гипотезы являются очень интересными способами решения одной и той же геометрической задачи.

Большой интерес вызывает у студентов история теоремы Пифагора и ее многочисленные применения в задачах математиков Древнего Вавилона, Греции, Китая. Различные способы доказательства этой теоремы, в том числе изящное, красивое доказательство по Евклиду, также часто используются студентами на уроках математики во время их педагогических практик. По отзывам самих студентов, привлечение исторического материала на уроках математики вызывает живой интерес у учащихся, а у самих студентов чувство удовлетворенности и радости от первых успехов в педагогической деятельности.

Данная содержательно-методическая линия также содержит много проблем, которые можно вынести на рассмотрение в курсовых сочинениях. К ним относятся:

– история теории параллельных линий от III в. до н.э. до XIX в. (Евклид, ибн-Корра, ал-Хайсам, О. Хайям, ат-Туси, К. Гаусс, Я. Больяи, Н.И. Лобачевский);

– история классических задач на построение: об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга; история числа $\pi$;

– теория конических сечений Аполлония и ее роль в математике и математическом естествознании.

Заметим, что изучение “Начал” Евклида, одного из самых знаменитых произведений античных авторов, нами вынесено на семинарское занятие по истории математики. При этом каждый студент, работая с первоисточником, готовит по индивидуальному заданию сообщение на 5–7 минут. Наиболее интересные и полезные с профессиональной точки зрения вопросы выносятся на обсуждение во время занятия. К таким вопросам относятся: постулаты Евклида, первые три предложения “Начал”, конструктивные задачи абсолютной геометрии, золотое сечение, золотой треугольник, построение правильного пятиугольника, вписанного в круг, и др.

По содержательно-методической линии “Функции” особый интерес вызывают у студентов интегральные и дифференциальные методы в трудах Архимеда. Подробное рассмотрение примера на вычисление площади первого витка спирали (спирали Архимеда) убедительно показывает, что Архимед фактически строил верхние и нижние интегральные суммы, которые мы сейчас называем суммами Римана и Дарбу. Из работы Архимеда “О спиралях” очевидно следует, что он стоял у истоков дифференциального исчисления, и, по-видимому, о нем говорил в XVII веке один из творцов математического анализа И. Ньютон: "Я видел дальше, потому что стоял на плечах гигантов".

При изучении таких содержательно-методических линий, как "Выражения и преобразования", "Уравнения и неравенства", также имеется богатейший материал для методических копилок будущих учителей математики. Это и красивые геометрические доказательства основных алгебраических тождеств, и история происхождения и развития многих математических терминов и математической символики, популярные задачи на арифметические и геометрические прогрессии у математиков Древнего Египта и Вавилона. Особый интерес у студентов вызывают различные методы решения уравнений и систем уравнений у разных народов, в том числе китайский метод "Фан-чэн" решения систем уравнений с числом неизвестных $n \geqslant 2$, который по существу является хорошо известным методом Гаусса с той лишь разницей, что в процессе решения китайским методом осуществляется процедура преобразования столбцов матрицы, а не ее строк.

Интересен пример решения индийского математика Бхаскары II уравнения $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$. Прибавляя к обеим частям данного уравнения выражение $400x + 1 + 4x^2$, он приходит к уравнению $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$.

По истории развития данных содержательно-методических линий хорошим материалом для курсовых сочинений является изучение по первоисточнику геометрической теории кубических уравнений арабских математиков, в том числе О. Хайяма, а также открытия итальянскими математиками С. Ферро, Н. Тартальей и Д. Кардано (XVI в.) алгоритма решения кубических уравнений в радикалах.

Как известно, первое в истории математики дошедшее до нас изложение основ буквенной алгебры содержится в произведении Диофанта "Арифметика" (III в.). Этому произведению также посвящено отдельное семинарское занятие, в процессе подготовки к которому студенты знакомятся не только с началами буквенной символики, но и с методами решения неопределенных уравнений.

Опыт работы показывает, что изложение курса истории математики по содержательно-методическим линиям школьного курса математики с наполнением его содержания конкретными историческими задачами, их решениями и реконструкциями этих решений, а также с показом различных точек зрения, различных способов доказательства одной и той же задачи или теоремы является важным средством осуществления одного из ведущих принципов обучения в педвузе – принципа профессионально-педагогической направленности. Следование этому принципу способствует решению одной из важных задач курса истории математики: создание благоприятствующего эмоционального фона в отношении студентов к профессии учителя математики.

### Библиографический список


1. *Колмогоров А.Н.* Математика // Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. М.: Советская энциклопедия, 1988. С. 7–38.
2. Программно-методические материалы: Математика 5–11 кл.: Сборник нормативных документов / Сост. Г.М. Кузнецова. 3-е изд., стереотип. М.: Дрофа, 2000. 192 с.
3. *Раик А.Е.* Две лекции о египетской и вавилонской математике // ИМИ. 1959. Вып. 12. С. 271–320.
4. *Малаховский В.С.* Избранные главы истории математики: Учеб. издание. Калининград: ФГУИПП "Янтарный сказ", 2002. 304 с.


## Из истории международного движения за реформу математического образования в конце XIX – начале XX века

*Р.З. Гушель*

Как известно, в 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики (МКПМ). Среди целей ее создания было обобщение богатого опыта педагогов разных стран Европы и Северной Америки в деле модернизации школьного математического образования и координация их работы в этом направлении.

Таким образом, 1908 год оказался рубежным в истории международного движения по обновлению школьного математического образования – до этого времени в каждой стране реформы или реформаторские планы были самостоятельными, хотя и не без заимствования в некоторых случаях зарубежного опыта. С 1908 года реформаторское движение приобрело единое направление, которому в большей или меньшей степени следовали все страны, входившие в МКПМ.

Мы, однако, остановимся на периоде, предшествовавшем созданию Комиссии.

