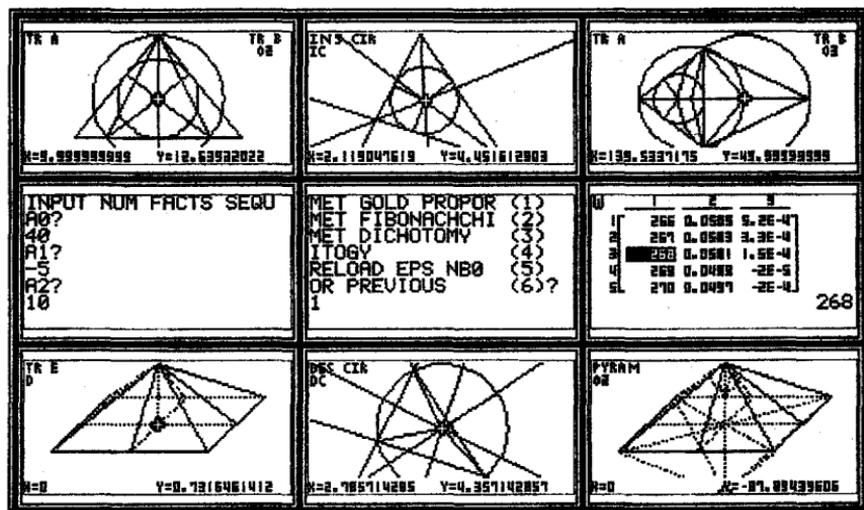


В. В. Богун, Е.И. Смирнов

Использование графического калькулятора в обучении математике



Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ярославский государственный
педагогический университет им. К.Д. Ушинского»

В. В. Богун, Е. И. Смирнов

**Использование графического калькулятора
в обучении математике**

Учебное пособие

Ярославль
2008

УДК 51:372.8
ББК 22.1р30
Б 748

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ имени К.Д. Ушинского

Рецензент:

кандидат физико-математических наук, доцент
Татьяна Львовна Трошина

Б 748 **Богун В.В., Смирнов Е.И.**

Использование графического калькулятора в обучении математике
[Текст]: учеб. пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – 231 с.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности “Математика. Оно включает рассмотрение графического калькулятора в качестве компактного средства реализации информационно-коммуникационных технологий, описание и методику проведения лабораторного практикума по численным методам в математике, практических занятий по аналитической геометрии на плоскости и факультатива по исследованию геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве с использованием графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*.

В описании каждого из разделов в развернутом виде присутствуют такие важные составляющие, как теоретический аспект, включающий необходимые математические выкладки, описание этапов проведения занятий в ракурсе методики их реализации и описание разработанных автором программ на графическом калькуляторе в сопровождении необходимых инструкций для пользователя.

Учебное пособие будет полезно учителям математики, а также студентам педвузов и школьникам, интересующимся применением малых форм информатизации в математике.

УДК 51:372.8
ББК 22.1р30

Научный редактор:

доктор педагогических наук,
профессор Аркадий Львович Жохов

ISBN 978-5-87555-390-2

© ГОУ ВПО “Ярославский
государственный педагогический
университет им.

К.Д. Ушинского”, 2008

© Богун В.В., Смирнов Е.И., 2008

Содержание

Введение.....	5
1. Лабораторный практикум по численным методам в математике с использованием графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS.....	17
<i>1.1. Лабораторная работа № 1.....</i>	<i>20</i>
1.1.1. Теоретический аспект.....	20
1.1.2. Описание этапов проведения лабораторной работы.....	36
1.1.3. Описание программы с примером.....	39
<i>1.2. Лабораторная работа № 2.....</i>	<i>47</i>
1.2.1. Теоретический аспект.....	47
1.2.2. Описание этапов проведения лабораторной работы.....	54
1.2.3. Описание программы с примером.....	57
<i>1.3. Лабораторная работа № 3.....</i>	<i>65</i>
1.3.1. Теоретический аспект.....	65
1.3.2. Описание этапов проведения лабораторной работы.....	76
1.3.3. Описание программы с примером.....	78
<i>1.4. Лабораторная работа № 4.....</i>	<i>86</i>
1.4.1. Теоретический аспект.....	86
1.4.2. Описание этапов проведения лабораторной работы.....	94
1.4.3. Описание программы с примером.....	96

2. Практические занятия по аналитической геометрии на плоскости с использованием графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS.....	104
2.1. <i>Определение и визуализация геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости.....</i>	<i>105</i>
2.1.1. Теоретический аспект.....	105
2.1.2. Описание этапов проведения практических занятий.....	130
2.1.3. Описание программы с примером.....	131
3. Факультатив по исследованию геометрических свойств равнобедренных треугольников и правильных четырехугольных пирамид с использованием графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS.....	144
3.1. <i>Исследование геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости.....</i>	<i>145</i>
3.1.1. Теоретический аспект.....	145
3.1.2. Описание этапов проведения факультативных занятий.....	160
3.1.3. Описание программы с примером.....	161
3.2. <i>Исследование геометрических свойств правильных четырехугольных пирамид в пространстве.....</i>	<i>196</i>
3.2.1. Теоретический аспект.....	196
3.2.2. Описание этапов проведения факультативных занятий.....	205
3.2.3. Описание программы с примером.....	206
Заключение.....	229
Библиографический список.....	231

Введение

При рассмотрении процесса обучения студентов математических специальностей педагогических вузов как будущих преподавателей математики в школах, его задач, планирования, технологий в рамках информатизации образования следует исходить из необходимости в новых и оптимальных методах, средствах и формах обучения, способствующих профессионализации и формированию целостной системы научных и методических знаний, творческой активности.

В силу появления новых типов учебных заведений и новых форм обучения основными задачами педагогических вузов являются следующие:

1. Подготовка учителя, способного к проявлению творческой интеллектуальной активности и обладающего высоким уровнем гуманитарной культуры, профессионального, вооружённого новейшими методиками и технологиями обучения, идеями опережающего отражения.
2. Обеспечение приоритетного развития системы образования для своевременной подготовки специалистов с учетом быстро изменяющихся, во-первых, социально-экономических факторов различной природы и, во-вторых, характера взаимоотношения людей и информации, которая становится основным стратегическим ресурсом.

В настоящее время вопрос о корректном использовании в образовательном процессе информационно-коммуникационных технологий является актуальным. Внедрение информационно-коммуникационных технологий в процесс обучения предоставляет хорошие возможности для повышения, во-первых, мотивации к учебной деятельности, во-вторых, эффективности решения учебных и научно-исследовательских задач будущего учителя математики.

Благодаря богатому спектру функционального оснащения использование информационно-коммуникационных технологий в учебном процессе представляет новые возможности повышения мотивации в решении проблем математического образования будущего учителя.

Перспективным направлением технологизации математического образования представляется использование графических калькуляторов в обучении предметам естественно-математического цикла как в сочетании с компьютерными математическими системами (КМС), так и с полной их заменой непосредственно на занятиях по

математике в силу компактности размеров и независимости источников питания.

Графические калькуляторы целесообразно использовать в процессе обучения математике на всех образовательных уровнях как параллельно с применением программных педагогических продуктов и компьютерных математических систем, так и при их полном отсутствии, в силу компактности, автономности и мобильности графических калькуляторов, наличия необходимого и вполне достаточного для реализации широкого круга методических и дидактических функций и решения математических и прикладных задач функционального оснащения.

Использование графического калькулятора в обучении математике состоит в усилении технологической и профессионально-математической подготовки учителя математики через призму рассмотрения непосредственного использования графических калькуляторов на практических, лабораторных и факультативных занятиях по математике параллельно с теоретическим освоением определенной темы и визуализацией рассматриваемых проблем с предшествующим построением предметной, математической и информационной моделей с использованием навыков наглядного моделирования исследуемых явлений и процессов.

Графические калькуляторы как яркие представители информационно-коммуникационных технологий в обучении математике могут применяться для организации практикумов по решению нестандартных задач, математических экспериментов, проектной деятельности учащихся, при этом их использование способствует формированию навыков самостоятельной работы обучающихся, развитию творческого мышления, повышению алгоритмической культуры учащихся и эстетическому развитию.

Для применения графического калькулятора при решении математических задач необходимо, прежде всего, ознакомить учащихся с графическими калькуляторами в ракурсе использования в обучении информационно-коммуникационных технологий, представив краткий сравнительный анализ некоторых моделей графических калькуляторов и детальный обзор функциональных возможностей оптимально выбранного, по мнению авторов, графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* с реализацией необходимых примеров и указаний.

Таким образом, основной целью использования графических калькуляторов в обучении математике является исследование сложных явлений и процессов в рамках реализации межпредметных связей через

призму построения различных концептуальных, математических и информационных моделей в сочетании с наглядностью, удобством пользования и возможностями непосредственного сравнительного анализа различных методов решения, промежуточных и итоговых результатов.

Для решения задач, отражающих основную цель обозначенного нововведения, необходимо подробно ознакомить студентов с возможностями решения математических задач через реализацию соответствующих программ в рамках представленного в графическом калькуляторе режима программирования.

Однако для полноценного освоения режима программирования необходимо предварительно получить соответствующие навыки по построению блок-схем и составлению листингов простых программ с целью визуализации основных программных единиц, на основе которых возможна полноценная реализация взаимосвязанных программных структур для выполнения реальных проектов по определенной математической тематике.

При использовании в обучении математике графического калькулятора возможны различные способы применения данного технического средства обучения и одновременно объекта изучения в рамках широко применяемого во всех сферах обучения метода проектов:

- ✓ использование вычислительных, символьных, графических и программных функций для организации математических экспериментов;
- ✓ математическое моделирование реальных явлений и процессов с применением различных функций графического калькулятора;
- ✓ разработка собственных проектов.

Графические калькуляторы могут применяться для организации

- ✓ практических занятий, факультативов и лабораторных практикумов по решению нестандартных математических задач;
- ✓ математического эксперимента;
- ✓ организации проектной деятельности учащихся.

При обучении математике с использованием графических калькуляторов необходимо создавать определенные дидактические условия. В частности, при проведении лабораторных, практических или факультативных занятий с использованием графических калькуляторов необходимо придерживаться следующих образовательных целей:

- ✓ развитие алгоритмического мышления при решении математических задач;

- ✓ формирование понятия о математическом моделировании, рассмотрение его роли в природе и науке;
- ✓ развитие творческого мышления учащихся;
- ✓ формирование навыков самостоятельной деятельности, интереса к исследовательской работе;
- ✓ развитие эстетической культуры учащихся.

При использовании графических калькуляторов в обучении математике должны решаться следующие задачи:

- ✓ вычислительные (наличие циклов);
- ✓ алгоритмические (навигация внутри программы);
- ✓ задачи визуализации (графическая интерпретация расчетов);
- ✓ сущностные или дидактические (математические, информационные или иные задачи).

Дидактические проблемы, возникающие при использовании графического калькулятора, связанные с рациональным и корректным применением подобного технического средства обучения, с одной стороны, и объекта изучения, с другой, в процессе обучения математике, можно объединить при рассмотрении следующих требований к условиям интеграции математических и информационных знаний в процессе творческого освоения студентами трудоемких разделов математики:

- ✓ требования оперативности выбора и принятия решения (высокая скорость вычислений, конкретно-деятельностная активность);
- ✓ требования наглядного моделирования (графическое представление полученных результатов, фиксация и алгоритмизация промежуточных действий, взаимопереходы знаковых систем, понимание процесса решения задачи и структуры появления новых знаний);
- ✓ требования творческой активности (возможности оперативного изменения начальных условий и получения результатов с целью последующего анализа);
- ✓ требования визуализации основных этапов постановки проблемы и ее решения.

Отметим некоторые пользовательские особенности графических калькуляторов:

1. Наличие большого количества встроенных функциональных возможностей, что приближает их к персональным компьютерам с такими установленными на них системами компьютерной математики, как MATHCAD, MATLAB, МАТЕМАТИКА и т. д.

2. Возможность совместимости с персональным компьютером. Предусмотрено подключение калькуляторов к персональному компьютеру (хранение библиотек программ и данных с возможностью экспорта-импорта по взаимосвязанной цепи “графический калькулятор – персональный компьютер”, распечатка листинга программ, снятие копий с экрана калькулятора, замена и обновление программного обеспечения через Интернет).
3. Меньшие по сравнению с персональным компьютером габариты (карманные размеры).
4. Длительное время работы от батарей, что обуславливает удобство эксплуатации в условиях отсутствия близкого доступа к силовой сети и необходимости длительной работы от автономных источников электропитания (в школе, в университете, в самолете и т. д.).
5. Более низкая по сравнению с персональными компьютерами стоимость машинного времени.
6. Превосходство над компьютерами по мобильности и удобству пользования.
7. Низкая стоимость графических калькуляторов (100 – 200\$) по сравнению с персональными компьютерами (от 500\$).
8. Отсутствие вредного для здоровья человека излучения дисплея.
9. Абсолютная бесшумность в процессе работы.
10. По сравнению с малогабаритными ноутбуками, графические калькуляторы имеют значительный выигрыш как в цене, так и в энергопотреблении.
11. Возможность соединения как двух, так и нескольких калькуляторов в локальную сеть (организация учебного процесса на основе графических калькуляторов представлена на Интернет-сайтах корпораций CASIO и Texas Instruments).
12. Возможность подключения графического калькулятора к проектору для получения увеличенного изображения с дисплея калькулятора, что актуально в процессе обучения.

Важной педагогической мотивацией использования графических калькуляторов корпорации *CASIO* является их официальная рекомендация для применения в системе российского образования, вследствие чего последние имеют широкое распространение.

Достоинства графических калькуляторов фирмы *CASIO*:

- ✓ тщательно сбалансированный подбор средств, ориентированных на решение типовых задач пользователя;

- ✓ удобный и интуитивно понятный пользовательский интерфейс, основанный на многочисленных меню;
- ✓ наличие трехцветного дисплея у некоторых моделей;
- ✓ минимальные энергозатраты в сочетании с длительным сроком работы от батарей;
- ✓ наличие русскоязычной инструкции для калькуляторов, продаваемых на территории России.

Недостатки графических калькуляторов фирмы *CASIO*:

- ✓ отсутствие средств решения дифференциальных уравнений (кроме рассматриваемой в данном пособии модели);
- ✓ отсутствие средств трехмерной графики;
- ✓ отсутствие средств символьной математики (кроме рассматриваемой в данном пособии модели);
- ✓ отсутствие блокировки автоматического выключения и частичная потеря информации при выключении (кроме рассматриваемой в данном пособии модели).

Рассматриваемый в представленном пособии графический калькулятор *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* (рис. 1) имеет следующие технические характеристики:

1. 1095 встроенных функций.
2. 144 Кб основной памяти.
3. 768 Кб флэш-памяти.
4. Большой точно-матричный дисплей (128х64 точек).
5. Карманные размеры и прочный корпус со сдвижной крышкой.
6. Возможность обмена информацией с графическим калькулятором или персональным компьютером.
7. Возможность апгрейда программного обеспечения.
8. Наличие главного меню с пиктограммами для выбора необходимого режима работы.

Большое количество встроенных функций тщательно оптимизировано для быстрого и наглядного доступа. Монохромный дисплей калькулятора и 17-позиционное начальное графическое меню гармонично сочетаются с изысканным графическим манипулятором овальной формы с выгравированными в нем стрелками-треугольниками, указывающими на направление перемещения маркера или выделений в меню.

С клавиатуры калькулятора имеется возможность как прямого доступа к командам, операциям и функциям, так и через системы следующих меню (включая оконные):

- *OPTN* – меню опций (расширенных операций);
- *VARS* – меню переменных;

- *PRGM* – меню программных расчетов;
- *SET UP* – меню установочного экрана;
- *V-Window* – меню просмотра параметров графиков;
- *MENU* – основное меню режимов работы калькулятора.

Перечислим составляющие меню режимов работы калькулятора *MENU* с названиями и описанием назначения:

1. *RUN-MATrix* – выполнение арифметических операций и расчетов функций, а также расчетов с использованием значений чисел в двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатеричной системах счисления и матриц.
2. *STATistics* – проведение статистических расчетов с одной переменной (среднеквадратичное отклонение) и двумя переменными (регрессия), а также анализ данных и построение статистических графиков.
3. *GraPH-TaBLE* – запись в память функций, создание числовых таблиц, содержащих решения функций, полученных в результате присвоения различных значений переменным данным функций, а также построение графиков.
4. *DYNAmic graph* – запись в память графических функций и многократное построение графиков функций путем изменения значений переменных (построение динамических графиков).
5. *RECURsion* – сохранение рекуррентных формул, создание числовых таблиц, содержащих решения функций, полученных в результате присвоения различных значений переменным данным функций, построение соответствующих графиков.
6. *CONICS* – построение графиков неявных функций.
7. *EQUation* – решение систем линейных уравнений с количеством неизвестных от двух до тридцати и уравнений высокой степени (от 2 до 30).
8. *PRoGraM* – ввод, редактирование и запуск программ.
9. *Computer Algebra System* – компьютерная алгебраическая система – выполнение алгебраических расчетов.
10. *ALGEBRA* – пошаговое решение выражений.
11. *TUTORial* – определение типа выражения и способа решения, а также интерактивное решение уравнений.
12. *Time Value of Money* – оперирование финансовыми функциями с последующей визуализацией.
13. *DIFFerential Equation* – решение дифференциальных уравнений.
14. *E-CON* – операции приема-передачи данных между двумя графическими калькуляторами.