К концу XIX века во многих странах начались работы по реформированию средней школы. Интенсивное развитие промышленности требовало большого количества специалистов с высшим и средним естественно-научным и техническим образованием. Классическая гимназия не могла дать соответствующую подготовку своим выпускникам. В связи с новыми задачами школы возникла необходимость реформ всей системы среднего образования. Курса математики эти реформы коснулись не в последнюю очередь.

В Англии на рубеже веков появилось и обрело многочисленных сторонников движение, во главе которого стоял инженер Джон Перри (1850 г.р). Он считал, что школьный курс геометрии должен строиться на опытах и измерениях. Дедуктивному построению курса, по мнению Перри, не место в средней школе. Лабораторный метод Перри предполагал широкое использование таблиц и графиков в арифметике и алгебре. Сторонники этого метода предлагали и понятие функции ввести с помощью графиков. Таким образом осуществлялось слияние всех математических дисциплин в единый учебный предмет [1].

Во Франции в 1902 году был принят и введен новый учебный план. Традиционная элементарная геометрия в этом плане "очень сильно отступает назад перед лицом современных новых идей" [2]. Во главу угла здесь ставится упрощение и большая наглядность преподавания, а также введение в курс средней школы новых разделов, в первую очередь, функций, координат и начал анализа бесконечно малых.

В Италии традиционно считалось, что преподавание геометрии должно вестись в духе "Начал" Евклида. Здесь очень высоко ценилось значение строгого логического построения курса геометрии. Однако к концу XIX века и среди итальянских педагогов возобладали другие взгляды. Усилилось значение наглядности в преподавании, все больше внимания стали уделять приложениям математики.

Остановимся подробнее на России.

Еще в конце XIX века отечественные педагоги начали обсуждать и в печати, и на своих совещаниях и съездах вопросы, связанные как с обновлением содержания школьного математического образования, так и с изменением структуры системы средних учебных заведений. Приведем примеры.

В 1895 году в журнале "Русская мысль" была опубликована большая статья В.П. Шереметевского "Математика как наука и ее школьные суррогаты". Автор был убежден в необходимости обновления школьного курса за счет введения элементов высшей математики. Он писал: "Все, что делает математику основой современного естествознания, все, чем так быстро движется вперед современная техника, все то, что выпало на долю нашей науки в созидании и культуре XIX века – все это заключено в пределах так называемой высшей математики. Не удивительно, что давно уже раздаются голоса за включение ее элементов в программу средней школы" [3].

Годом раньше, в 1894 году, В.Б. Струве в журнале "Техническое образование" писал о необходимости фуркации (профильной дифференциации) старшего звена средней школы и введения в математических классах элементов анализа бесконечно малых.

В 1899 году министр народного просвещения Н.П. Боголепов разослал в учебные округа циркуляр, в котором указывалось на ряд недостатков существовавшей тогда средней школы. Среди них, в частности, отмечались: "отчужденность от семьи и бюрократический характер средней школы,... невнимание к личным особенностям учащихся,... чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников,... несогласованность программ между собою и с учебным временем,... излишнее преобладание древних языков..." [4]. Попечителям предлагалось делегировать опытных педагогов для участия в работе специальной комиссии по средней школе, которая должна была собраться в 1900 году в С.-Петербурге. В циркуляре записано: "Задача комиссии должна будет состоять в том, чтобы: а) обсудить всесторонне существующий строй средней школы с целью выяснить его недостатки и указать меры к их устранению при условии сохранения основ классической гимназии и реального училища как главных типов этой школы в России, и б) если бы при обсуждении первого вопроса возникли предположения о видоизменении существующих типов или о создании какого-либо нового типа, то подвергнуть рассмотрению и эти предложения" [4]. (Здесь и далее речь идет только о мужских школах.)

Некоторые попечители, получив циркуляр, организовали в своих округах совещания по отмеченным в циркуляре вопросам. Так поступил и попечитель Московского учебного округа известный математик, профессор П.А. Некрасов.

На совещаниях в Москве осенью 1899 года были разработаны учебные планы для мужских гимназий шести типов. Такое большое количество типов школ объясняется разной степенью представленности древних языков в их учебных планах. Была предусмотрена и гимназия с фуркацией в старших классах.

Среди вопросов, обсуждавшихся на совещаниях, был вопрос о введении в программу элементов высшей математики. Сам П.А. Некрасов в своем выступлении говорил о необходимости изучения в средней школе элементов теории вероятностей. Выдвигалось предложение об организации в гимназиях лицейских классов для подготовки к поступлению в высшую школу.

И на совещаниях в Москве, и в заседаниях Комиссии в С.-Петербурге обсуждался вопрос о праве реалистов на поступление в университет. Было единодушно решено, что им должно быть это право предоставлено (при поступлении на физико-математический и медицинский факультеты).

Однако большая часть решений Комиссии 1900 года осталась только на бумаге, т.к. в 1901 году Н.П. Боголепов погиб от руки террориста, а его преемник ничего в системе школьного образования менять не стал.

Тем не менее, вопрос о праве реалистов на поступление в университет не был снят с повестки дня. К 1906 году были составлены программы дополнительного класса реальных училищ [5]. Окончание этого класса открывало выпускнику дорогу в университет. Программа по математике содержала большие разделы аналитической геометрии и анализа бесконечно малых. Эта программа была введена с 1907/1908 учебного года, и в соответствии с ней было написано довольно много учебных пособий.

Что касается других решений Комиссии Боголепова, то, возможно, они не были реализованы и потому, что в России в то время не нашлось человека (достаточно авторитетного и в научном, и в педагогическом сообществе и достаточно заинтересованного в том, чтобы эти решения воплотились в жизнь), который бы эту реформу возглавил.

Зато такой человек нашелся среди германских реформаторов. Это был выдающийся немецкий математик и педагог Феликс Клейн (1849–1925).

До 1895 года в Германии существовало несколько групп педагогов, занимавшихся вопросами, связанными с необходимостью реформирования математического образования. Это Союз германских инженеров, Германский союз для развития преподавания математики и естествознания и круги высшей школы, руководимые Ф. Клейном. Около 1895 года эти группы объединились. "Направление реформы должно было заключаться в том, чтобы в преподавании математики получили отражение и ее приложения, а также идеи, лежащие в основе огромных успехов математических наук в XVIII и XIX столетиях, чтобы эти идеи заняли в преподавании то место, которое соответствует их значению в современной культуре" [6]. На съезде германских естествоиспытателей и врачей в

Бреславле в 1904 году была создана специальная комиссия, которой поручалось разработать новые программы по математике для средних учебных заведений всех типов. И уже в 1905 году на очередном съезде в Меране был представлен проект программы по математике для гимназий, получивший название Меранской программы. В 2005 году ей исполняется 100 лет.

Необычайная активность Ф. Клейна в борьбе за обновление курса математики, многочисленные его выступления и в печати, и перед учительской аудиторией, а также его высокий авторитет как ученого первой величины привлекли внимание к этой программе не только в Германии, но и в других странах. И хотя идеи, сформулированные в Меранской программе, не были в педагогическом сообществе новыми, все движение за реформу с этого времени связывается с именем Ф. Клейна. Не случайно на IV Международном математическом конгрессе в Риме при создании МКПМ именно он был приглашен стать ее президентом.

В чем же заключается суть Меранской программы?

В преамбуле к программе составители пишут, в частности: "Надо заботиться о том, чтобы, признавая вполне значение математики для формального развития, тем не менее отказаться от специальных знаний, лишенных практического значения и односторонних, напротив, стараться о возможном развитии способности математического исследования окружающего нас мира явлений. Отсюда вытекают две отдельных задачи: развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению" [7].

Таким образом, во главу угла германские реформаторы ставили построение всего курса математики в средней школе на основе функциональной зависимости, а также усиление межпредметных и внутрипредметных связей при обучении. Значительно усиливается роль наглядности.

На передний план выдвигается возможность применения полученных в курсе математики знаний в различных сферах человеческой деятельности. Усиление внимания к приложениям не означало, однако, понижения требований к уровню строгости в изложении, и это составители отметили особо.

Они также сочли, что учителю должна быть предоставлена свобода "в подробностях преподавания – в изложении материала, распределении работ и прочем, – конечно, в рамках общего учебного плана" [7].

Особенно осторожно отнеслись германские реформаторы к вопросам введения элементов анализа бесконечно малых в курс средней школы. И объем материала, и форму изложения они предоставили на усмотрение преподавателя. В первую очередь, так поступили потому, что дело было новое, опыта работы ни у кого не было. В программе отмечено: "Многочисленные и разнообразные опыты в этом отношении, сделанные в разных учебных заведениях, дадут впоследствии возможность решить с большей уверенностью, как следует организовать это дело" [7].

Что касается конических сечений, то они были включены в программу выпускного класса. В объяснительной записке по этому поводу сказано: "Изложение теории конических сечений следует вести как синтетически, так и аналитически, по возможности, в равной мере" [7].

Систематическому курсу геометрии, начинавшемуся в III классе, программа предпосылает курс пропедевтический во II классе. Объяснительная записка обращает внимание на то, что "в планиметрии, где возможно, следует поддерживать живую связь с соотношениями трехмерного пространства, именно, приводя подходящие примеры из окружающей жизни" [7].

Особое внимание Меранская программа обращает на курс выпускного класса. Для него формулируется такая цель: "научный обзор и приведение в систему приобретенных знаний, способность математического понимания и применение ее для разработки различных вопросов...Все это даст учащимся не только цельное законченное знание математики, но также и почву для дальнейшей работы в области математики, если это потребуется их дальнейшим призванием. Резкий переход от средней школы к высшей, столь заметный сейчас, тогда совершенно исчезнет" [7].

Мы видим, что серьезную и очень не новую проблему подготовленности выпускников средней школы к продолжению образования в школе высшей германские реформаторы предлагали решать через обновление содержания образования и такую организацию обобщающего повторения всего курса в выпускном классе, которая бы сглаживала резкость перехода к высшему образованию.

Итоговую аттестацию выпускников средней школы предлагалось проводить в виде устного и письменного экзамена. Письменный экзамен должен был состоять в следующем: "1) Связное изложение какого-нибудь довольно обширного общего вопроса (по теории) и 2) полное, числовое и графическое, решение какой-нибудь одной задачи" [7].

Сами составители считали Меранскую программу лишь предварительным вариантом, разработанным только для мужских гимназий. Предстояло еще составить аналогичные программы для средних учебных заведений других типов.

Введение новой программы в школу шло довольно медленно, и в разных регионах страны педагоги относились к ней по-разному, несмотря на большую работу и самого Ф. Клейна, и его сторонников по пропаганде новых идей.

А в Европе эти идеи были восприняты с большим интересом. Ф. Клейн становится фактическим лидером международного движения за обновление школьного математического образования.

Прошло 100 лет, и сегодня мы уже не можем себе представить школьный курс математики без функций, координат, элементов анализа бесконечно малых.

## Библиографический список

1. *Бонезен Т.* Реформа преподавания элементарной математики // Вестник опытной физики и элементарной математики. 1908. № 463. С. 157–161.
2. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М., 1987. Т. II.

3. *Шереметевский В.* Математика как наука и ее школьные суррогаты // Русская мысль. 1895. № 5. С. 105–125; Математическое образование. 1999. № 4.
4. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 1.
5. Программа по математике для дополнительного класса реальных училищ // Журнал Министерства народного просвещения. 1907. № 1.
6. *Зейфарт Ф.* Развитие реформы преподавания математики в Германии // Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.-Л., 1933. Т. 1. С. 401–418.
7. *Кеткович Я.* О преподавании математики в прусских гимназиях // Педагогический вестник Московского учебного округа. 1911. № 5–6. С. 24–57.

## К вопросу о преподавании математики в реальных училищах Оренбургского учебного округа

*В.Д. Павлидис*

Развитие средней школы на современном этапе проходит в сложных условиях реформирования всей системы образования. В настоящее время идет поиск оптимальных путей замены прежней школьной системы на новую, ориентированную на обучение и воспитание активной творческой личности.