15. *LINK* – пересылка содержимого памяти или резервной копии данных на внешнее устройство.
16. *MEMORY* – управление хранящимися в памяти данными, определение объема использованной и свободной памяти, удаление данных из памяти и инициализация калькулятора (переустановка исходных параметров).
17. *SYSTEM* – инициализация памяти, регулировка контрастности и выполнение иных системных настроек.

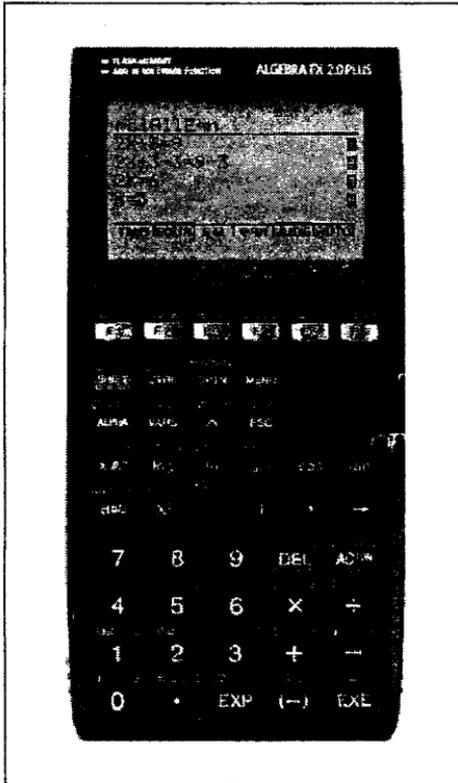


Рис. 1. Графический калькулятор CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS

Большое количество встроенных функций тщательно оптимизировано для быстрого и наглядного доступа. Монохромный дисплей калькулятора и 17-позиционное начальное графическое меню гармонично сочетаются с изысканным графическим манипулятором овальной формы с выгравированными в нем стрелками-

треугольниками, указывающими на направление перемещения маркера или выделений в меню.

Компактные габариты графического калькулятора и, как следствие, его дисплея являются серьезной проблемой для обучения работе на нем. Для ее решения фирмами-изготовителями графических калькуляторов разработаны специальные проекционные комплекты для работы в классе (рис. 2), благодаря которым преподаватель, манипулируя графическим калькулятором, может проецировать изображение с экрана калькулятора на большой экран.

В графическом калькуляторе имеется большое количество встроенных математических функций, однако стоит отметить, что для полноценного решения сложных математических задач, связанных с наглядным моделированием, необходимо использование стандартных функций калькулятора в различных комбинациях и сочетаниях. Для реализации подобных проектов в калькуляторе имеется режим программирования *PRoGraM (PRGM)*.

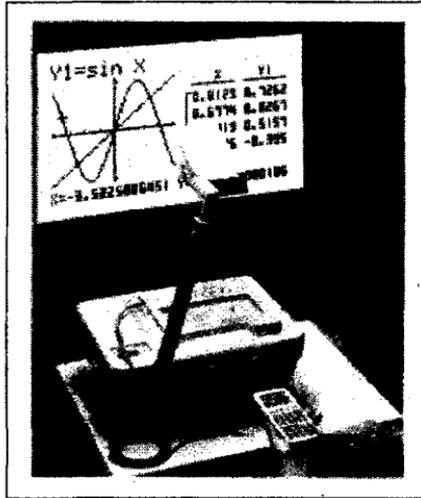


Рис. 2. Проекционный комплект CASIO RM-9000 для работы в классе

Особенность работы в режиме программирования заключается в наличии возможности манипулировать всем набором стандартных функций, причем в качестве связующего звена используется язык, аналогичный Бейсику, только немного упрощенный с целью более простого написания программ и экономии памяти калькулятора.

Именно благодаря режиму программирования у студентов появляются, во-первых, простор для креативной деятельности с целью

наглядного моделирования реальных процессов и явлений, во-вторых, определенные навыки программирования на примерах составления программ для решения отдельных математических или иных задач с реализацией в программах простого и удобного многофункционального графического интерфейса.

При проведении сравнительного анализа популярных компьютерных математических систем (Derive, MathCAD, Mathematica, Maple) и графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* можно сформулировать ряд определенных выводов, свидетельствующих о целесообразности активного использования графических калькуляторов в образовательной деятельности:

1. Функциональное оснащение графического калькулятора практически не уступает в комплектации каждой из указанных компьютерных математических систем.
2. Коммуникационные возможности графического калькулятора позволяют выполнять взаимопересылку необходимых данных на сторонние внешние устройства, в том числе и персональный компьютер, подобно взаимопересылке результатов, полученных в процессе работы в компьютерных математических системах с помощью внешних носителей информации.
3. Графические калькуляторы, благодаря наличию узкоспециализированной операционной системы, исключают возможность серьезных переработок встроенного программного обеспечения, обеспечивая надежность и эффективность работы независимо от внешних факторов (перепады напряжения, габариты персональных компьютеров с установленными компьютерными математическими системами).
4. Разительно более низкая стоимость машинного времени графических калькуляторов по сравнению со стоимостью персональных компьютеров с установленными на них компьютерными математическими системами в сочетании с отсутствием вредного излучения дисплея и абсолютной бесшумностью в работе.
5. Идеально сбалансированная, не перегруженная и интуитивно понятная логическая система меню графического калькулятора практически не уступает, а иногда и превышает в удобстве пользования графические интерфейсы компьютерных математических систем.
6. Реализация функциональных локальных сетей и вывода изображений на внешние устройства, в том числе и на персональный компьютер, присуща как графическим

калькуляторам, так и персональным компьютерам с установленными на них компьютерными математическими системами с возможностью обмена данными и апгрейда программного обеспечения.

На данном фоне наблюдаются положительные тенденции к росту использования графических калькуляторов в образовательном процессе в силу наличия интеграции во встроенном программном обеспечении следующих возможных режимов работы (разнятся в зависимости от модели и фирмы-производителя):

1. Режимы выполнения арифметических расчетов с использованием различных систем счисления, функций, матриц, графический и аналитический анализ различных статистических расчетов.
2. Режимы построения и аналитического анализа статических, динамических, неявных функций и рекуррентных формул.
3. Режимы решения линейных уравнений с большим количеством неизвестных, систем линейных уравнений, дифференциальных уравнений.
4. Репетиторские режимы – пошаговое решение выражений, определение типа выражения и способа решения, а также интерактивное решение уравнений.
5. Режим полноценного программирования на языках, аналогичных Basic или Pascal, с возможностью оперирования всем имеющимся арсеналом встроенных математических и иных функций.
6. Режим выполнения различных математических расчетов в привычном символьном виде (CAS).
7. Возможности оперирования 2D и 3D-графикой.
8. Режим выполнения финансовых расчетов.
9. Режимы приема-передачи данных, пересылка содержимого памяти или резервной копии данных как между двумя графическими калькуляторами, так и с использованием внешнего устройства (на персональный компьютер имеется возможность снятия копии с экрана графического калькулятора).
10. Режимы настройки графического калькулятора и управления содержимым встроенной памяти.

Исходя из вышперечисленного, можно сделать вывод о целесообразности использования графических калькуляторов в процессе обучения математике на всех образовательных уровнях как параллельно с применением программных педагогических продуктов и

компьютерных математических систем, так и при их полном отсутствии в силу, во-первых, компактности, автономности и мобильности графических калькуляторов, во-вторых, наличия необходимого и вполне достаточного для выполнения и решения широкого круга методических и дидактических функций и задач функционального оснащения.

Благодаря всестороннему использованию графических калькуляторов в силу их доступности, удобства пользования и наличия большого количества функций возможно добиться существенно нового уровня качества предлагаемых образовательных услуг.

Таким образом, в процессе обучения учащиеся ознакомятся с принципиально новым методическим подходом к организации учебной деятельности благодаря возможности использовать графический калькулятор непосредственно на учебных занятиях по различным предметам в рамках реализации межпредметных связей.

1. Лабораторный практикум по численным методам в математике с использованием графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS

В данной главе представлен разработанный В.В. Богуном лабораторный практикум по численным методам в математике для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности "Математика", включающий описание четырех лабораторных работ с рассмотрением соответствующих авторских программ для графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS и методики их использования.

Основная цель лабораторного практикума состоит в использовании графического калькулятора как средства интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных алгоритмов, суть которых заключается в построении и визуализации итерационных процессов, сходящихся к искомому решению.

Названия лабораторных работ с указанием наименований программ и соответствующих разделов высшей математики:

1. Расчет значений минимальных номеров приближения к пределу

числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для

$\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с использованием методов

золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии и их сравнительный анализ (программа "MINNESQS", раздел "Пределы и непрерывность").

2. Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций и их сравнительный анализ (программа "APROXEQU", раздел "Дифференциальное исчисление").
3. Приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) и их сравнительный анализ (программа "APROXINT", раздел "Интегральное исчисление").
4. Приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутты второго, четвертого порядков точности и их сравнительный анализ (программа "APROXDFF", раздел "Дифференциальные уравнения").

Содержание и структура лабораторных работ:

1. Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики.
2. Цель работы.
3. Теоретический аспект.
4. Описание этапов проведения лабораторной работы.
5. Описание программы с примером.

Цели и задачи лабораторных работ:***1. Математические:***

- ✓ исследование функциональных зависимостей;
- ✓ освоение численных методов решения математических задач;
- ✓ сравнительный анализ эффективности вычислительных процедур.

2. Информационные:

- ✓ освоение функциональных возможностей графического калькулятора (функции, опции, режимы, коммуникации);
- ✓ освоение среды программирования графического калькулятора;
- ✓ навыки создания алгоритмов, блок-схем и программ для решения математических задач.

3. Личностные:

- ✓ развитие математической, информационной и алгоритмической культуры студентов;
- ✓ творческая активность (анализ результатов с выдвижением и проверкой гипотез, варьирование данных, оптимизация мыслительных процессов);
- ✓ коммуникативная и ролевая деятельность студентов в процессе интеграции знаний, умений и навыков на примере изучения математики в малых группах с использованием информационных технологий;
- ✓ мотивация к изучению математических и информационных дисциплин.

4. Профессиональные:

- ✓ наглядное моделирование объектов и процессов;
- ✓ визуализация итерационных процессов;
- ✓ интеграция математических и информационных процессов;
- ✓ управление процессами познавательной деятельности учащихся.

Методика проведения лабораторных работ:

1. Актуализация знаний и контроль теоретических аспектов и практических навыков по использованию графического калькулятора.
2. Формулировка названия, цели и плана проведения лабораторной работы.
3. Рассмотрение реализации решения математической задачи на показательном примере.

4. Распределение студентов на малые группы (по 3-4 человека) с целью анализа различных вариантов исходных данных.
5. Наглядное моделирование и решение предлагаемой математической задачи с применением трех численных методов на основе интеграции математических и информационных знаний с использованием графического калькулятора.
6. Рефлексия и проведение сравнительного анализа полученных результатов с целью формулирования выводов и проверки гипотез.
7. Оформление лабораторной работы с последующим представлением преподавателю.
8. Презентация результатов.
9. Индивидуальные собеседования или проверочное тестирование.

Основные особенности представленных в лабораторных работах авторских программ:

1. Реализация принципа сохранения значений исходных данных и результатов расчетов в соответствующих матрицах (в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix").
2. Реализация принципа сохранения значений промежуточных вычислений в соответствующих последовательно идущих списках (в режиме выполнения статистических расчетов "STATistics").
3. Интеллектуальная и удобная в использовании система навигации внутри программы в виде совокупности последовательных меню с корректной обработкой ошибок ввода необходимых параметров.
4. Возможность варьирования различных параметров и исходных данных непосредственно при работе внутри программы.
5. Возможность проведения статистического (сравнительного) анализа получаемых при реализации различных численных методов решения математических задач промежуточных вычислений (итоговых результатов) после окончательного выполнения программы (в процессе или после окончательного выполнения программы).

Преимущества использования графического калькулятора при проведении предлагаемых лабораторных работ:

1. Мобильность и автономность использования в сочетании с низким энергопотреблением.
2. Автоматизация выполнения большого количества необходимых рутинных однообразных вычислений при решении математических задач на основе применения численных методов с возможностью проведения статистических расчетов после окончательного выполнения программы.
3. Автоматизация выполнения сравнительного анализа результатов, полученных в процессе реализации численных методов решения

математических задач, непосредственно как внутри программы, так и после ее окончательного выполнения.

4. Автоматизация проведения необходимых расчетов в результате варьирования значений исходных данных.

1.1. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики: расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых

последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$,

$b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции,

Фибоначчи, дихотомии и их сравнительный анализ (программа "MINNESQS", раздел "Пределы и непрерывность").

Цель работы: реализовать расчет значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида

$x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) на основе

расчетов значений минимальных номеров с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "MINNESQS".

1.1.1. Теоретический аспект

Число A называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число n_ε , такое, что для любого $n > n_\varepsilon$ верно неравенство: $|x_n - A| < \varepsilon$.

Рассмотрим числовые последовательности вида:

$$x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0},$$

где $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ – целые числа, причем $a_2 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$.

Пределом числовых последовательностей является отношение:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{a_2}{b_2}.$$

Необходимо реализовать расчет значений минимальных номеров n_ε числовых последовательностей $\{x_n\}$ по заданным $\varepsilon > 0$, таких, что для всех членов числовых последовательностей со значениями номеров $n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ в соответствии с различными условиями варьирования значений исходных данных.

Рассмотрим функцию $|f(n)| = |x_n - A|$:

$$|f(n)| = \left| \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| = \left| \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2 (b_2 n^2 + b_1 n + b_0)} \right|.$$

От рассмотрения функции $|f(n)|$ перейдем к рассмотрению функции $f(n)$ (экстраполируя $f(n)$ на положительную R^+), так как график функции $|f(n)|$ отличается от графика функции $f(n)$ (в смысле выяснения особенностей, то есть действительных точек разрыва и экстремума) только появлением дополнительной действительной угловой точки графика на оси абсцисс:

$$f(n) = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2 (b_2 n^2 + b_1 n + b_0)}.$$

Для определения действительных точек разрыва функции $f(n)$, то есть действительных точек несуществования функции $f(n)$, необходимо решить уравнение $b_2 n^2 + b_1 n + b_0 = 0$ ($b_2 \neq 0$ в силу существования предела последовательности).

В силу решения квадратного уравнения возможны следующие варианты наличия у функции $f(n)$ действительных точек разрыва

$$(D_{BP} = b_1^2 - 4b_0 b_2):$$

1. Если $D_{BP} < 0$, то функция $f(n)$ не имеет действительных точек разрыва и непрерывна на всей числовой оси.
2. Если $D_{BP} = 0$, то функция $f(n)$ имеет одну действительную точку

$$\text{разрыва со следующим значением абсциссы: } n_{BP} = \frac{-b_1}{2b_2}.$$

3. Если $D_{BP} > 0$, то функция $f(n)$ имеет две действительные точки разрыва со следующими значениями абсцисс:

$$n_{BP1, BP2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{D_{BP}}}{2b_2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0 b_2}}{2b_2}.$$

Для определения действительных точек экстремума функции $f(n)$, то есть действительных точек, в которых данная функция имеет максимум

или минимум, необходимо решить уравнение $f'(n)=0$ и выявить характер действительных критических точек.

$$f'(n) = \frac{1}{b_2} \left(\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)n + a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} \right)' =$$

$$= \frac{1}{b_2} \left(\frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(b_2 n^2 + b_1 n + b_0) - ((a_1 b_2 - a_2 b_1)n + a_0 b_2 - a_2 b_0)(2b_2 n + b_1)}{(b_2 n^2 + b_1 n + b_0)^2} \right) =$$

$$= \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)n^2 + 2(a_2 b_0 - a_0 b_2)n + (a_1 b_0 - a_0 b_1)}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}.$$

В силу решения квадратного уравнения, левая часть которого представлена в числителе, а именно $(a_2 b_1 - a_1 b_2)n^2 + 2(a_2 b_0 - a_0 b_2)n + (a_1 b_0 - a_0 b_1) = 0$, и влияния знаменателя возможны следующие варианты наличия у функции $f(n)$ действительных критических точек $(D_{EP} = 4(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 - 4(a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_1 b_0 - a_0 b_1))$, причем $b_2 \neq 0$ в силу существования предела последовательности:

1. Если $D_{EP} < 0$, то функция $f(n)$ не имеет действительных критических точек.
2. Если $D_{EP} = 0$, то функция $f(n)$ должна иметь одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы: $n_{EP} = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$.

Действительно, если $D_{EP} = 0$, то есть $(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 = (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_1 b_0 - a_0 b_1)$, и $n_{EP} = \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2}$, то получим:

$$(a_2 b_1 - a_1 b_2)n_{EP}^2 + 2(a_2 b_0 - a_0 b_2)n_{EP} + (a_1 b_0 - a_0 b_1) =$$

$$= (a_2 b_1 - a_1 b_2) \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right)^2 + 2(a_2 b_0 - a_0 b_2) \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right) +$$

$$+ (a_1 b_0 - a_0 b_1) = -\frac{(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} + (a_1 b_0 - a_0 b_1) =$$

$$= -(a_1 b_0 - a_0 b_1) + (a_1 b_0 - a_0 b_1) = 0.$$

Однако при соблюдении предлагаемых договоренностей имеем:

$$\begin{aligned} b_2 n_{EP}^2 + b_1 n_{EP} + b_0 &= b_2 \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right)^2 + b_1 \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right) + b_0 = \\ &= b_2 \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} + b_1 \left(\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \right) + b_0 = \\ &= \frac{a_1 b_0 b_2 - a_0 b_1 b_2 + a_0 b_1 b_2 - a_2 b_0 b_1 + a_2 b_0 b_1 - a_1 b_0 b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если $D_{EP} = 0$, то $b_2 n_{EP}^2 + b_1 n_{EP} + b_0 = 0$, что противоречит условию существования производной функции $f'(n)$, то есть при данных условиях функция $f(n)$ не имеет действительных критических точек.

3. Если $D_{EP} > 0$, то функция $f(n)$ должна иметь две действительные критические точки со следующими значениями абсцисс:

$$\begin{aligned} n_{EP1, EP2} &= \frac{2(a_0 b_2 - a_2 b_0) \pm \sqrt{D_{EP}}}{2(a_2 b_1 - a_1 b_2)} = \\ &= \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 \pm \sqrt{(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_1 b_0 - a_0 b_1)}}{a_2 b_1 - a_1 b_2}. \end{aligned}$$

- 3.1. Если при $n_{EP1} = \frac{2(a_0 b_2 - a_2 b_0) + \sqrt{D_{EP}}}{2(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$ получим, что

$b_2 n_{EP1}^2 + b_1 n_{EP1} + b_0 = 0$, то функция $f(n)$ имеет только одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы:

$$\begin{aligned} n_{EP} = n_{EP2} &= \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0 - \sqrt{(a_2 b_0 - a_0 b_2)^2 - (a_2 b_1 - a_1 b_2)(a_1 b_0 - a_0 b_1)}}{a_2 b_1 - a_1 b_2}. \end{aligned}$$

- 3.2. Если при $n_{EP2} = \frac{2(a_0 b_2 - a_2 b_0) - \sqrt{D_{EP}}}{2(a_2 b_1 - a_1 b_2)}$ получим, что

$b_2 n_{EP2}^2 + b_1 n_{EP2} + b_0 = 0$, то функция $f(n)$ имеет только

одну действительную критическую точку со следующим значением абсциссы:

$$n_{EP} = n_{EP1} = \frac{a_0b_2 - a_2b_0}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{\sqrt{(a_2b_0 - a_0b_2)^2 - (a_2b_1 - a_1b_2)(a_1b_0 - a_0b_1)}}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

3.3. Если при $n_{EP1}, n_{EP2} = \frac{2(a_0b_2 - a_2b_0) \pm \sqrt{D_{EP}}}{2(a_2b_1 - a_1b_2)}$ получим, что

$b_2n_{EP1,EP2}^2 + b_1n_{EP1,EP2} + b_0 \neq 0$, то функция $f(n)$ имеет две действительные критические точки со следующими значениями абсцисс:

$$n_{EP1,EP2} = \frac{a_0b_2 - a_2b_0}{a_2b_1 - a_1b_2} \pm \frac{\sqrt{(a_2b_0 - a_0b_2)^2 - (a_2b_1 - a_1b_2)(a_1b_0 - a_0b_1)}}{a_2b_1 - a_1b_2}$$

Нахождение действительной угловой точки осуществляется в результате анализа функции $|f(n)|$:

$$|f(n)| = \left| \frac{a_2n^2 + a_1n + a_0}{b_2n^2 + b_1n + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| = \left| \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)n + a_0b_2 - a_2b_0}{b_2^2n^2 + b_1b_2n + b_0b_2} \right|$$

Действительная угловая точка означает пересечение графика функции $|f(n)|$ с осью абсцисс, то есть точку, в которой график функции резко меняет направление в силу зеркального отображения отрицательных областей графика функции $f(n)$ относительно оси абсцисс.

Для определения действительной угловой точки функции $|f(n)|$, то есть точки, в которой функции $|f(n)|$ и $f(n)$ пересекают ось абсцисс, необходимо решить уравнение $f(n) = 0$:

$$f(n) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)n + a_0b_2 - a_2b_0}{b_2(b_2n^2 + b_1n + b_0)}$$

В силу решения линейного уравнения, левая часть которого представлена в числителе, а именно $(a_1b_2 - a_2b_1)n + a_0b_2 - a_2b_0 = 0$, и влияния знаменателя возможны следующие варианты наличия у

$b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) в зависимости от различных значений ε , n_{A0} и n_{B0} , заложенных в программу "MINNESQS".

Метод золотой пропорции

Суть золотой пропорции, изображенной на рис. 3, состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать золотую пропорцию, то A , деленное на B , будет равно C , деленному на A .

Символьная запись: $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989$.

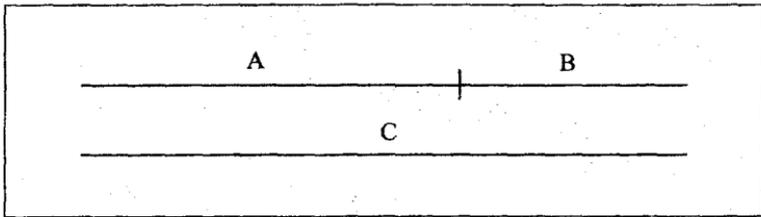


Рис. 3. Золотая пропорция

Действительно, пусть $\frac{C}{A} = \frac{A}{B} = X$.

Так как $A+B=C$, то есть $\frac{A}{A} + \frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, то получим квадратное уравнение:

$$1 + \frac{1}{X} = X \Rightarrow X^2 - X - 1 = 0.$$

Положительный действительный корень квадратного уравнения:

$$X = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989.$$

По аналогии с пропорцией назовем число φ золотым.

Отметим некоторые алгебраические свойства золотого числа:

1. Золотое число, возведенное в степень с натуральным показателем, равно сумме двух золотых чисел, возведенных в степени с последовательно предшествующими искомому показателями: $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$.

Действительно, так как $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, то $\varphi^2 = \varphi + 1$, то есть $\varphi^{N-2} \cdot \varphi^2 = \varphi^{N-2} \cdot \varphi + \varphi^{N-2}$, откуда $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$.

Поскольку $\varphi^N = \varphi^{N-1} + \varphi^{N-2}$, то $\varphi^N = \varphi^{N+2} - \varphi^{N+1}$, откуда можно получить следующие соотношения:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = 2 - \varphi, \quad \frac{1}{\varphi^3} = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi^2} = 1 - \frac{2}{\varphi^2} = \frac{2}{\varphi} - 1 = 2\varphi - 3.$$

2. Если каждый член геометрической прогрессии X_N ($X_1 \neq 0, q \neq 0$) равен сумме двух предыдущих, то ее знаменатель q равен золотому числу, то есть φ :

$$X_{N+2} = X_{N+1} + X_N \Rightarrow X_{N+2} = X_{N+1} \cdot \varphi = X_N \cdot \varphi^2.$$

Поскольку $X_{N+2} = X_{N+1} \cdot q = X_N \cdot q^2$, то $q^2 = q + 1$, откуда $q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Так как $q > 0$, то $q = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$.

В данной лабораторной работе метод золотой пропорции ("METHOD OF GOLD PROPORTION") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":

- 1.1. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP} , исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^{GP} < n_{D0}^{GP} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^{GP})| > |f(n_{D0}^{GP})| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^{GP} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi^2} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi},$$

$$n_{D0}^{GP} = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{\varphi^2}.$$

- 1.2. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^{GP} и n_{D0}^{GP} округляются до ближайших больших целых чисел.

1.3. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{GP} = 0$ и в качестве минимального номера n_ε^{GP} выбирается $n_\varepsilon^{GP} = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.

1.4. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

2.1. Если $|f(n_{C(N-1)}^{GP})| < \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{A(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP}$,

$$n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^2}, \text{ и получаем}$$

$$\text{отрезок } [n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}] = [n_{A(N-1)}^{GP}, n_{C(N-1)}^{GP}].$$

2.2. Если $|f(n_{C(N-1)}^{GP})| \geq \varepsilon$ и $|f(n_{D(N-1)}^{GP})| < \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{C(N-1)}^{GP}$,

$$n_{BN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP}, \quad n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP} - n_{C(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^3}, \text{ и получаем отрезок}$$

$$[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}] = [n_{C(N-1)}^{GP}, n_{D(N-1)}^{GP}].$$

2.3. Если $|f(n_{D(N-1)}^{GP})| \geq \varepsilon$, то $n_{AN}^{GP} = n_{D(N-1)}^{GP}$, $n_{BN}^{GP} = n_{B(N-1)}^{GP}$,

$$n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = n_{B(N-1)}^{GP} - n_{D(N-1)}^{GP} = \frac{n_{B(N-1)}^{GP} - n_{A(N-1)}^{GP}}{\varphi^2} \text{ и получаем}$$

$$\text{отрезок } [n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}] = [n_{D(N-1)}^{GP}, n_{B(N-1)}^{GP}].$$

2.4. На отрезке $[n_{AN}^{GP}, n_{BN}^{GP}]$ при соблюдении условий $n_{AN}^{GP} < n_{BN}^{GP}$

и $|f(n_{AN}^{GP})| \geq \varepsilon > |f(n_{BN}^{GP})|$ выбираются точки с абсциссами

n_{CN}^{GP} и n_{DN}^{GP} , исходя из неравенств $n_{AN}^{GP} < n_{CN}^{GP} < n_{DN}^{GP} < n_{BN}^{GP}$ и

$|f(n_{AN}^{GP})| > |f(n_{CN}^{GP})| > |f(n_{DN}^{GP})| > |f(n_{BN}^{GP})|$, в соответствии с

принципами золотой пропорции, согласно следующим соотношениям:

$$n_{CN}^{GP} = n_{AN}^{GP} + \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi^2} = n_{BN}^{GP} - \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi},$$

$$n_{DN}^{GP} = n_{AN}^{GP} + \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi} = n_{BN}^{GP} - \frac{n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP}}{\varphi^2}.$$

- 2.5. При наличии положительных дробных частей значения n_{CN}^{GP} и n_{DN}^{GP} округляются до ближайших больших целых чисел.
- 2.6. Если достигнута истинность выражения $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{GP} = N$ и в качестве минимального номера n_ε^{GP} выбирается $n_\varepsilon^{GP} = n_{AN}^{GP}$ в силу неравенства $\left| f(n_{AN}^{GP}) \right| \geq \varepsilon > \left| f(n_{BN}^{GP}) \right|$.
- 2.7. Если $n_{BN}^{GP} - n_{AN}^{GP} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Фибоначчи

Последовательность чисел Фибоначчи (открыта Леонардо Фибоначчи) отличается от других последовательностей чисел тем, что каждый ее член, начиная со второго по индексу, равен сумме двух предыдущих (с добавлением нулевого члена последовательности): 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 и так далее.

Действительно: $0+1=1$, $1+1=2$, $2+1=3$, $3+2=5$, то есть $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, где F_K , F_{K-1} и F_{K-2} — члены последовательности Фибоначчи с индексами "K", "K-1" и "K-2" соответственно.

Интересно отметить, что отношение значений соседних членов данной последовательности, начиная с больших номеров (при $K \rightarrow \infty$), приближается к золотому числу, то есть φ :

$$\frac{F_K}{F_{K-1}} \approx \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618033989,$$

где F_K и F_{K-1} — члены последовательности Фибоначчи с индексами "K" и "K-1" соответственно.

Для золотых чисел, возведенные в определенные степени (геометрическая прогрессия со значениями начального члена и знаменателя, равными φ), как и для последовательности чисел Фибоначчи, справедливо общее правило о том, что значение каждого

члена любой из этих последовательностей равно сумме значений двух предыдущих членов:

1. Формула для геометрической прогрессии золотых чисел:
 $\varphi^K = \varphi^{K-1} + \varphi^{K-2}$, где "K", "K-1" и "K-2" – показатели степеней для золотого числа φ .
2. Формула для последовательности чисел Фибоначчи:
 $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, где F_K , F_{K-1} и F_{K-2} – члены последовательности Фибоначчи с индексами "K", "K-1" и "K-2" соответственно.

Поскольку $F_K = F_{K-1} + F_{K-2}$, то $F_{K-2} = F_K - F_{K-1}$, откуда можно получить следующие соотношения:

$$F_{K-3} = F_{K-1} - F_{K-2} = 2F_{K-1} - F_K = F_K - 2F_{K-2},$$

$$\frac{F_{K-3}}{F_K} = \frac{F_{K-1}}{F_K} - \frac{F_{K-2}}{F_K} = 2 \frac{F_{K-1}}{F_K} - 1 = 1 - 2 \frac{F_{K-2}}{F_K}.$$

Взаимосвязь между золотым числом и числами Фибоначчи выражается следующим соотношением: $\varphi^K = F_{K-1} + F_K \cdot \varphi$.

Докажем утверждение методом последовательного перебора:

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= \varphi^0 + \varphi^{-1} = 0 + 1 \cdot \varphi = F_0 + F_1 \cdot \varphi, \\ \varphi^2 &= \varphi^1 + \varphi^0 = \varphi + 1 = 1 + 1 \cdot \varphi = F_1 + F_2 \cdot \varphi, \\ \varphi^3 &= \varphi^2 + \varphi^1 = (F_1 + F_2 \cdot \varphi) + (F_0 + F_1 \cdot \varphi) = \\ &= (F_0 + F_1) + (F_1 + F_2) \cdot \varphi = F_2 + F_3 \cdot \varphi, \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \varphi^K &= \varphi^{K-1} + \varphi^{K-2} = (F_{K-2} + F_{K-1} \cdot \varphi) + (F_{K-3} + F_{K-2} \cdot \varphi) = \\ &= (F_{K-2} + F_{K-3}) + (F_{K-2} + F_{K-1}) \cdot \varphi = F_{K-1} + F_K \cdot \varphi. \end{aligned}$$

В данной лабораторной работе метод Фибоначчи ("METHOD OF FIBONACHCHI") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":
 - 1.1. Осуществляется ввод значения индекса последнего члена ряда Фибоначчи для его построения, то есть "K".
 - 1.2. Осуществляется построение заданного ряда Фибоначчи начиная с нулевого индекса и заканчивая индексом "K".
 - 1.3. На искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^F и n_{D0}^F , исходя из неравенств

$n_{A0} < n_{C0}^F < n_{D0}^F < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^F)| > |f(n_{D0}^F)| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами последовательности Фибоначчи, согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^F = n_{A0} + \frac{F_{K-2}}{F_K} (n_{B0} - n_{A0}) = n_{B0} - \frac{F_{K-1}}{F_K} (n_{B0} - n_{A0}),$$

$$n_{D0}^F = n_{A0} + \frac{F_{K-1}}{F_K} (n_{B0} - n_{A0}) = n_{B0} - \frac{F_{K-2}}{F_K} (n_{B0} - n_{A0}).$$

- 1.4. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^F и n_{D0}^F округляются до ближайших больших целых чисел.
- 1.5. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = l$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^F = 0$ и в качестве минимального номера n_ε^F выбирается $n_\varepsilon^F = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.
- 1.6. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq l$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

2.1. Если $|f(n_{C(N-1)}^F)| < \varepsilon$, то $n_{AN}^F = n_{A(N-1)}^F$, $n_{BN}^F = n_{C(N-1)}^F$,

$$n_{BN}^F - n_{AN}^F = n_{C(N-1)}^F - n_{A(N-1)}^F = \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} (n_{B(N-1)}^F - n_{A(N-1)}^F), \text{ и}$$

получаем отрезок $[n_{AN}^F, n_{BN}^F] = [n_{A(N-1)}^F, n_{C(N-1)}^F]$.