Необходимость постоянного осмысления происходящего в историческом контексте повышает значимость историко-педагогических исследований. Глубинные изменения в материальной и духовной жизни современного российского общества, одновременно развивающиеся процессы гуманизации и дегуманизации, культурного возрождения и нравственной деградации, инноваций и псевдоинноваций актуализируют необходимость обращения к анализу системы народного образования в нашем государстве до 1917 г.

Сегодня одни учебные заведения, возвращаясь к опыту классической русской гимназии, уделяют повышенное внимание предметам гуманитарного цикла. Другие, следуя примеру реальных гимназий и училищ, усиливают преподавание предметов естественно-математического цикла, особенно математики.

Одним из базовых разделов реального образования является образование математическое. Тенденции в его развитии во многом определяют качество и эффективность всего учебного процесса в школе реальной направленности, что, в свою очередь, достаточно сильно влияет на формирование перспективных направлений развития всей образовательной системы России.

Круг затронутых проблем показывает, что перед отечественной школой сегодня, как и столетие назад, стоят очень трудные и важные задачи, решение которых являлось тогда и является сегодня насущной необходимостью. Развитие реального образования без его резкого противопоставления гуманитарному – одна из основных проблем современной школы.

Подавляющее большинство исследований в области истории среднего математического образования в России в XIX–начале XX века, проводимых ранее, либо посвящено анализу реформ математического образования в целом [1, 2, 11], либо освещает преподавание математики в гимназиях [10, 15, 23, 30, 31], кадетских корпусах [4], коммерческих училищах [3]. Преподавание математики в реальных училищах освещалось чаще всего в связи с реформами средней школы России конца XIX–начала XX века, работой всероссийских съездов преподавателей математики [14, 19, 20]. При этом особенности преподавания математических дисциплин в реальных гимназиях и училищах, его влияние на постановку преподавания математики в классических гимназиях и на развитие всего среднего образования осталось, за редким исключением [24, 25, 29, 32], вне поля зрения исследователей.

В данной статье на примере реальных училищ Оренбургского учебного округа рассматриваются и анализируются основные тенденции в развитии среднего математического образования России конца XIX–начала XX века, и связанный с ними ряд особенностей в постановке преподавания математических дисциплин в реальных училищах этого периода.

Изучение и анализ историко-математических материалов [16–18, 21, 22, 28] позволяют выделить в качестве основных тенденций в развитии среднего математического образования в России в конце XIX–начале XX века следующие: сближение науки и учебного предмета математики; усиление прикладной направленности в обучении математике; модернизация форм и методов обучения математике; специализация и фуркация в старших классах средней школы. Все эти направления достаточно отчетливо проявлялись в организации математических курсов в реальных училищах этого периода.

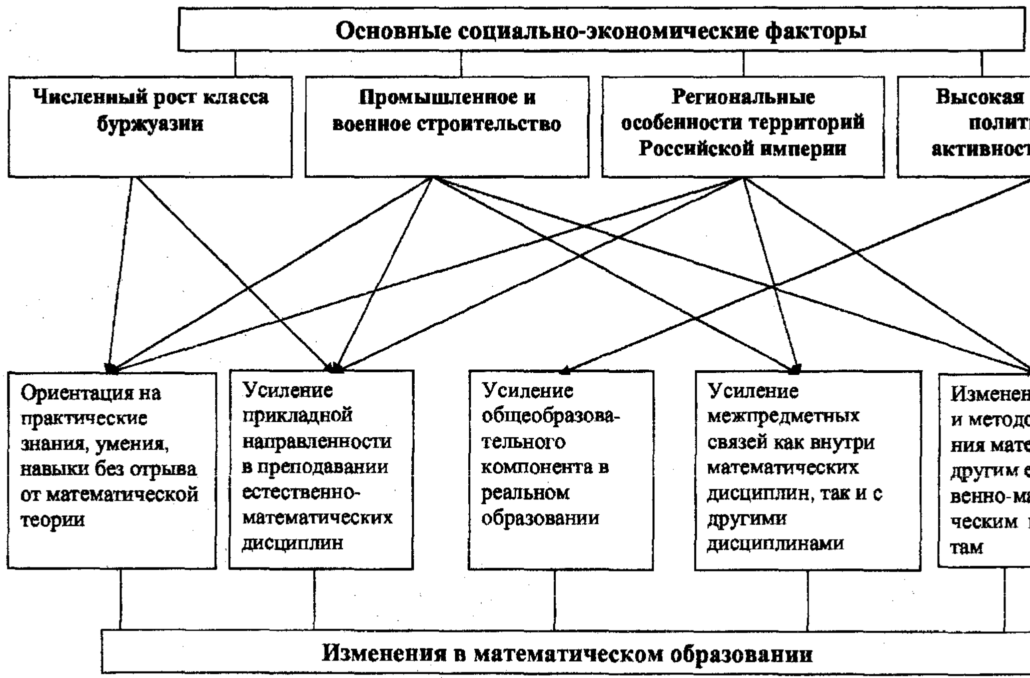
Уровень математического образования в средней школе России в начале XX века как компонент реального образования должен быть оценен как достаточно высокий [24, 25]. Естественно-математические дисциплины составляли фундамент реального образования и являлись полигоном для апробации новых организационно-методических идей, гибко реагируя на изменение социального заказа общества.

Следует отметить ряд несомненных достижений в области математического образования в реальной школе по сравнению с классической гимназией: изучение математики ведется с точки зрения современных теорий; математический аппарат применяется к изучению различных областей знания; усилены внутри- и межпредметные связи как среди математических дисциплин, так и среди дисциплин естественно-математического цикла; усилена практическая направленность в преподавании математики; учтены возрастные и психологические особенности учащихся в процессе преподавания математики.

Влияние социально-экономических факторов на развитие математического образования в реальной школе России в XIX–начале XX века может быть охарактеризовано таблицей.