2.2. Если $|f(n_{C(N-1)}^F)| \geq \varepsilon$ и $|f(n_{D(N-1)}^F)| < \varepsilon$, то $n_{AN}^F = n_{C(N-1)}^F$,

$$n_{BN}^F = n_{D(N-1)}^F, \quad n_{BN}^F - n_{AN}^F = n_{D(N-1)}^F - n_{C(N-1)}^F =$$

$$= \frac{F_{K-3-N}}{F_{K-N}} (n_{B(N-1)}^F - n_{A(N-1)}^F), \text{ и получаем отрезок}$$

$$[n_{AN}^F, n_{BN}^F] = [n_{C(N-1)}^F, n_{D(N-1)}^F].$$

2.3. Если $\left|f\left(n_{D(N-1)}^F\right)\right| \geq \varepsilon$, то $n_{AN}^F = n_{D(N-1)}^F$, $n_{BN}^F = n_{B(N-1)}^F$,
 $n_{BN}^F - n_{AN}^F = n_{B(N-1)}^F - n_{D(N-1)}^F = \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n_{B(N-1)}^F - n_{A(N-1)}^F\right)$, и
 получаем отрезок $\left[n_{AN}^F, n_{BN}^F\right] = \left[n_{D(N-1)}^F, n_{E(N-1)}^F\right]$.

2.4. На отрезке $\left[n_{AN}^F, n_{BN}^F\right]$ при соблюдении условий $n_{AN}^F < n_{BN}^F$
 и $\left|f\left(n_{AN}^F\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n_{BN}^F\right)\right|$ выбираются точки с абсциссами
 n_{CN}^F и n_{DN}^F , исходя из неравенств $n_{AN}^F < n_{CN}^F < n_{DN}^F < n_{BN}^F$ и
 $\left|f\left(n_{AN}^F\right)\right| > \left|f\left(n_{CN}^F\right)\right| > \left|f\left(n_{DN}^F\right)\right| > \left|f\left(n_{BN}^F\right)\right|$, в соответствии с
 принципами последовательности Фибоначчи, согласно
 следующим соотношениям:

$$n_{CN}^F = n_{AN}^F + \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n_{BN}^F - n_{AN}^F\right) = n_{BN}^F - \frac{F_{K-1-N}}{F_{K-N}} \left(n_{BN}^F - n_{AN}^F\right)$$

$$n_{DN}^F = n_{AN}^F + \frac{F_{K-1-N}}{F_{K-N}} \left(n_{BN}^F - n_{AN}^F\right) = n_{BN}^F - \frac{F_{K-2-N}}{F_{K-N}} \left(n_{BN}^F - n_{AN}^F\right)$$

2.5. При наличии положительных дробных частей значения
 n_{CN}^F и n_{DN}^F округляются до ближайших больших целых
 чисел.

2.6. Если достигнута истинность выражения $n_{BN}^F - n_{AN}^F = 1$, то
 итерации прекращаются, количество шагов итераций
 $s_\varepsilon^F = N$ и в качестве минимального номера n_ε^F выбирается
 $n_\varepsilon^F = n_{AN}^F$ в силу неравенства $\left|f\left(n_{AN}^F\right)\right| \geq \varepsilon > \left|f\left(n_{BN}^F\right)\right|$.

2.7. Если $n_{BN}^F - n_{AN}^F \neq 1$, то осуществляется переход к
 следующей итерации.

Стоит отметить, что при достаточно большом значении начального
 индекса "K" соответствующие отрезки, полученные методами
 золотой пропорции и Фибоначчи, будут иметь незначительные
 отличия, что влечет за собой приблизительно равную эффективность
 обоих методов.

Метод дихотомии

Суть дихотомии, или половинного деления, состоит в следующем:
 если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это

будет отражать дихотомию, то C , деленное на A , будет равно C , деленному на B , то есть A равно B : $\frac{C}{A} = \frac{C}{B} = 2$, или $A = B$.

Таким образом, при наличии исходного отрезка $[a_0, b_0]$ полученный в результате " N "-го деления отрезок $[a_N, b_N]$ связан с исходным соотношением $b_N - a_N = \frac{b_0 - a_0}{2^N}$.

В данной лабораторной работе метод дихотомии ("METHOD OF DICHOTOMY") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":

- 1.1. Осуществляется ввод значения расстояния, откладываемого симметрично относительно середины отрезка, для установки точек, то есть n_M^D .
- 1.2. Если $n_{B0} - n_{A0} \leq 2$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбирается точка с абсциссой $n_{C0}^D = n_{D0}^D$, исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D = n_{D0}^D < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^D)| = |f(n_{D0}^D)| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению:

$$n_{C0}^D = n_{D0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2}.$$

- 1.3. Если $2 < n_{B0}^D - n_{A0}^D \leq 2n_M^D$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^D и n_{D0}^D , исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D < n_{D0}^D < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^D)| > |f(n_{D0}^D)| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - 1 = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - 1,$$

$$n_{D0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + 1 = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + 1.$$

- 1.4. Если $n_{B0} - n_{A0} > 2n_M^D$, то на искомом отрезке $[n_{A0}, n_{B0}]$ при соблюдении условий $n_{A0} < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$ (по умолчанию значения n_{A0} и n_{B0} являются целыми числами) выбираются точки с абсциссами n_{C0}^D и n_{D0}^D , исходя из неравенств $n_{A0} < n_{C0}^D < n_{D0}^D < n_{B0}$ и $|f(n_{A0})| > |f(n_{C0}^D)| > |f(n_{D0}^D)| > |f(n_{B0})|$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующим соотношениям:

$$n_{C0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - n_M^D = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} - n_M^D,$$

$$n_{D0}^D = n_{A0} + \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + n_M^D = n_{B0} - \frac{n_{B0} - n_{A0}}{2} + n_M^D.$$

- 1.5. При наличии положительных дробных частей значения n_{C0}^D и n_{D0}^D округляются до ближайших больших целых чисел.
- 1.6. Если достигнута истинность выражения $n_{B0} - n_{A0} = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = 0$ и в качестве минимального номера n_ε^D выбирается $n_\varepsilon^D = n_{A0}$ в силу неравенства $|f(n_{A0})| \geq \varepsilon > |f(n_{B0})|$.
- 1.7. Если $n_{B0} - n_{A0} \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.
2. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

- 2.1. Если $|f(n_{C(N-1)}^D)| < \varepsilon$, то $n_{AN}^D = n_{A(N-1)}^D$, $n_{BN}^D = n_{C(N-1)}^D$,

$$n_{BN}^D - n_{AN}^D = n_{C(N-1)}^D - n_{A(N-1)}^D = \frac{n_{B(N-1)}^D - n_{A(N-1)}^D}{2} - n_M^D \quad \text{и}$$

получаем отрезок $[n_{AN}^D, n_{BN}^D] = [n_{A(N-1)}^D, n_{C(N-1)}^D]$.

- 2.2. Если $|f(n_{C(N-1)}^D)| \geq \varepsilon$ и $|f(n_{D(N-1)}^D)| < \varepsilon$, то $n_{AN}^D = n_{C(N-1)}^D$,

$$n_{BN}^D = n_{D(N-1)}^D, \quad n_{BN}^D - n_{AN}^D = n_{D(N-1)}^D - n_{C(N-1)}^D = 2n_M^D \quad \text{и}$$

получаем отрезок $[n_{AN}^D, n_{BN}^D] = [n_{C(N-1)}^D, n_{D(N-1)}^D]$.

2.3. Если $|f(n_{D(N-1)}^D)| \geq \varepsilon$, то $n_{AN}^D = n_{D(N-1)}^D$, $n_{BN}^D = n_{B(N-1)}^D$,

$$n_{BN}^D - n_{AN}^D = n_{B(N-1)}^D - n_{D(N-1)}^D = \frac{n_{B(N-1)}^D - n_{A(N-1)}^D}{2} - n_M^D \quad \text{и}$$

получаем отрезок $[n_{AN}^D, n_{BN}^D] = [n_{D(N-1)}^D, n_{B(N-1)}^D]$.

2.4. Если $n_{BN}^D - n_{AN}^D \leq 2$, то на отрезке $[n_{AN}^D, n_{BN}^D]$ при соблюдении условий $n_{AN}^D < n_{BN}^D$ и $|f(n_{AN}^D)| \geq \varepsilon > |f(n_{BN}^D)|$

выбирается точка с абсциссой $n_{CN}^D = n_{DN}^D$, исходя из неравенств $n_{AN}^D < n_{CN}^D = n_{DN}^D < n_{BN}^D$ и

$|f(n_{AN}^D)| > |f(n_{CN}^D)| = |f(n_{DN}^D)| > |f(n_{BN}^D)|$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению:

$$n_{CN}^D = n_{DN}^D = n_{AN}^D + \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} = n_{BN}^D - \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2}.$$

2.5. Если $2 < n_{BN}^D - n_{AN}^D \leq 2n_M^D$, то на отрезке $[n_{AN}^D, n_{BN}^D]$ при соблюдении условий $n_{AN}^D < n_{BN}^D$ и $|f(n_{AN}^D)| \geq \varepsilon > |f(n_{BN}^D)|$

выбираются точки с абсциссами n_{CN}^D и n_{DN}^D , исходя из неравенств $n_{AN}^D < n_{CN}^D < n_{DN}^D < n_{BN}^D$ и $|f(n_{AN}^D)| > |f(n_{CN}^D)| >$

$> |f(n_{DN}^D)| > |f(n_{BN}^D)|$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующим соотношениям:

$$n_{CN}^D = n_{AN}^D + \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} - 1 = n_{BN}^D - \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} - 1,$$

$$n_{DN}^D = n_{AN}^D + \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} + 1 = n_{BN}^D - \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} + 1.$$

2.6. Если $n_{BN}^D - n_{AN}^D > 2n_M^D$, то на отрезке $[n_{AN}^D, n_{BN}^D]$ при соблюдении условий $n_{AN}^D < n_{BN}^D$ и $|f(n_{AN}^D)| \geq \varepsilon > |f(n_{BN}^D)|$

выбираются точки с абсциссами n_{CN}^D и n_{DN}^D , исходя из неравенств $n_{AN}^D < n_{CN}^D < n_{DN}^D < n_{BN}^D$ и

$|f(n_{AN}^D)| > |f(n_{CN}^D)| > |f(n_{DN}^D)| > |f(n_{BN}^D)|$, в соответствии с

принципами дихотомии, согласно следующим соотношениям:

$$n_{CN}^D = n_{AN}^D + \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} - n_M^D = n_{BN}^D - \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} - n_M^D,$$

$$n_{DN}^D = n_{AN}^D + \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} + n_M^D = n_{BN}^D - \frac{n_{BN}^D - n_{AN}^D}{2} + n_M^D.$$

- 2.7. При наличии положительных дробных частей значения n_{CN}^D и n_{DN}^D округляются до ближайших больших целых чисел.
- 2.8. Если достигнута истинность выражения $n_{BN}^D - n_{AN}^D = 1$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = N$ и в качестве минимального номера n_ε^D выбирается $n_\varepsilon^D = n_{AN}^D$ в силу неравенства $\left| f(n_{AN}^D) \right| \geq \varepsilon > \left| f(n_{BN}^D) \right|$.
- 2.9. Если $n_{BN}^D - n_{AN}^D \neq 1$, то осуществляется переход к следующей итерации.

1.1.2. Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по расчету значений минимальных номеров приближения к пределу числовых последовательностей вида

$$x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0} \quad (\text{для } \varepsilon > 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, \left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon) \text{ на основе}$$

расчетов значений минимальных номеров n_ε с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "MINNESQS" может быть разделена на три этапа.

1 этап – "Приближенные вычисления значений минимальных номеров n_ε числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$

(для $\varepsilon > 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, \left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с помощью стандартных

встроенных функций графического калькулятора"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 человека, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов. Каждой из групп предлагаются различные исходные данные $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ и ε .

Вычисления значений минимальных номеров n_ε заданных числовых последовательностей может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

- *аналитическим* – выполнение вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*” или в режиме выполнения статистических расчетов “*STATistics*”;
- *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков “*GraPH-TaBLe*”.

II этап – “*Приближенные вычисления значений минимальных*

номеров n_ε числовых последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$

*(для $\varepsilon > 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0, \left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) с использованием методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии в зависимости от различных значений $\varepsilon > 0$ с применением представленной в графическом калькуляторе программы “*MINNESQS*”*

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$, а также несколько значений ε в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно проведут анализ функции $|f(n)|$ на предмет выявления действительных точек разрыва, экстремума и угловой точки, а также по найденным значениям n_{A0} и n_{B0} реализуют итерации с индексами “0”, “1” и “2” согласно методам золотой пропорции, Фибоначчи и дихотомии.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы “*MINNESQS*”.

III этап – “Сравнительный анализ методов золотой пропорции, Фибоначчи, дихотомии в результате реализации приближенных вычислений значений минимальных номеров n_ε числовых

последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$,

$b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) в зависимости от различных значений ε ”

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ сделанных на втором этапе приближенных вычислений значений минимальных номеров n_ε заданных числовых

последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$, $a_2 \neq 0$,

$b_2 \neq 0$, $\left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon$) в зависимости от различных значений ε .

Для этого, согласно результатам расчетов, необходимо заполнить совокупную таблицу 1 полученных значений количества шагов s_ε и минимальных номеров n_ε в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, во-вторых, от значений ε , на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и студенты отвечают на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 1

Совокупная таблица по лабораторной работе №1

Название метода	Метод золотой пропорции		Метод Фибоначчи		Метод дихотомии	
	s_ε^{GP}	n_ε^{GP}	s_ε^F	n_ε^F	s_ε^D	n_ε^D
ε_1						
...						
ε_X						

1.1.3. Описание программы с примером

Рассмотрим схему работы программы "MINNESQS", реализующей следующие задачи:

1. Отслеживание характера последовательности $\{x_n\}$ в результате проведения аналитического и графического анализов функции $|f(n)| = |x_n - A|$ с целью определения значений действительных точек разрыва, экстремума и угловой точки.
2. Определение значений минимальных номеров n_ε числовых

последовательностей вида $x_n = \frac{a_2 n^2 + a_1 n + a_0}{b_2 n^2 + b_1 n + b_0}$ (для $\varepsilon > 0$,

$$a_2 \neq 0, \quad b_2 \neq 0, \quad \left| x_n - \frac{a_2}{b_2} \right| < \varepsilon) \quad \text{по заданным значениям}$$

коэффициентов последовательностей $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$, а также значениям ε и n_{B0} .

Описание программы "MINNESQS" приведем на примере нахождения значений минимальных номеров n_ε числовой

последовательности $x_n = \frac{10n^2 - 5n - 40}{4n^2 + 20n - 9}$ с заданными значениями

$\varepsilon = 0,05$ и $n_{B0} = 10000$ в сопровождении логически расположенных на рис. 4 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGraM" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "MINNESQS" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 4А).

Последовательные нажатия клавиши "EXE" служат для отображения следующих окон:

- Окна диалога для ввода значений коэффициентов числителя числовой последовательности (a_0 ["A0"], a_1 ["A1"], a_2 ["A2"]) (рис. 4В).
- Окна диалога для ввода значений коэффициентов знаменателя числовой последовательности (b_0 ["B0"], b_1 ["B1"], b_2 ["B2"]) (рис. 4В).

- Окна построения графиков следующих функций, отражающих числовую последовательность (рис. 4С):

- ✓ Графика функции $f(n) = x_n : y_3(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0}$ ["Y3"].

- ✓ Графика функции $f(n) = x_n - A : y_4(x) = \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0} - \frac{a_2}{b_2}$ ["Y4"].

- ✓ Графика функции $|f(n)| = |x_n - A| :$

$$y_5(x) = \left| \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| \text{ ["Y5"]}$$

- Окна диалога для ввода значений ε ["EPS"] и n_{B0} ["NB0"] (рис. 4D).

При работе с рассматриваемыми меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 4E):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD FACTS (2)** – перезагрузка значений коэффициентов числовой последовательности a_0 ["A0"], a_1 ["A1"], a_2 ["A2"] и b_0 ["B0"], b_1 ["B1"], b_2 ["B2"] с поочередным отображением соответствующих окон.
- **RELOAD EPS NB0 (3)** – перезагрузка значений ε ["EPS"] и n_{B0} ["NB0"] с отображением соответствующего окна.
- **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка значений коэффициентов числовой последовательности a_0 ["A0"], a_1 ["A1"], a_2 ["A2"] и b_0 ["B0"], b_1 ["B1"], b_2 ["B2"], а также значений ε ["EPS"] и n_{B0} ["NB0"] с поочередным отображением соответствующих окон.