## Основные социально-экономические факторы, влияющие на развитие математического образования в реальной школе России в XIX–начале XX века

*Таблица*



Особым фактором развития образования на Южном Урале стала организация Оренбургского учебного округа. В 1873 г. Министр народного просвещения Д.А. Толстой предложил царю образовать новый Оренбургский учебный округ, в который вошли бы Оренбургская, Пермская, Уфимская, Вятская губернии. Через год округ был создан, но Вятская губерния туда не вошла.

Развитие среднего звена образовательной системы в Оренбургском учебном округе во второй половине XIX–начале XX вв. шло в том же направлении, в котором развивалась средняя школа всей дореволюционной России. Оно выразилось в количественном росте числа учебных заведений, увеличении контингента учащихся, появлении новых типов общеобразовательных и специальных учебных заведений, более рациональном размещении их по территории губернии и т.п.

Формирование сети реальных училищ в Оренбургском учебном округе проходило под воздействием различных факторов и во многом учитывало региональные особенности края.

Быстрое развитие промышленности, ее растущие потребности в квалифицированных кадрах провоцировали активный рост числа реальных училищ в крупных городах и увеличение их концентрации в северных и северо-восточных частях региона. Огромная площадь учебного округа и различный уровень социально-экономического развития различных его областей приводили к определенной специализации в подготовке выпускников реальных училищ. Удаленность от столицы и постоянно растущая потребность в специалистах различного профиля на местах также способствовали увеличению числа реальных училищ в крае.

Отсутствие университета в округе приводило к тому, что на должности преподавателей средних учебных заведений, в том числе и реальных училищ, присылались выпускники Казанского, Московского, Петербургского, Дерптского, Варшавского, Киевского университетов. Это способствовало тому, что представители различных направлений в преподавании математики тесно взаимодействовали и взаимообогащали свой методико-математический багаж.

Наличие хорошей материальной базы, активная поддержка представителями государственной власти и общественности новых идей в преподавании математики [6, 9, 27] создали необходимые условия для реализации в реальных училищах Оренбургского учебного округа основных направлений реформирования среднего математического образования. Одной из ведущих в деятельности преподавателей-математиков реальных училищ округа стала идея усиления практической направленности в преподавании математических дисциплин, укрепления его связи с жизнью и потребностями региона. Огромный промышленный потенциал и заинтересованность местной власти вели к широкому распространению в реальных училищах округа экскурсионного и лабораторного методов.

Эти методы, удовлетворяющие требованиям жизни и педагогической науки в начале XX века, нашли отражение в постановке преподавания математических дисциплин в реальных училищах.

Их основные достоинства, как отмечали педагоги того времени, состояли в следующем: 1) приучают ученика воспринимать и анализировать конкретные признаки явлений; 2) помогают пробудить интерес ученика к знаниям; 3) помогают развитию сосредоточенности и серьезного отношения к делу, изощряют наблюдательность и внимание, повышают активность; 4) приучают к работе в коллективе, координируя деятельность вокруг центральной общей цели.

Педагогическая задача лабораторных занятий определялась как дальнейшее расширение и углубление принципа наглядности в обучении, в том, что они способствуют отчетливому усвоению и прочному запоминанию изучаемого материала, в том, что они будят интерес к предмету, учат сознательно координировать свою интеллектуальную деятельность с деятельностью органов внешнего восприятия, прививают ценные практические навыки.

Особенностью проведения лабораторных занятий в реальных училищах Оренбурга и Перми было то, что опыты и наблюдения производились не для подтверждения заранее высказанных предположений, а наоборот, эти последние выводились из опытов и наблюдений учащихся.

Применение лабораторного метода в реальной школе преследовало двоякую цель: с одной стороны, дать конкретные представления и укрепить в сознании детей проходимый ими курс, а с другой – приучить их к самостоятельности, к умению без посторонней помощи решить проблему.

Учащимся предлагалось выполнять лабораторные работы в классе на моделях, картах, планах и т.п. и связывать с измерениями и вычислениями. При этом различали два вида таких работ в зависимости от их назначения: познавательные и прикладные.

К познавательным относили такие лабораторные работы, которые ставят целью познакомить школьников с новым для них математическим фактом. В прикладных лабораторных работах реалисты учились применять математические знания к конкретным задачам, связанным, например, с измерениями на моделях геометрических тел и вычислениями их площадей поверхностей, объемов или с измерениями на карте и вычислениями расстояний (при изучении числового масштаба) и т.п. К практическим работам относятся и работы на местности. Такие работы часто сочетались с экскурсией.

Экскурсионная деятельность рассматривалась преподавателями математики реальных училищ округа как метод педагогической работы, позволяющий:

– получить знания в результате возникших у ребенка вопросов, требующих разрешения их путем активной деятельности;

– проиллюстрировать и подтвердить знания, получаемые учащимися в процессе школьных занятий, а также дать материал для последующих уроков и практических заданий.

Метод учебных экскурсий реализовывал выполнение двух основных принципов обучения – наглядности и самодеятельности и широко применялся в обучении математике в Оренбургском реальном училище [12, 13, 26].

Новые формы организации учебной работы в реальных училищах округа: лабораторные занятия, экскурсии – способствовали индивидуализации учебно-воспитательной работы и конкретному руководству в развитии самодеятельности учащихся, повышали работоспособность учащихся в учебном процессе.

Новые методические приемы и находки в преподавании математики находили свое отражение и в учебно-методической литературе, публикуемой преподавателями реальных училищ округа.

В начале XX века в практике реальных училищ стали часто применяться дополнительные звенья процесса обучения: внеклассная работа. Заинтересованность преподавателей и учащихся реальных училищ находила реализацию в кружковой и индивидуальной работе по математике.

Эта работа была предназначена для любителей математики и находилась в определенной взаимосвязи с обязательным учебным процессом. Эффективная постановка последнего создавала достаточный контингент настоящих любителей математики, что позволяло в случае необходимости отобрать наиболее способных, а также создать основу для успешной работы, благодаря хорошему знанию обязательного курса и наличию навыков самостоятельного творческого мышления.

Так, в Оренбургском реальном училище на протяжении свыше пятнадцати лет активно функционировал открытый математический кружок. Его членами в разное время были не только преподаватели и учащиеся этого учебного заведения, но и учителя гимназий, кадетских корпусов, воспитанники этих заведений [5, 7, 8].

Здесь учили методам и приемам поиска путей решения и применению их в самостоятельной работе учащихся, рассматривали занимательные вопросы и задачи, периодически заслушивали информационные сообщения, доклады. Введение кружков было тесно связано с идеей фуркации – дифференцированного обучения, учитывающего индивидуальные способности учащихся.

Математический кружок издавал журнал, который на протяжении многих лет пользовался широкой известностью в городе.

Здесь публиковались как доклады преподавателей, так и результаты проводимых под их руководством самостоятельных исследований учеников [7, 8]. Многие преподаватели-члены кружка вели индивидуальную работу с заинтересованными и способными реалистами, направляли их изыскания, помогали проделывать сложнейшие выкладки.

Таким образом, на примере реальных училищ Оренбургского учебного округа мы видим, как основные направления реформы среднего математического образования претворялись в жизнь. Многое из достигнутого может быть востребовано и на нынешнем этапе реформирования среднего математического образования.

## Библиографический список


1. *Волнистова З.И.* Движение за реформу средней школы (классической и реальной) в России в конце революции 1905 г. М., 1936.
2. *Ганелин Ш.И.* Очерки по истории средней школы в России 2 половины XIX в. М.: Учпедгиз, 1954. 304 с.
3. *Гольтиков В.Ф.* Из истории развития передовых идей в преподавании математики в России // В помощь учителю математики. Челябинск, 1974. Вып. 7. С. 17–26.
4. *Гольтиков В.Ф.* О преподавании математики в военных гимназиях и кадетских корпусах России // Уч. записки Свердловского педагогического института. 1973. Вып. 6. С. 52–59.
5. Дополнительные сведения к отчету о деятельности реального училища за 1905–1906 учебный год. Уфа, 1906.
6. Журналы I, II совещания по народному образованию при Оренбургской губернской земской управе в 1915 г. Оренбург, 1915.
7. Записки математического кружка при реальном училище (1–8). Оренбург, 1906.
8. Записки математического кружка при реальном училище (1–8). Оренбург, 1907.

9. Исторический очерк народного образования в Оренбургском учебном округе за первое 25-летие его существования (1875–1899) / Сост. В.Е. Игнатьев. Оренбург, 1901.

10. *Кондратьева М.А.* Российская гимназия: исторический опыт и современные проблемы // Современные проблемы истории образования и педагогической науки. Монографический сборник: В 3-х тт. // Под ред. З.И. Равкина. М.: ИТП и МИО РАО, 1994. Т.2. С. 18–32.

11. *Константинов Н.А.* Очерки по истории средней школы. М.: Учпедгиз, 1956. 246 с.

12. Краткий отчет о состоянии Оренбургского реального училища за 1900–1901 гг. Оренбург, 1901.

13. Краткий отчет о состоянии Оренбургского реального училища за 1901–1902 гг. Оренбург, 1902.

14. *Кузьмин Н.Н.* Основные вопросы реформы средней общеобразовательной школы (гимназий и реальных училищ) в период нового революционного подъема и первой мировой войны // Уч. зап. МОПИ им. Н.К. Крупской. 1958. Т. 68. Вып. 6. С. 93–131.

15. *Купинская Е.В.* Проблемы реформы средней общеобразовательной школы в деятельности Министерства народного просвещения России в конце XIX–начале XX в. М., 1999. 159 с.

16. Материалы по преобразованию средней школы, переданные из МНП в Ученый комитет: проекты уставов; доклады комиссий; отзывы печати, различных ведомств, попечителей различных советов; очерки состояния средней школы за границей и т.п. РГИА. Ф. 734, оп. 5, д. 64, л. 7–42, 49, 69, 111–178, 235.

17. Материалы по проектам реформы средней школы. РГИА. Ф. 1152, д. 173, л. 580.

18. Материалы по реформе средней школы. Пг., 1915.

19. *Метельский Н.В.* Очерки истории методики математики. Минск: Вышейшая школа, 1968. 340 с.

20. *Никитин Н.И.* Съезды преподавателей математики России. Историко-библиографический очерк // Изв. АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 84–93.

21. Новые учебные планы и предметные программы классических гимназий и прогимназий с новыми объяснительными записками Министерства народного просвещения, вышедшими к Уставу дополнениями по распоряжению об улучшениях состава учеников. М.: Тип. П.М. Мартынова, 1891. 120 с.

22. О некоторых изменениях в постановке преподавания предметов в средних учебных заведениях. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1488, л. 47.

23. Очерки истории и педагогической мысли народов СССР. Конец XIX–начало XX в. / Под ред. Э.Д. Днепрова, С.Ф. Егорова, Ф.Г. Паначина, Б.К. Тебиева. М.: Педагогика, 1991. 448 с.

24. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. М.: Изд-во МГУ, 2001. 627 с.

25. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. II. Век девятнадцатый. Ростов-н/Д: Изд-во РГПУ, 2001. 324 с.

26. Приложение к краткому отчету о состоянии Оренбургского реального училища за 1903–1904 гг. Оренбург, 1904.

27. Протоколы первого съезда директоров гимназий и реальных училищ Оренбургского учебного округа (24–29 сентября 1912 г.). Уфа, 1912.

28. Реформа средней школы, общие основания и вопросы. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1182, л. 73.

29. *Синюшина И.В.* Реальное образование в России в XIX–начале XX века. М., 2000. 158 с.

30. *Скрипченко С.Н.* Развитие государственного гимназического образования в России в конце XIX–начале XX века. Брянск, 2000. 205 с.