- **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения продолжения выполнения расчетов в результате последовательного ввода цифры “1” и нажатия клавиши “EXE” открывается меню со следующими позициями (рис. 4F):

- **CAL BREAKUP PTS (1)** – вычисление значений n , при которых

$$\text{функция } y_5(x) = \left| \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right| \quad [“Y5”], \text{ отражающая}$$

числовую последовательность, имеет действительные точки разрыва (n_{BP1} [“NBP1”], n_{BP2} [“NBP2”] или n_{BP} [“NBP”]) с поочередным отображением следующих окон (рис. 4G):

- ✓ Окна вывода значений координат действительных точек разрыва функции, отражающей числовую последовательность (n_{BP1} [“NBP1”] и $y_5(n_{BP1} + 10^{-10})$ [“Y5(NBP1+10⁻¹⁰)”], n_{BP2} [“NBP2”] и $y_5(n_{BP2} + 10^{-10})$ [“Y5(NBP2+10⁻¹⁰)”] или n_{BP} [“NBP”] и $y_5(n_{BP} + 10^{-10})$ [“Y5(NBP+10⁻¹⁰)”]).
- ✓ Окна построения графика функции, характеризующей уравнение нахождения действительных точек разрыва функции, отражающей числовую последовательность: $y_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ [“Y2”].

- **CAL EXTREMS PTS (2)** – вычисление значений n , при которых функция, отражающая числовую последовательность, имеет действительные точки экстремума (n_{EP1} [“NEP1”], n_{EP2} [“NEP2”] или n_{EP} [“NEP”]) с поочередным отображением следующих окон (рис. 4H):

- ✓ Окна вывода значений координат действительных точек экстремума функции, отражающей числовую последовательность (n_{EP1} [“NEP1”] и $y_5(n_{EP1})$ [“Y5(NEP1)”], n_{EP2} [“NEP2”] и $y_5(n_{EP2})$ [“Y5(NEP2)”] или n_{EP} [“NEP”] и $y_5(n_{EP})$ [“Y5(NEP)”]).
- ✓ Окна построения графиков функций, характеризующих уравнения нахождения действительных точек экстремума функции, отражающей числовую последовательность: $y_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ [“Y2”] и $y_6(x) = (a_2b_1 - a_1b_2)x^2 + 2x(a_2b_0 - a_0b_2) + a_1b_0 - a_0b_1$ [“Y6”].

- **CAL ANGULAR PTS (3)** – вычисление значения n , при котором функция, отражающая числовую последовательность, имеет действительную угловую точку (n_{AP} ["NAP"]) с поочередным отображением следующих окон (рис. 4I):

- ✓ Окна вывода значения действительной угловой точки функции, отражающей числовую последовательность (n_{AP} ["NAP"] и $y_5(n_{AP})$ ["Y5(NAP)"]).

- ✓ Окна построения графиков функций, характеризующих уравнения нахождения угловой точки функции, отражающей числовую последовательность: $y_2(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ ["Y2"] и $y_7(x) = (a_1b_2 - a_2b_1)x + a_0b_2 - a_2b_0$ ["Y7"].

- **CAL NUMBER NA0 (4)** – выбор номера n_{A0} ["NA0"] как наибольшего целого из найденных в процессе исследования функции номеров (рис. 4J):

$$n_{A0} = \max\{n_{BP1}, n_{BP2}(n_P), n_{EP1}, n_{EP2}(n_{EP}), n_{AP}\}.$$

- **CALCUL NEPS (5)** – переход к выполнению расчетов минимального номера n_e .

- **OR PREVIOUS (6)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора продолжения расчетов в результате последовательного ввода цифры "5" и нажатия клавиши "EXE" появляется информационное окно с поочередным выводом значений ε ["EPS"], n_{A0} ["NA0"] и n_{B0} ["NB0"] (рис. 4K).

После очередного нажатия клавиши "EXE" открывается меню со следующими позициями (рис. 4L):

- **MET GOLD PROPOR (1)** – вычисление значения минимального номера n_e с использованием метода золотой пропорции с отображением окна вывода найденных значений количества шагов s_e^{GP} ["SEPSGP"] и минимального номера n_e^{GP} ["NEPSGP"] с использованием метода золотой пропорции (рис. 4M).

- **MET FIBONACHCHI (2)** – вычисление значения минимального номера n_e с использованием метода Фибоначчи с поочередным отображением следующих окон (рис. 4N):

- ✓ Окна ввода индекса последнего члена ряда Фибоначчи "K" ["K"].

- ✓ Окна вывода построенного ряда Фибоначчи с выводом значений индексов членов ряда " K_N " и их значений " F_{KN} ".
- ✓ Окна вывода найденных значений количества шагов s_ε^F ["SEPSF"] и минимального номера n_ε^F ["NEPSF"] с использованием метода Фибоначчи.
- **МЕТ DICHOTOMY (3)** – вычисление значения минимального номера n_ε с использованием метода дихотомии с поочередным отображением следующих окон (рис. 4O):
 - ✓ Окна ввода значения расстояния n_M^D ["NMD"], откладываемого от центра интервала неопределенности.
 - ✓ Окна вывода найденных значений количества шагов s_ε^D ["SEPSD"] и минимального номера n_ε^D ["NEPSD"] с использованием метода дихотомии.
- **ИТОGY (4)** – последовательный сравнительный анализ полученных результатов с поочередным отображением следующих окон (рис. 4P):
 - ✓ Окна вывода совокупной таблицы исходных данных и результатов (матрица "Z").
 - ✓ Окна вывода таблицы, в столбцах которой последовательно отражается следующая информация:
 - ❖ пять номеров последовательности (два – до найденного минимального номера n_ε , сам номер, и два – после найденного номера);
 - ❖ значения функции $|f(n)| = |x_n - A|$, отражающей последовательность, для указанных выше значений пяти номеров;
 - ❖ арифметическая разность между значениями функции $y_5(x)$ и ε .
 - ✓ Окна построения двух графиков, один из которых – график функции, отражающей последовательность $|f(n)| = |x_n - A|$, то есть $y_5(x) = \left| \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{b_2x^2 + b_1x + b_0} - \frac{a_2}{b_2} \right|$ ["Y5"], а другой – график функции, отражающей горизонтальную линию $f_2(n) = \varepsilon$, то есть $y_8(x) = \varepsilon$ ["Y8"], при этом масштабы графического окна автоматически формируются таким

образом, чтобы выводимое изображение визуально отражало взаимное пересечение графиков данных функций – геометрическая интерпретация минимального номера n_ε .

- **RELOAD EPS NB0 (5)** – перезагрузка значений ε [“EPS”] и n_{B0} [“NB0”].
- **OR PREVIOUS (6)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы результаты всех промежуточных расчетов фиксируются в списках согласно таблице 2 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения статистических расчетов “STATistics”), тогда как итоговые результаты проецируются в матрицы “Z” и “W” согласно таблицам 3 и 4 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “RUN.MATrix”).

Таблица 2

Содержимое списков List 1...List 20

Список	Значения	Список	Значения	Список	Значения
List 1	n_{AN}^{GP}	List 7	K_N	List 15	n_{AN}^D
List 2	n_{BN}^{GP}	List 8	F_{KN}	List 16	n_{BN}^D
List 3	n_{CN}^{GP}	List 9	n_{AN}^F	List 17	n_{CN}^D
List 4	n_{DN}^{GP}	List 10	n_{BN}^F	List 18	n_{DN}^D
List 5	$ f(n_{CN}^{GP}) $	List 11	n_{CN}^F	List 19	$ f(n_{CN}^D) $
List 6	$ f(n_{DN}^{GP}) $	List 12	n_{DN}^F	List 20	$ f(n_{DN}^D) $
		List 13	$ f(n_{CN}^F) $		
		List 14	$ f(n_{DN}^F) $		

Таблица 3

Содержимое матрицы "Z"

Знач.	1	2	3	4	5	6	7
1	a_0	ε	$n_{BP1}(n_{BP})$	$ f(n_{BP1}+o) [f(n_{BP}+o)]$	n_{C0}^{GP}	$ f(n_{C0}^{GP}) $	s_{ε}^{GP}
2	a_1	n_{A0}	n_{BP2}	$ f(n_{BP2}+o) $	n_{D0}^{GP}	$ f(n_{D0}^{GP}) $	n_{ε}^{GP}
3	a_2	n_{B0}	$n_{EP1}(n_{EP})$	$ f(n_{EP1}) [f(n_{EP})]$	n_{C0}^F	$ f(n_{C0}^F) $	s_{ε}^F
4	b_0	n_{ε}	n_{EP2}	$ f(n_{EP2}) $	n_{D0}^F	$ f(n_{D0}^F) $	n_{ε}^F
5	b_1	K	n_{AP}	$ f(n_{AP}) $	n_{C0}^D	$ f(n_{C0}^D) $	s_{ε}^D
6	b_2	n_M^D	0	0	n_{D0}^D	$ f(n_{D0}^D) $	n_{ε}^D

Таблица 4

Содержимое матрицы "W"

Значение	1	2	3
1	$n_{\varepsilon}-2$	$ f(n_{\varepsilon}-2) $	$ f(n_{\varepsilon}-2) -\varepsilon$
2	$n_{\varepsilon}-1$	$ f(n_{\varepsilon}-1) $	$ f(n_{\varepsilon}-1) -\varepsilon$
3	n_{ε}	$ f(n_{\varepsilon}) $	$ f(n_{\varepsilon}) -\varepsilon$
4	$n_{\varepsilon}+1$	$ f(n_{\varepsilon}+1) $	$ f(n_{\varepsilon}+1) -\varepsilon$
5	$n_{\varepsilon}+2$	$ f(n_{\varepsilon}+2) $	$ f(n_{\varepsilon}+2) -\varepsilon$

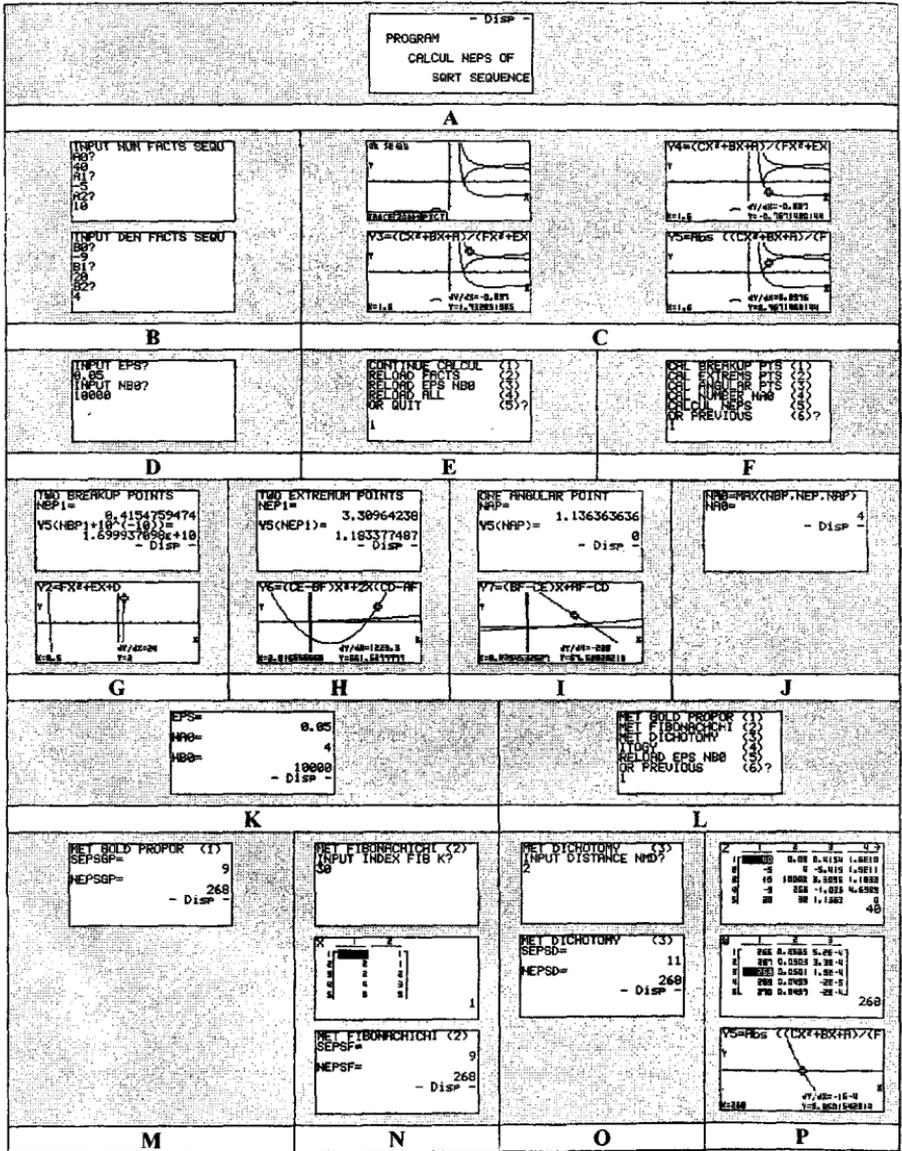


Рис. 2. Скриншоты из программы "MINNESQS"

1.2. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций и их сравнительный анализ (программа "APROX EQU", раздел "Дифференциальное исчисление").

Цель работы: реализовать нахождение приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROX EQU".

1.2.1. Теоретический аспект

В силу сложности структуры символьной записи алгебраических и трансцендентных уравнений задача по нахождению точных решений является весьма трудоемкой и подчас нереальной.

Процедура нахождения приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений может быть реализована в два этапа:

1. *Локализация корней* – выделение отрезков, каждый из которых содержит по одному корню, с использованием аналитических или графических методов.
2. *Уточнение корней* – вычисление с использованием численных методов приближенных значений действительных корней уравнения на каждом из отрезков с необходимой точностью, при этом каждый из корней в силу единственности на рассматриваемом интервале, называемом интервалом изоляции корня, является изолированным.

Предлагаемые в рамках данной лабораторной работы численные методы используются для приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений вида $f(x) = 0$ с целью определения приближенного значения изолированного действительного корня x_n на отрезке $[a_0, b_0]$ с необходимой точностью ε .

Рассмотрим логические основы реализации метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для выполнения приближенных решений

алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений a_0 , b_0 , ε , заложенных в программу "APROXEQU".

Метод дихотомии (бисекции)

Суть дихотомии (бисекции), или половинного деления, состоит в следующем: если разделить отрезок C на отрезки A и B таким образом, что это будет отражать дихотомию, то C , деленное на A , будет равно C , деленному на B , то есть A равно B : $\frac{C}{A} = \frac{C}{B} = 2$, или $A = B$.

Таким образом, при наличии исходного отрезка $[a_0, b_0]$ полученный в результате " N "-го деления отрезок $[a_N, b_N]$ связан с исходным соотношением $b_N - a_N = \frac{b_0 - a_0}{2^N}$.

В данной лабораторной работе метод дихотомии (бисекции) ("METHOD OF DICHOTOMY") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":

- 1.1. На искомом отрезке $[a_0^D, b_0^D]$ при соблюдении условий $a_0^D < b_0^D$ и $f(a_0^D) \cdot f(b_0^D) < 0$ выбирается точка x_0^D , исходя из неравенства $a_0^D < x_0^D < b_0^D$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению:

$$x_0^D = \frac{a_0^D + b_0^D}{2}.$$

- 1.2. Если достигнута истинность выражения $|b_0^D - a_0^D| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = 0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_0^D$

в силу равенства $x_0^D = \frac{a_0^D + b_0^D}{2}$.

- 1.3. Если $|b_0^D - a_0^D| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом " N " ($N \geq 1$):

- 2.1. Если $f(x_{N-1}^D) \cdot f(a_{N-1}^D) < 0$ и $f(x_{N-1}^D) \cdot f(b_{N-1}^D) > 0$, то $a_N^D = a_{N-1}^D$, $b_N^D = x_{N-1}^D$, $b_N^D - a_N^D = x_{N-1}^D - a_{N-1}^D = \frac{b_{N-1}^D - a_{N-1}^D}{2}$ и получаем отрезок $[a_N^D, b_N^D] = [a_{N-1}^D, x_{N-1}^D]$.
- 2.2. Если $f(x_{N-1}^D) \cdot f(a_{N-1}^D) > 0$ и $f(x_{N-1}^D) \cdot f(b_{N-1}^D) < 0$, то $a_N^D = x_{N-1}^D$, $b_N^D = b_{N-1}^D$, $b_N^D - a_N^D = b_{N-1}^D - x_{N-1}^D = \frac{b_{N-1}^D - a_{N-1}^D}{2}$ и получаем отрезок $[a_N^D, b_N^D] = [x_{N-1}^D, b_{N-1}^D]$.
- 2.3. На отрезке $[a_N^D, b_N^D]$ при соблюдении условий $a_N^D < b_N^D$ и $f(a_N^D) \cdot f(b_N^D) < 0$ выбирается точка x_N^D , исходя из неравенства $a_N^D < x_N^D < b_N^D$, в соответствии с принципами дихотомии, согласно следующему соотношению:

$$x_N^D = \frac{a_N^D + b_N^D}{2}.$$
- 2.4. Если достигнута истинность выражения $|b_N^D - a_N^D| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^D = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D выбирается $x_\varepsilon^D = x_N^D$ в силу равенства $x_N^D = \frac{a_N^D + b_N^D}{2}$.
- 2.5. Если $|b_N^D - a_N^D| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона)

Комбинированный метод хорд и касательных (Ньютона) применяется только в случаях, когда функция $f(x)$ на искомом отрезке $[a_0, b_0]$ монотонна и не имеет точек перегиба, то есть $f'(x)$ и $f''(x)$ не изменяют знака на отрезке $[a_0, b_0]$.