31. *Фадеева Т.Ю.* Средние учебные заведения в системе образования России второй половины XIX в.–начале XX в. Ярославль, 2000. 238 с.

32. *Чувашев Е.П.* История реальных училищ в России. М., 1938.

## Сведения об авторах

1. Абрамов Александр Михайлович – чл.-корр РАО, кандидат педагогических наук, советник издательства "Просвещение", Москва.

2. Аверинцев Михаил Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.

3. Ануфриенко Сергей Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель ЯрГУ, Ярославль.

4. Афанасьев Владимир Васильевич – доктор педагогических наук, профессор, ректор ЯГПУ, Ярославль.

5. Беляева Эмма Степановна – кандидат педагогических наук, доцент Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.

6. Богун Виталий Викторович – аспирант ЯГПУ, Ярославль.

7. Большаков Юрий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.

8. Бурлакова Татьяна Вячеславовна – кандидат педагогических наук, доцент Шуйского государственного педагогического университета, Шуя.

9. Бычков Сергей Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.

10. Вавилов Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.

11. Голиков Алексей Иннокентьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Москва.

12. Городенцев Алексей Львович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института теоретической и экспериментальной физики, Москва.

13. Гусев Валерий Александрович – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.

14. Гушель Ревекка Залмановна – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.

15. Демидов Сергей Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором Института истории естествознания и техники РАН, Москва.

16. Дондукова Надежда Николаевна – аспирантка МПГУ, Москва.

17. Епифанова Нина Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.

18. Епишева Ольга Борисовна – доктор педагогических наук, профессор Тюменского института нефти и газа, Тюмень.

19. Зверкина Галина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.

20. Зотиков Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Мурманского государственного педагогического университета, Мурманск.

21. Зубова Инна Каримовна – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.

22. Ивашев-Мусатов Олег Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.

23. Каминский Тадеуш Эдуардович – кандидат физико-математических наук, доцент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.

24. Капустина Татьяна Васильевна – доктор педагогических наук, профессор Елабужского государственного педагогического университета, Елабуга.

25. Карпов Борис Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского института электроники и математики, Москва.

26. Корикова Тамара Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.

27. Крюкова Анастасия Леонидовна – аспирантка Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.

28. Кулешов Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент Военно-Воздушной Академии, Москва.

29. Кучугурова Нина Дмитриевна – доктор педагогических наук, профессор Ставропольского государственного университета, Ставрополь.

30. Локоть Наталья Васильевна – доцент Мурманского государственного педагогического университета, Мурманск.

31. Луканкин Геннадий Лаврович – доктор педагогических наук, член-корреспондент РАО, профессор МГОУ, Москва.

32. Майоров Вячеслав Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.

33. Медведева Людмила Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.

34. Никитина Галина Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент Нижегородского государственного педагогического университета, Нижний Новгород.

35. Никулина Елена Вячеславовна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель ЯрГУ, Ярославль.

36. Онищик Аркадий Львович – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.

37. Осташков Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.

38. Павлидис Виктория Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного аграрного университета, Оренбург.

39. Потапов Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, профессор Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.

40. Потоскуев Евгений Викторович – кандидат физико-математических наук, профессор Тольяттинского государственного университета, Тольятти.

41. Райхштейн Борис – профессор Католического университета, Вашингтон, США.

42. Розов Николай Христович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАО, профессор МГУ, Москва.

43. Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.

44. Рудаков Алексей Николаевич – доктор физико-математических наук, заведующий отделением НИИ системных исследований РАН, Москва.

45. Сергеева Татьяна Федоровна – доктор педагогических наук, профессор Академии социального управления, Москва.

46. Симонов Рэм Александрович – доктор исторических наук, профессор Российской государственной Академии печати, Москва.

47. Синкевич Галина Ивановна – старший преподаватель С.-Петербургского архитектурно-строительного университета, С.-Петербург.

48. Смирнов Евгений Иванович – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.

49. Суворова Мария Александровна – старший преподаватель ЯГТУ, Ярославль.

50. Суслова Ирина Васильевна – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.

51. Тестов Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.

52. Тихомиров Владимир Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.

53. Титоренко Светлана Александровна – кандидат педагогических наук, доцент Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.

54. Трофимец Елена Николаевна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель ЯГТУ, Ярославль.

55. Трофимец Валерий Ярославович – кандидат технических наук, доцент ЯВФЭУ, Ярославль.

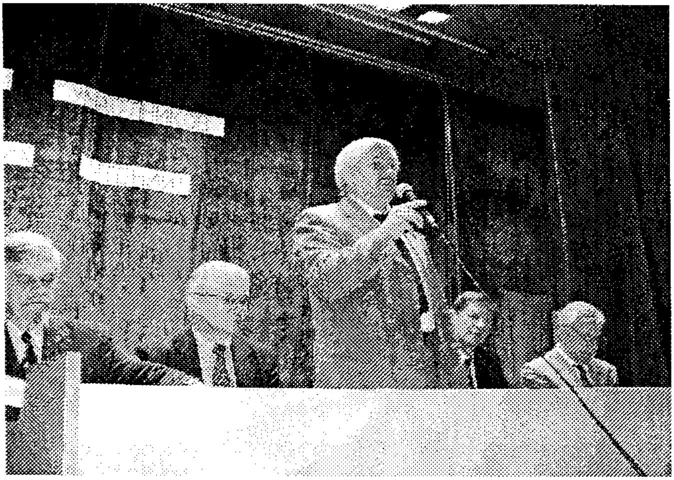
56. Чанков Евгений Игоревич – магистрант ЯрГУ, Ярославль.

57. Шевченко Виктория Михайловна – аспирантка МПГУ, Москва.