Суть метода заключается в сжатии искомого отрезка $[a_0, b_0]$ в силу проведения из противоположных концов хорды и касательной, согласно следующим правилам:

1. Для случая $f(a_0) \cdot f''(a_0) > 0$ и $f(b_0) \cdot f''(b_0) < 0$ отрезок $[a_N, b_N]$ образуется из отрезка $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ согласно следующим правилам:

1.1. Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $(a_{N-1}, f(a_{N-1}))$ к графику исходной функции $f(x)$, то есть $f_1(a_N) = f(a_{N-1}) + f'(a_{N-1}) \cdot (a_N - a_{N-1})$, получим абсциссу точки пересечения касательной с осью абсцисс ($f_1(a_N) = 0$): $a_N = a_{N-1} - \frac{f(a_{N-1})}{f'(a_{N-1})}$.

1.2. Исходя из уравнения хорды, проходящей через точки с координатами $(a_{N-1}, f(a_{N-1}))$ и $(b_{N-1}, f(b_{N-1}))$, то есть $f_2(b_N) = f(b_{N-1}) + (b_N - b_{N-1}) \cdot \frac{f(a_{N-1}) - f(b_{N-1})}{a_{N-1} - b_{N-1}}$, получим абсциссу точки пересечения хорды с осью абсцисс ($f_2(b_N) = 0$):

$$b_N = b_{N-1} - f(b_{N-1}) \cdot \frac{a_{N-1} - b_{N-1}}{f(a_{N-1}) - f(b_{N-1})}.$$

2. Для случая $f(a_0) \cdot f''(a_0) < 0$ и $f(b_0) \cdot f''(b_0) > 0$ отрезок $[a_N, b_N]$ образуется из отрезка $[a_{N-1}, b_{N-1}]$ согласно следующим правилам:

2.1. Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $(b_{N-1}, f(b_{N-1}))$ к графику исходной функции $f(x)$, то есть $f_1(b_N) = f(b_{N-1}) + f'(b_{N-1}) \cdot (b_N - b_{N-1})$, получим абсциссу точки пересечения касательной с осью абсцисс ($f_1(b_N) = 0$): $b_N = b_{N-1} - \frac{f(b_{N-1})}{f'(b_{N-1})}$.

2.2. Исходя из уравнения хорды, проходящей через точки с координатами $(a_{N-1}, f(a_{N-1}))$ и $(b_{N-1}, f(b_{N-1}))$, то есть $f_2(a_N) = f(a_{N-1}) + (a_N - a_{N-1}) \cdot \frac{f(b_{N-1}) - f(a_{N-1})}{b_{N-1} - a_{N-1}}$, получим абсциссу точки пересечения хорды с осью абсцисс ($f_2(a_N) = 0$): $a_N = a_{N-1} - f(a_{N-1}) \cdot \frac{b_{N-1} - a_{N-1}}{f(b_{N-1}) - f(a_{N-1})}$.

В данной лабораторной работе комбинированный метод хорд и касательных, или метод Ньютона ("METHOD OF CHORDS AND TANGENTS"), имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":

1.1. На искомом отрезке $[a_0^{CT}, b_0^{CT}]$ при соблюдении условий $a_0^{CT} < b_0^{CT}$, $f(a_0^{CT}) \cdot f(b_0^{CT}) < 0$, $f'(a_0^{CT}) \cdot f''(a_0^{CT}) > 0$, $f'(b_0^{CT}) \cdot f''(b_0^{CT}) > 0$ выбирается точка с координатами $(x_0^{CT}, f(x_0^{CT}))$, из которой проводится первая касательная к графику исходной функции $f(x)$.

1.2. Если $f(a_0^{CT}) \cdot f''(a_0^{CT}) > 0$ и $f(b_0^{CT}) \cdot f''(b_0^{CT}) < 0$, то $x_0^{CT} = a_0^{CT}$.

1.3. Если $f(a_0^{CT}) \cdot f''(a_0^{CT}) < 0$ и $f(b_0^{CT}) \cdot f''(b_0^{CT}) > 0$, то $x_0^{CT} = b_0^{CT}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $|b_0^{CT} - a_0^{CT}| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{CT} = 0$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^{CT} выбирается
$$x_\varepsilon^{CT} = \frac{a_0^{CT} + b_0^{CT}}{2}.$$

1.5. Если $|b_0^{CT} - a_0^{CT}| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

2. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

2.1. Если $x_0^{CT} = a_0^{CT}$, то на отрезке $[a_{N-1}^{CT}, b_{N-1}^{CT}]$ выбираются точки a_N^{CT} и b_N^{CT} с соблюдением условия $a_{N-1}^{CT} < a_N^{CT} < b_N^{CT} < b_{N-1}^{CT}$, согласно следующим соотношениям:

$$a_N^{CT} = a_{N-1}^{CT} - \frac{f(a_{N-1}^{CT})}{f'(a_{N-1}^{CT})} \text{ и}$$

$$b_N^{CT} = b_{N-1}^{CT} - f(b_{N-1}^{CT}) \cdot \frac{a_{N-1}^{CT} - b_{N-1}^{CT}}{f(a_{N-1}^{CT}) - f(b_{N-1}^{CT})}.$$

- 2.2. Если $x_0^{CT} = b_0^{CT}$, то на отрезке $[a_{N-1}^{CT}, b_{N-1}^{CT}]$ выбираются точки a_N^{CT} и b_N^{CT} с соблюдением условия $a_{N-1}^{CT} < a_N^{CT} < b_N^{CT} < b_{N-1}^{CT}$, согласно следующим соотношениям:

$$b_N^{CT} = b_{N-1}^{CT} - \frac{f(b_{N-1}^{CT})}{f'(b_{N-1}^{CT})} \text{ и}$$

$$a_N^{CT} = a_{N-1}^{CT} - f(a_{N-1}^{CT}) \cdot \frac{b_{N-1}^{CT} - a_{N-1}^{CT}}{f(b_{N-1}^{CT}) - f(a_{N-1}^{CT})}.$$

- 2.3. Если достигнута истинность выражения $|b_N^{CT} - a_N^{CT}| \leq 2\varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\varepsilon^{CT} = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^{CT} выбирается

$$x_\varepsilon^{CT} = \frac{a_N^{CT} + b_N^{CT}}{2}.$$

- 2.4. Если $|b_\varepsilon^{CT} - a_\varepsilon^{CT}| > 2\varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод итераций

Метод итераций применяется к уравнениям вида $x = g(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условий $|g'(x)| < q < 1$ и $a_0 \leq g(x) \leq b_0$, где $x \in [a_0, b_0]$.

Суть метода итераций заключается в построении рекуррентной последовательности действительных чисел, сходящихся к искомому решению, по формуле $x_N = g(x_{N-1})$, где $x \in [a_0, b_0]$.

Обозначим дифференцируемую функцию $f(x) = x - g(x)$, при этом за начальное приближение корня примем произвольное значение $x_0 \in [a_0, b_0]$.

$$|f'(x)| = |x' - g'(x)| = |1 - g'(x)| \geq 1 - |g'(x)| \geq 1 - q.$$

Если \bar{x} — точное решение уравнения $f(\bar{x}) = 0$, то имеем:

$$|x_{N+1} - x_N| = |g(x_N) - x_N| = |f(x_N)| = |f(\bar{x}) - f(x_N)|.$$

По теореме Лагранжа, $|f'(\bar{x})| = \frac{|f(\bar{x}) - f(x_N)|}{|\bar{x} - x_N|}$, где $\bar{x} \in [\bar{x}, x_N]$.

Тогда $|x_{N+1} - x_N| = |f'(\bar{x})| \cdot |\bar{x} - x_N| \geq (1-q) \cdot |\bar{x} - x_N|$.

С другой стороны, так как $x_{N+1} = g(x_N)$, $x_N = g(x_{N-1})$, $x_{N-1} = g(x_{N-2})$, то получим: $|x_{N+1} - x_N| = |g(x_N) - g(x_{N-1})|$.

По теореме Лагранжа, $|g'(x_N)| = \frac{|g(x_N) - g(x_{N-1})|}{|x_N - x_{N-1}|}$, где $\bar{x} \in [x_{N-1}, x_N]$.

Тогда $|x_{N+1} - x_N| = |g'(\bar{x})| \cdot |x_N - x_{N-1}| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$.

Очевидно, что $|x_{N+1} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}| \leq q^2 \cdot |x_{N-1} - x_{N-2}| \leq \dots \leq q^N \cdot |x_1 - x_0|$.

Каждый из членов ряда $x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_N - x_{N-1}) + \dots$, начиная со второго, не превосходит $q^N \cdot |x_1 - x_0|$, а поскольку знаменатель геометрической прогрессии $q < 1$, то в силу сходимости данной геометрической прогрессии рассматриваемый ряд сходится к необходимому решению.

Так как $|x_{N+1} - x_N| \geq (1-q) \cdot |\bar{x} - x_N|$ и $|x_{N+1} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$, а также согласно неравенству $\varepsilon < |\bar{x} - x_N|$, получим, что

$(1-q) \cdot |\bar{x} - x_N| \leq q \cdot |x_N - x_{N-1}|$ или $|x_N - x_{N-1}| \geq \frac{1-q}{q} \cdot |\bar{x} - x_N|$, то есть

$$|x_N - x_{N-1}| > \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon.$$

В данной лабораторной работе метод итераций ("METHOD OF ITERATIONS") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "0":

1.1. На искомом отрезке $[a_0^I, b_0^I]$ при соблюдении условий $a_0^I < b_0^I$ и $f(a_0^I) \cdot f(b_0^I) < 0$ осуществляется ввод в символьном виде уравнения функции $y = g(x)$, исходя из уравнения $x = g(x)$ и неравенства $a_0^I \leq g(x_N^I) \leq b_0^I$.

1.2. Осуществляется ввод значения знаменателя геометрической прогрессии q , исходя из условия

$$|g'(x_N^I)| < q < 1.$$

- 1.3. На искомом отрезке $[a_0^I, b_0^I]$ при соблюдении условий $a_0^I < b_0^I$ и $f(a_0^I) \cdot f(b_0^I) < 0$ выбирается абсцисса точки начального приближения с координатами $(x_0^I, f(x_0^I))$, исходя из неравенства $a_0^I < x_0^I < b_0^I$.
2. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):
- 2.1. Устанавливается значение абсциссы точки с координатами $(x_N^I, f(x_N^I))$ при соблюдении условия $a_0^I < x_N^I < b_0^I$, исходя из соотношения $x_N^I = g(x_{N-1}^I)$.
- 2.2. Если достигнута истинность выражения $|x_N^I - x_{N-1}^I| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_{\varepsilon}^I = N$ и в качестве приближенного значения действительного корня уравнения x_{ε}^I выбирается значение $x_{\varepsilon}^I = x_N^I$.
- 2.3. Если $|x_N^I - x_{N-1}^I| > \frac{1-q}{q} \varepsilon$, то осуществляется переход к следующей итерации.

1.2.2. Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по нахождению приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXEQU" может быть разделена на три этапа.

1 этап – "Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента (что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов), каждой из которых предлагаются различные

исходные данные символьной записи самого уравнения $f(x)=0$, а также значений a_0 , b_0 и ε .

Нахождение приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

- *аналитическим* – выполнение вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*”;
- *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков “*GrAPH-TaBLE*”.

II этап – “Приближенные решения алгебраических и трансцендентных уравнений с использованием метода дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций в зависимости от различных значений $\varepsilon > 0$ с применением представленной в графическом калькуляторе программы “APROXEQU”

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные символьной записи самого уравнения $f(x)=0$, значений a_0 , b_0 , а также несколько значений ε в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно проведут анализ функции $f(x)$ на предмет выявления количества действительных изолированных корней уравнения $f(x)=0$ и определения интервалов изоляции для данных действительных корней, а также по предлагаемым значениям концов одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами “0”, “1” и “2” согласно методу дихотомии (бисекции), комбинированному методу хорд и касательных (Ньютона) и методу итераций.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы “APROXEQU”.

III этап – “Сравнительный анализ методов дихотомии (бисекции), комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона), метода итераций в результате реализации приближенных решений

алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений ε "

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных решений алгебраических и трансцендентных уравнений в зависимости от различных значений ε .

Для этого, согласно результатам расчетов, необходимо заполнить совокупную таблицу 5 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений ε , на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Таблица 5

Совокупная таблица по лабораторной работе №2

Название метода	Метод дихотомии (бисекции)				Комбинированный метод хорд и касательных (метод Ньютона)			
	s_ε^D	x_ε^D	$x_\varepsilon^D - x_R$	$f(x_\varepsilon^D)$	s_ε^{CT}	x_ε^{CT}	$x_\varepsilon^{CT} - x_R$	$f(x_\varepsilon^{CT})$
Значение ε								
ε_1								
...								
ε_X								
Название метода	Метод итераций							
	Значение ε	s_ε^I	x_ε^I	$x_\varepsilon^I - x_R$				
ε_1								
...								
ε_X								

1.2.3. Описание программы с примером

Перейдем непосредственно к рассмотрению программы "APROXEQU".

Описание программы "APROXEQU" приведем на примере нахождения приближенного значения действительного изолированного корня x уравнения $2x^3 - 5x^2 + 3 = 0$ с заданным значением $\varepsilon = 0,02$ в сопровождении логически расположенных на рис. 5 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGraM" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "APROXEQU" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 5A).

Последовательные нажатия клавиши "EXE" служат для отображения следующих окон:

1. Окна диалога для ввода в символьном виде уравнения функции, отражающей левую часть уравнения $f(x)=0$, то есть $y_1(x) = f(x)$ ["Y1"] (рис. 5B).
2. Окна построения графика функции, отражающей левую часть уравнения $f(x)=0$, то есть $y_1(x) = f(x)$ ["Y1"] (рис. 5C).
3. Окна диалога для ввода значений ε ["EPS"] и значения точного решения исходного уравнения x_R ["XR"] с выводом значения функции $y_1(x_R) = f(x_R)$ ["Y1(XR)"] (рис. 5D).

При работе с нижеизложенными меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 5E):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD EQ FUNC Y1 (2)** – перезагрузка в символьном виде уравнения функции, отражающей левую часть уравнения

- $f(x)=0$, то есть $y_1(x)=f(x)$ ["Y1"], с поочередным отображением соответствующих окон.
- **RELOAD EPS XR (3)** – перезагрузка значений ε ["EPS"] и точного значения x_R ["XR"] с отображением соответствующего окна.
 - **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка в символьном виде функции, отражающей левую часть уравнения $f(x)=0$, то есть $y_1(x)=f(x)$ ["Y1"], значений ε ["EPS"] и значения точного решения уравнения x_R ["XR"] с поочередным отображением соответствующих окон.
 - **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения продолжения выполнения расчетов в результате последовательного ввода цифры "1" и нажатия клавиши "EXE" открывается меню со следующими позициями (рис. 5F):

- **MET DICHOTOMY (1)** – вычисление приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D с помощью метода дихотомии (бисекции) с поочередным отображением следующих окон (рис. 5G):
 - ✓ Окна диалога метода дихотомии для ввода значения абсциссы точки с координатами $(a_0^D, f(a_0^D))$, то есть a_0^D ["A0D"].
 - ✓ Окна поочередного вывода для метода дихотомии значений функции $f(a_0^D)$ ["Y1(A0D)"], первой $f'(a_0^D)$ ["d/dx(Y1(A0D))"] и второй $f''(a_0^D)$ ["d²/dx²(Y1(A0D))"] производных для точки с координатами $(a_0^D, f(a_0^D))$.
 - ✓ Окна диалога метода дихотомии для ввода значения абсциссы точки с координатами $(b_0^D, f(b_0^D))$, то есть b_0^D ["B0D"].
 - ✓ Окна поочередного вывода для метода дихотомии значений функции $f(b_0^D)$ ["Y1(B0D)"], первой $f'(b_0^D)$ ["d/dx(Y1(B0D))"] и второй $f''(b_0^D)$ ["d²/dx²(Y1(B0D))"] производных для точки с координатами $(b_0^D, f(b_0^D))$.
 - ✓ Окна меню следующего содержания:
 - ❖ **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение выполнения продолжения расчетов.