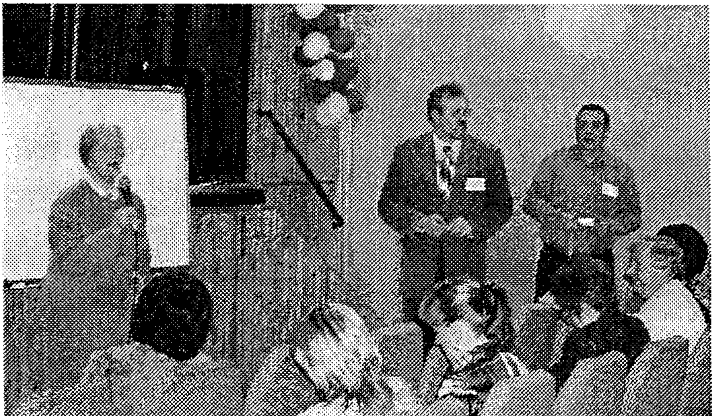
58. Щетников Андрей Иванович – заместитель директора по науке Центра образовательных проектов "Пифагор", Новосибирск.

Это Ярославль!

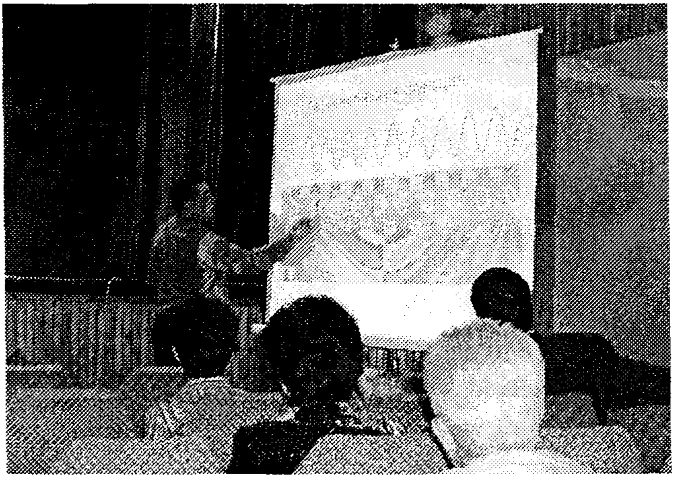
Ректор ЯГПУ профессор В.В. Афанасьев рассказывает редактору газеты "Математика" В.Т. Лисичкину об истории Колмогоровских чтений



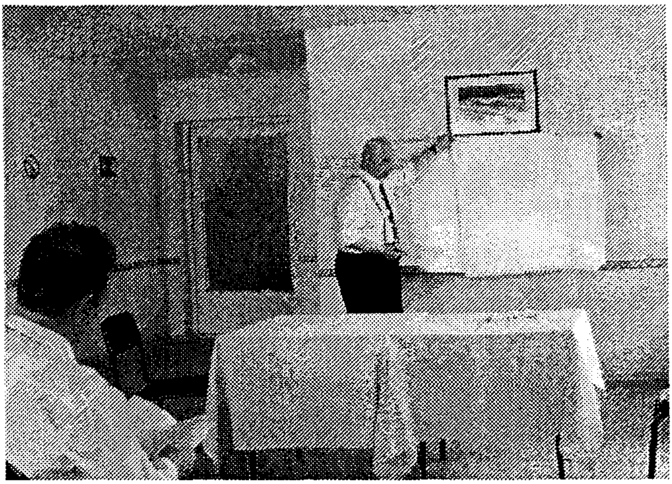
В президиуме (слева направо) В.М. Тихомиров, С.С. Демидов, В.В. Афанасьев, Е.И. Смирнов, А.М. Абрамов



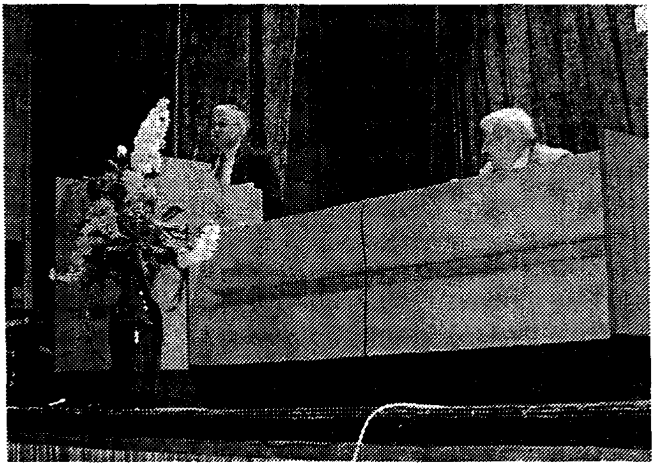
Выступает академик РАО Н.Ф. Талызина



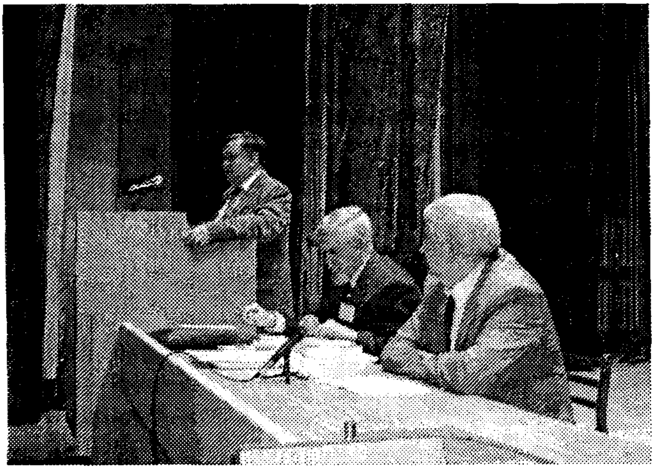
Доцент из Тюмени В.Н. Останков выступает с докладом о вейвлетах



Выступает доцент из Москвы О.С. Ивашев-Мусатов



Пленарный доклад профессора С.С. Демидова из Москвы



Выступает профессор В.А. Гусев из Москвы

**Труды третьих Колмогоровских чтений**

Редактор *Л.К.Шереметьева*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л.Трошиной*

Подписано в печать 15.08.2005. Формат 60×90 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Заказ 709. Тираж 200.

Редакционно-издательский отдел Ярославского государственного
педагогического университета имени К.Д.Ушинского
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44