- ❖ *RELOAD A0D B0D* (2) – перезагрузка для метода дихотомии (бисекции) значений абсцисс точек с координатами $(a_0^D, f(a_0^D))$ и $(b_0^D, f(b_0^D))$, то есть a_0^D [“A0D”] и b_0^D [“B0D”], с поочередным отображением соответствующих окон и возвратом в данное меню.
- ❖ *OR PREVIOUS* (3) – возврат в меню выбора численных методов расчетов.
- ✓ Окна вывода для метода дихотомии значений абсцисс точек с координатами $(a_0^D, f(a_0^D))$ и $(b_0^D, f(b_0^D))$, то есть a_0^D [“A0D”] и b_0^D [“B0D”].
- ✓ Окна вывода для метода дихотомии значений количества шагов итераций s_ε^D [“SEPSD”] и приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^D [“XEPSD”].
- ✓ Окна вывода для метода дихотомии значений разности между приближенным значением действительного корня уравнения x_ε^D и его точным значением x_R , то есть $x_\varepsilon^D - x_R$ [“XEPSD-XR”], а также значения функции в точке с абсциссой, равной приближенному значению действительного корня уравнения x_ε^D , то есть $f(x_\varepsilon^D)$ [“Y1(XEPSD)”].
- **MET CHORD TANGEN** (2) – вычисление приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^{CT} с помощью комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) с поочередным отображением следующих окон (рис. 5Н):
 - ✓ Окна диалога комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) для ввода значения абсциссы точки с координатами $(a_0^{CT}, f(a_0^{CT}))$, то есть a_0^{CT} [“A0CT”].
 - ✓ Окна поочередного вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значений функции $f(a_0^{CT})$ [“Y1(A0CT)”], первой $f'(a_0^{CT})$ [“d/dx(Y1(A0CT))”] и второй $f''(a_0^{CT})$ [“d²/dx²(Y1(A0CT))”] производных для точки с координатами $(a_0^{CT}, f(a_0^{CT}))$.
 - ✓ Окна диалога комбинированного метода хорд и касательных (метода Ньютона) для ввода значения абсциссы точки с координатами $(b_0^{CT}, f(b_0^{CT}))$, то есть b_0^{CT} [“B0CT”].

- ✓ Окна поочередного вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значений функции $f(b_0^{CT})$ ["Y1(BOCT)"], первой $f'(b_0^{CT})$ ["d/dx(Y1(BOCT))"] и второй $f''(b_0^{CT})$ ["d²/dx²(Y1(BOCT))"] производных для точки с координатами $(b_0^{CT}, f(b_0^{CT}))$.
- ✓ Окна меню следующего содержания:
 - ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение выполнения продолжения расчетов.
 - ❖ RELOAD A0CT BOCT (2) – перезагрузка для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значений абсцисс точек с координатами $(a_0^{CT}, f(a_0^{CT}))$ и $(b_0^{CT}, f(b_0^{CT}))$, то есть a_0^{CT} ["A0CT"] и b_0^{CT} ["BOCT"] с поочередным отображением соответствующих окон и возвратом в данное меню.
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в меню выбора методов расчетов.
- ✓ Окна вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) установленного значения абсциссы начальной точки с координатами $(x_0^{CT}, f(x_0^{CT}))$, то есть x_0^{CT} ["X0CT"], из которой проводится первая касательная, исходя из значения выражения $f(a_0^{CT}) \cdot f''(a_0^{CT})$ ["Y1(A0CT) * d²/dx²(Y1(A0CT))"].
- ✓ Окна вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) установленного значения абсциссы начальной точки с координатами $(x_0^{CT}, f(x_0^{CT}))$, то есть x_0^{CT} ["X0CT"], из которой проводится первая касательная, исходя из значения выражения $f(b_0^{CT}) \cdot f''(b_0^{CT})$ ["Y1(BOCT) * d²/dx²(Y1(BOCT))"].
- ✓ Окна вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значений абсцисс точек с координатами $(a_0^{CT}, f(a_0^{CT}))$ и $(b_0^{CT}, f(b_0^{CT}))$, то есть a_0^{CT} ["A0CT"] и b_0^{CT} ["BOCT"].
- ✓ Окна вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значения количества шагов итераций s_e^{CT} ["SEPSCT"] и приближенного значения действительного корня уравнения x_e^{CT} ["XEPSCT"].

- ✓ Окна вывода для комбинированного метода хорд и касательных (Ньютона) значений разности между приближенным значением действительного корня уравнения x_ε^{CT} и его точным значением x_R , то есть $x_\varepsilon^{CT} - x_R$ ["XEPSCT-XR"], а также значения функции в точке с абсциссой, равной приближенному значению действительного корня уравнения x_ε^{CT} , то есть $f(x_\varepsilon^{CT})$ ["Y1(XEPSCT)"].
- **МЕТ ITERATION (3)** – вычисление приближенного значения действительного корня уравнения x_ε^I с помощью метода итераций с поочередным отображением следующих окон (рис. 5I):
 - ✓ Окна диалога метода итераций для ввода значения абсциссы точки с координатами $(a_0^I, f(a_0^I))$, то есть a_0^I ["A0I"].
 - ✓ Окна поочередного вывода для метода итераций значений функции $f(a_0^I)$ ["Y1(A0I)"], первой $f'(a_0^I)$ ["d/dx(Y1(A0I))"] и второй $f''(a_0^I)$ ["d²/dx²(Y1(A0I))"] производных для точки с координатами $(a_0^I, f(a_0^I))$.
 - ✓ Окна диалога метода итераций для ввода значения абсциссы точки с координатами $(b_0^I, f(b_0^I))$, то есть b_0^I ["B0I"].
 - ✓ Окна поочередного вывода для метода итераций значений функции $f(b_0^I)$ ["Y1(B0I)"], первой $f'(b_0^I)$ ["d/dx(Y1(B0I))"] и второй $f''(b_0^I)$ ["d²/dx²(Y1(B0I))"] производных для точки с координатами $(b_0^I, f(b_0^I))$.
 - ✓ Окна меню следующего содержания:
 - ❖ *CONTINUE CALCUL (1)* – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
 - ❖ *RELOAD A0I B0I (2)* – перезагрузка для метода итераций значений абсцисс точек с координатами $(a_0^I, f(a_0^I))$ и $(b_0^I, f(b_0^I))$, то есть a_0^I ["A0I"] и b_0^I ["B0I"] с поочередным отображением соответствующих окон и возвратом в данное меню.
 - ❖ *OR PREVIOUS (3)* – возврат в меню выбора методов расчетов.
 - ✓ Окна диалога для метода итераций вывода в символьном виде уравнения функции $y_2(x) = x$ ["Y2"] и ввода в

символьном виде уравнения функции $y_3(x) = g(x)$ ["Y3"], исходя из неравенств $a_0^I \leq y_3(x^I) \leq b_0^I$ ["A0I≤Y3≤B0I"] и $a_0^I \leq x^I \leq b_0^I$ ["A0I≤X1≤B0I"].

- ✓ Окна совместного построения графиков функций $y_2(x) = x$ ["Y2"] и $y_3(x) = g(x)$ ["Y3"].
- ✓ Окна диалога для вывода в символьном виде уравнения функций $y_4(x) = y_3'(x)$ ["Y4"] и $y_5(x) = 1$ ["Y5"].
- ✓ Окна совместного построения графиков функций $y_4(x) = y_3'(x)$ ["Y4"] и $y_5(x) = 1$ ["Y5"].
- ✓ Окна диалога метода итераций для ввода значения знаменателя геометрической прогрессии q ["Q"], согласно условию $|g'(x)| < q < 1$, и абсциссы точки начального приближения с координатами $(x_0^I, f(x_0^I))$, то есть x_0^I ["X0I"], исходя из неравенства $a_0^I < x_0^I < b_0^I$.
- ✓ Окна вывода для метода итераций значений абсцисс точек с координатами $(a_0^I, f(a_0^I))$ и $(b_0^I, f(b_0^I))$, то есть a_0^I ["A0I"] и b_0^I ["B0I"].
- ✓ Окна вывода для метода итераций значения количества шагов итераций s_ϵ^I ["SEPSI"] и приближенного значения действительного корня уравнения x_ϵ^I ["XEPSI"].
- ✓ Окна вывода для метода итераций значений разности между приближенным значением действительного корня уравнения x_ϵ^I и его точным значением x_R , то есть $x_\epsilon^I - x_R$ ["XEPSI-XR"], а также значения функции в точке с абсциссой, равной приближенному значению действительного корня уравнения x_ϵ^I , то есть $f(x_\epsilon^I)$ ["YI(XEPSI)"].

➤ **ITOGY (4)** – последовательный сравнительный анализ полученных результатов с поочередным отображением следующих окон:

- ✓ Окна вывода совокупной таблицы исходных данных и результатов (матрица "Z") (рис. 5J).

➤ **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы результаты всех промежуточных расчетов оседают в списках согласно таблице 6 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме

выполнения статистических расчетов "STATistics"), тогда как итоговые результаты проецируются в матрице "Z" согласно таблице 7 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix").

Таблица 6

Содержимое списков List 1...List 20

Список	Значения	Список	Значения	Список	Значения
List 1	a_N^D	List 9	a_N^{CT}	List 16	x_{N-1}^I
List 2	$f(a_N^D)$	List 10	$f(a_N^{CT})$	List 17	x_N^I
List 3	b_N^D	List 11	$f'(a_N^{CT})$	List 18	$f(x_N^I)$
List 4	$f(b_N^D)$	List 12	b_N^{CT}	List 19	$g(x_N^I)$
List 5	x_N^D	List 13	$f(b_N^{CT})$	List 20	$ x_N^I - g(x_N^I) $
List 6	$f(x_N^D)$	List 14	$f'(b_N^{CT})$		
List 7	$f'(x_N^D)$	List 15	$ b_N^D - a_N^D $		
List 8	$ b_N^D - a_N^D $				

Таблица 7

Содержимое матрицы "Z"

№	1	2	3	4	5	6	7
1	ε	a_0^D	$f(a_0^D)$	$f'(a_0^D)$	$f''(a_0^D)$	a_0^{CT}	$f(a_0^{CT})$
2	q	b_0^D	$f(b_0^D)$	$f'(b_0^D)$	$f''(b_0^D)$	b_0^{CT}	$f(b_0^{CT})$
3	x_R	x_0^D	$f(x_0^D)$	$f'(x_0^D)$	$f''(x_0^D)$	x_0^{CT}	$f(x_0^{CT})$
4	$f(x_R)$	s_ε^D	x_ε^D	$x_\varepsilon^D - x_R$	$f(x_\varepsilon^D)$	s_ε^{CT}	x_ε^{CT}
№	8	9	10	11	12	13	
1	$f'(a_0^{CT})$	$f''(a_0^{CT})$	a_0^I	$f(a_0^I)$	$f'(a_0^I)$	$f''(a_0^I)$	
2	$f'(b_0^{CT})$	$f''(b_0^{CT})$	b_0^I	$f(b_0^I)$	$f'(b_0^I)$	$f''(b_0^I)$	
3	$f'(x_0^{CT})$	$f''(x_0^{CT})$	x_0^I	$f(x_0^I)$	$f'(x_0^I)$	$f''(x_0^I)$	
4	$x_\varepsilon^{CT} - x_R$	$f(x_\varepsilon^{CT})$	s_ε^I	x_ε^I	$x_\varepsilon^I - x_R$	$f(x_\varepsilon^I)$	

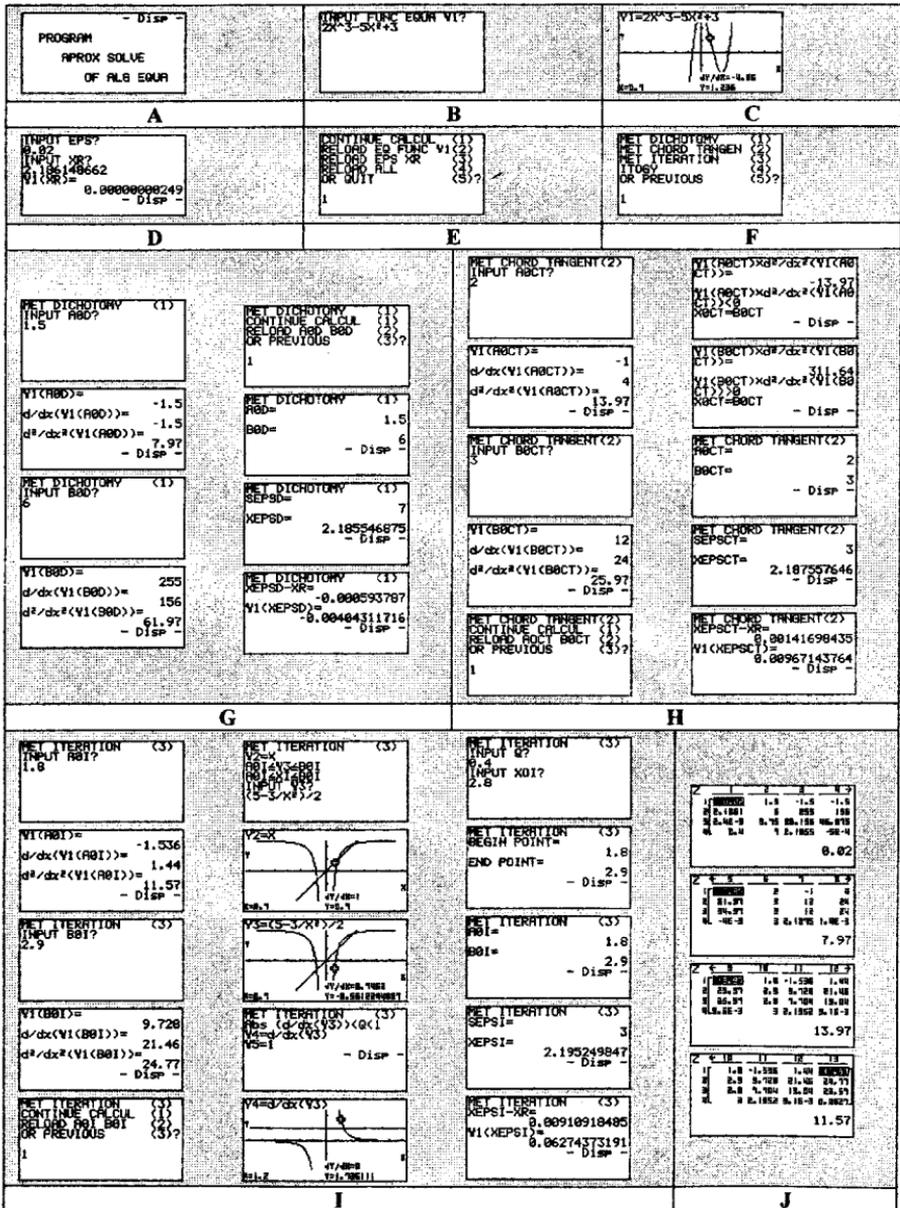


Рис. 5. Скриншоты из программы "APROXEQU"

1.3. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) и их сравнительный анализ (программа "APROXINT", раздел "Интегральное исчисление").

Цель работы: реализовать приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (формула Симпсона) для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXINT".

1.3.1. Теоретический аспект

При вычислениях значений определенных интегралов нередко встречаются следующие проблемы:

1. Невозможность или сложность выражения первообразной функции через элементарные функции.
2. Аналитическое задание подинтегральной функции в виде таблицы значений функции в зависимости от аргумента.
3. Графическое задание подинтегральной функции с использованием соответствующего графика значений функции в зависимости от аргумента.

В подобных ситуациях для вычисления приближенных значений определенных интегралов используются численные методы.

Согласно методу механических квадратур, подинтегральную функцию $y = f(x)$ можно заменить интерполяционным многочленом степени "S" в силу приближенных вычислений значений функции $y = f(x)$:

$$P_S(x) = a_S x^S + a_{S-1} x^{S-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

$$\text{причем } P_S(x_i) = y_i, \text{ где } i = 0, 1, \dots, N.$$

Геометрическая интерпретация метода заключается в том, что график исходной функции $y = f(x)$ заменяется «параболой степени "S"», то есть $y = f(x) = P_S(x) = a_S x^S + a_{S-1} x^{S-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, проходящей через "S + 1" точек графика данной функции.

В данной лабораторной работе интерполяционный многочлен степени "S" представляется в следующем виде:

$$P_S(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + a_S \cdot (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Приближенное значение определенного интеграла от подинтегральной функции $y = f(x)$ на заданном отрезке $[a_0, b_0]$ равно значению определенного интеграла от интерполяционного многочлена на заданном отрезке $[a_0, b_0]$, при этом осуществляется деление данного отрезка на определенное количество равных меньших отрезков, или шагов, в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α , осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на каждом из полученных отрезков с последующим нахождением приближенного значения определенного интеграла на заданном отрезке $[a_0, b_0]$ как суммы найденных приближенных значений определенных интегралов на каждом из равных меньших отрезков.

Таким образом, рассматриваемые в рамках данной лабораторной работы численные методы используются для приближенных вычислений определенных интегралов от подинтегральных функций $f(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$ в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α .

Рассмотрим логические основы реализации расчетов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) (замена подинтегральной функции интерполяционными многочленами нулевой, первой и второй степеней соответственно) для вычислений приближенных значений определенных интегралов в зависимости от различных значений a_0 , b_0 , s_α или h_α , заложенных в программу "APROXINT".

Формула средних прямоугольников

1. Замена подинтегральной функции интерполяционным многочленом нулевой степени на отрезке

$$[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha].$$

Имеем одно заданное значение подинтегральной функции $y_{1/2} = f(x_{1/2})$ при $x = x_{1/2}$.

Тогда $P_0(x) = f(x_{1/2}) = a_0$ и $y = f(x) \approx P_0(x) = f(x_{1/2})$.

В данном случае график подинтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ заменяется горизонтальной прямой, проходящей через точку с координатами

$$\left(x_{1/2}, f(x_{1/2})\right) = \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}, f\left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2}\right)\right).$$

2. Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_{1/2} - \frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2}} f(x) dx \approx \int_{x_{1/2} - \frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2}} P_0(x) dx = \int_{x_{1/2} - \frac{h_\alpha}{2}}^{x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2}} f(x_{1/2}) dx = \\ &= f(x_{1/2}) \cdot \left(x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2} - x_{1/2} + \frac{h_\alpha}{2}\right) = h_\alpha \cdot f(x_{1/2}) \end{aligned}$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ равно площади прямоугольника со значениями стороны $f(x_{1/2})$ и высоты h_α .

3. Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле средних прямоугольников на отрезке $[a_0, b_0]$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\approx h_\alpha \cdot f(x_{1/2}) \\ \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx h_\alpha \cdot f(x_{1/2}) + h_\alpha \cdot f(x_{3/2}) = \\ &= h_\alpha \cdot (f(x_{1/2}) + f(x_{3/2})) \\ \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \approx \\ &\approx h_\alpha \cdot f(x_{1/2}) + h_\alpha \cdot f(x_{3/2}) + h_\alpha \cdot f(x_{5/2}) = \\ &= h_\alpha \cdot (f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + f(x_{5/2})) \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx = \sum_{J=1}^N \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx \sum_{J=1}^N (h_\alpha \cdot f(x_{(2J-1)/2}))$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_S} f(x) dx = \sum_{J=1}^S \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx \sum_{J=1}^S \left(h_\alpha \cdot f(x_{(2J-1)/2}) \right)$$

В данной лабораторной работе использование формулы средних прямоугольников ("FORMULA OF MIDDLE RECTANGLES") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

1.1. На отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{MR} (при вводимом значении

количества шагов s_α^{MR} по формуле $h_\alpha^{MR} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{MR}}$)

выбирается абсцисса точки подинтегральной функции с координатами $(x_N^{MR}, f(x_N^{MR}))$, то есть x_N^{MR} , согласно следующему соотношению: $x_N^{MR} = x_{N-1}^{MR} + h_\alpha^{MR}$.

1.2. Осуществляется вычисление площади элементарного прямоугольника q_N^{MR} , значение высоты которого $h_\alpha^{MR} = x_N^{MR} - x_{N-1}^{MR} = x_1^{MR} - x_0^{MR}$, согласно следующему соотношению: $q_N^{MR} = h_\alpha^{MR} \cdot f(x_{(2N-1)/2}^{MR})$.

1.3. Осуществляется вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[a_0, x_N^{MR}]$ согласно следующему соотношению: $I_{\alpha N}^{MR} = I_{\alpha(N-1)}^{MR} + q_N^{MR}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^{MR} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{MR} = N$, тогда приближенное значение определенного интеграла $I_\alpha^{MR} = I_{\alpha N}^{MR}$.

1.5. Если $x_N^{MR} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Формула трапеций

1. Замена подинтегральной функции интерполяционным многочленом первой степени на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

Имеем два заданных значения подинтегральной функции: $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$ и $y_1 = f(x_0 + h_\alpha)$ при $x = x_1 = x_0 + h_\alpha$.

Тогда $P_1(x) = f(x_1) = a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) = f(x_0) + a_1 \cdot h_\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_\alpha} \quad \text{и} \quad y = f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0).$$

В данном случае график подинтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ заменяется наклонной прямой, проходящей через точки $(x_{1/2}, f(x_{1/2}))$ и $(x_1, f(x_1)) = (x_0 + h_\alpha, f(x_0 + h_\alpha))$.

2. Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} P_1(x) dx = \\ &= \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) \right) dx. \end{aligned}$$

Выполним замену переменной:

$$t = \frac{x - x_0}{h_\alpha}, \quad x = x_0 + t \cdot h_\alpha, \quad dx = h_\alpha dt.$$

$$x = x_0 \Rightarrow t = 0, \quad x = x_1 = x_0 + h_\alpha \Rightarrow t = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) \right) dx &= \\ &= h_\alpha \int_0^1 (f(x_0) + (f(x_1) - f(x_0)) \cdot t) dt = \end{aligned}$$

$$= h_\alpha \cdot \left(f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2} \right) = h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

В итоге имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ равно площади прямоугольной трапеции со значениями оснований $f(x_0)$, $f(x_1)$ и высотой h_α .

3. Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле трапеций на отрезке $[a_0, b_0]$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \\ &= h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_\alpha \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \\ &= h_\alpha \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_2)}{2} + f(x_1) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \approx \\ &\approx h_\alpha \cdot \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h_\alpha \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + h_\alpha \cdot \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} = \\ &= h_\alpha \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_3)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \right). \end{aligned}$$

$$\int_{x_0}^{x_N} f(x) dx = \sum_{J=1}^N \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx h_\alpha \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{J=1}^{N-1} f(x_J) \right).$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_S} f(x) dx = \sum_{J=1}^S \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx \\ &\approx h_\alpha \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_S)}{2} + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right) = \\ &= h_\alpha \cdot \left(\frac{f(a_0) + f(b_0)}{2} + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right) \end{aligned}$$

В данной лабораторной работе использование формулы трапеций ("FORMULA OF TRAPEZOIDS") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^T (при вводимом значении

количества шагов s_α^T по формуле $h_\alpha^T = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^T}$),

выбирается абсцисса точки подинтегральной функции с координатами $(x_N^T, f(x_N^T))$, то есть x_N^T , согласно следующему соотношению: $x_N^T = x_{N-1}^T + h_\alpha^T$.

1.2. Осуществляется расчет площади элементарной прямоугольной трапеции q_N^T , значение высоты которой $h_\alpha^T = x_N^T - x_{N-1}^T = x_1^T - x_0^T$, согласно следующему

соотношению: $q_N^T = h_\alpha^T \cdot \frac{f(x_{N-1}^T) + f(x_N^T)}{2}$.

1.3. Осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[a_0, x_N^T]$ согласно следующему соотношению: $I_{aN}^T = I_{a(N-1)}^T + q_N^T$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^T \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций

$s_\alpha^T = N$, тогда приближенное значение определенного интеграла $I_\alpha^T = I_{\alpha N}^T$.

1.5. Если $x_N^T < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Формула параболических трапеций (Симпсона)

1. Замена подинтегральной функции интерполяционным многочленом второй степени на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

Имеем три заданных значения подинтегральной функции: $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$, $y_{1/2} = f(x_0 + h_\alpha/2)$ при $x = x_{1/2} = x_0 + h_\alpha/2$ и $y_1 = f(x_0 + h_\alpha)$ при $x = x_1 = x_0 + h_\alpha$.

Тогда

$$\begin{aligned} P_2(x) &= a_0 + a_1 \cdot (x_1 - x_0) + a_2 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_{1/2}) = \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_{1/2}) - f(x_0)}{(h_\alpha/2)} \cdot h_\alpha + a_2 h_\alpha \frac{h_\alpha}{2} = f(x_1) \\ f(x_0) + 2(f(x_{1/2}) - f(x_0)) + a_2 \frac{(h_\alpha)^2}{2} &= f(x_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_2 &= \frac{2(f(x_1) - 2f(x_{1/2}) + f(x_0))}{(h_\alpha)^2}. \end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned} y = f(x) \approx P_2(x) &= f(x_0) + \frac{2(f(x_{1/2}) - f(x_0))}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) + \\ &+ \frac{2(f(x_1) - 2f(x_{1/2}) + f(x_0))}{(h_\alpha)^2} (x - x_0) \cdot \left(x - \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

В данном случае график подинтегральной функции $y = f(x)$ на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$ заменяется дугой параболы с вертикальной осью, проходящей через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_{1/2}, f(x_{1/2})) = (x_0 + h_\alpha/2, f(x_0 + h_\alpha/2))$ и $(x_1, f(x_1)) = (x_0 + h_\alpha, f(x_0 + h_\alpha))$.

2. Вычисление приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha]$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} P_2(x) dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \frac{2(f(x_{1/2}) - f(x_0))}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) + \right. \\ \left. + \frac{2(f(x_1) - 2f(x_{1/2}) + f(x_0))}{(h_\alpha)^2} (x - x_0) \cdot \left(x - \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right) \right) dx.$$

Выполним замену переменной:

$$t = \frac{x - x_0}{h_\alpha}, \quad x = x_0 + t \cdot h_\alpha, \quad dx = h_\alpha dt.$$

$$x = x_0 \Rightarrow t = 0, \quad x = x_1 = x_0 + h_\alpha \Rightarrow t = 1.$$

Тогда

$$\int_{x_0}^{x_0+h_\alpha} \left(f(x_0) + \frac{2(f(x_{1/2}) - f(x_0))}{h_\alpha} \cdot (x - x_0) + \right. \\ \left. + \frac{2(f(x_1) - 2f(x_{1/2}) + f(x_0))}{(h_\alpha)^2} (x - x_0) \cdot \left(x - \left(x_0 + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right) \right) dx =$$

$$= h_\alpha \cdot \int_0^1 \left(f(x_0) + 2(f(x_{1/2}) - f(x_0)) \cdot t + \right. \\ \left. + 2(f(x_1) - 2f(x_{1/2}) + f(x_0)) \cdot \left(t - \frac{1}{2} \right) \right) dt =$$

$$= h_\alpha \cdot \left(f(x_0) + (f(x_{1/2}) - f(x_0)) + \frac{f(x_0) - 2f(x_{1/2}) + f(x_1)}{6} \right) =$$

$$= \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1))$$

В итоге имеем:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1))$$

Таким образом, приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[x_0, x_1] = [x_0, x_0 + h_\alpha^{PT}]$ равно площади параболической трапеции, ограниченной осью абсцисс, линиями, параллельными осям ординат, и дугой параболы с вертикальной осью, проходящей через точки $(x_{1/2}, f(x_{1/2}))$,

$$(x_{1/2}, f(x_{1/2})) = (x_0 + h_\alpha/2, f(x_0 + h_\alpha/2)) \text{ и}$$

$$(x_1, f(x_1)) = (x_0 + h_\alpha, f(x_0 + h_\alpha)).$$

3. Вычисление приближенного значения определенного интеграла по формуле параболических трапеций на отрезке $[a_0, b_0]$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1))$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1)) + \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + f(x_2)) = \\ &= \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + f(x_2) + 4(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2})) + 2f(x_1)) = \\ &= \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_2)}{2} + 2(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2})) + f(x_1) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_3} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + 4f(x_{1/2}) + f(x_1)) + \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_1) + 4f(x_{3/2}) + f(x_2)) + \\ &\quad + \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_2) + 4f(x_{5/2}) + f(x_3)) = \\ &= \frac{h_\alpha}{6} \cdot (f(x_0) + f(x_3) + 4(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + f(x_{5/2})) + 2(f(x_1) + f(x_2))) = \\ &= \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_3)}{2} + 2(f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + f(x_{5/2})) + f(x_1) + f(x_2) \right). \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_N} f(x) dx &= \sum_{J=1}^N \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx \\ &\approx \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + 2 \sum_{J=1}^N f(x_{(2J-1)/2}) + \sum_{J=1}^{N-1} f(x_J) \right). \end{aligned}$$

Тогда приближенное значение определенного интеграла на отрезке $[a_0, b_0]$ определяется согласно следующему соотношению:

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_S} f(x) dx = \sum_{J=1}^S \left(\int_{x_{J-1}}^{x_J} f(x) dx \right) \approx \\ &\approx \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_S)}{2} + 2 \sum_{J=1}^S f(x_{(2J-1)/2}) + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right) = \\ &= \frac{h_\alpha}{3} \cdot \left(\frac{f(a_0) + f(b_0)}{2} + 2 \sum_{J=1}^S f(x_{(2J-1)/2}) + \sum_{J=1}^{S-1} f(x_J) \right). \end{aligned}$$

В данной лабораторной работе использование формулы параболических трапеций (Симпсона) ("FORMULA OF PARABOLIC TRAPEZOIDS") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

1.1. На отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{PT} (при вводимом значении количества шагов s_α^{PT} по формуле $h_\alpha^{PT} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{PT}}$), выбирается абсцисса точки подинтегральной функции с координатами $(x_N^{PT}, f(x_N^{PT}))$, то есть x_N^{PT} , согласно следующему соотношению: $x_N^{PT} = x_{N-1}^{PT} + h_\alpha^{PT}$.

1.2. Осуществляется расчет площади элементарной параболической трапеции q_N^{PT} , значение высоты которой $h_\alpha^{PT} = x_N^{PT} - x_{N-1}^{PT} = x_1^{PT} - x_0^{PT}$, согласно следующей формуле:

$$q_N^{PT} = \frac{h_\alpha^{PT}}{6} \cdot \left(f(x_{N-1}^{PT}) + 4f(x_{(2N-1)/2}^{PT}) + f(x_N^{PT}) \right).$$

1.3. Осуществляется расчет приближенного значения определенного интеграла на отрезке $[a_0, x_N^{PT}]$ согласно следующему соотношению: $I_{a_N}^{PT} = I_{a(N-1)}^{PT} + q_N^{PT}$.

1.4. Если достигнута истинность выражения $x_N^{PT} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций

$s_{\alpha}^{PT} = N$, и приближенное значение определенного интеграла $I_{\alpha}^{PT} = I_{\alpha N}^{PT}$.

- 1.5. Если $x_N^{PT} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

1.3.2. Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по реализации приближенных вычислений значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) для различных условий варьирования значений исходных данных (с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной и графическом калькуляторе программы "APROXINT" может быть разделена на три этапа.

I этап – "Приближенные вычисления значений определенных интегралов с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента (что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов), каждой из которых предлагаются различные исходные данные символической записи подинтегральной функции $y = f(x)$, значений абсцисс a_0 , b_0 и количества шагов s_{α} или фиксированного шага h_{α} .

Осуществление приближенных вычислений определенных интегралов может реализовываться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора следующими методами:

- *аналитическим* – осуществление вычислений с использованием стандартных функций в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix";
- *графическим* – выполнение функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме построения и анализа статических графиков "GraPH-TaBLe".

II этап – "Приближенные вычисления значений определенных интегралов по формулам средних прямоугольников, трапеций параболических трапеций (Симпсона) в зависимости от различных значений количества шагов s_{α} или фиксированного шага h_{α} "

применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXINT"?

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные исходные данные символьной записи подинтегральной функции $y = f(x)$, значений абсцисс a_0 , b_0 , а также несколько значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно самостоятельно могут вычислить точные значения определенного интеграла в результате исследования подинтегральной функции $f(x)$, а также по предлагаемым значениям концов одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами "1", "2" и "3" согласно формулам средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона).

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы "APROXINT".

III этап - "Сравнительный анализ формул средних прямоугольников, трапеций, параболических трапеций (Симпсона) в результате реализации приближенных вычислений определенных интегралов в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α "

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных вычислений определенных интегралов в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α .

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 8 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α , на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет, который затем сдается преподавателю, и студенты отвечают на вопросы проверочного тестирования.

Совокупная таблица по лабораторной работе №3

Название метода		Формула средних прямоугольников		Формула трапеций		Формула параболических трапеций (Симпсона)	
Знач. s_α	Знач. h_α	I_α^{MR}	$I_\alpha^{MR} - I_R$	I_α^T	$I_\alpha^T - I_R$	I_α^{PT}	$I_\alpha^{PT} - I_R$
$s_{\alpha 1}$	$h_{\alpha 1}$						
...	...						
$s_{\alpha N}$	$h_{\alpha N}$						

1.3.3. Описание программы с примером

Перейдем непосредственно к рассмотрению программы "APROXINT".

Описание программы "APROXINT" приведем на примере нахождения приближенных значений определенного интеграла для функции, заданной уравнением $f(x) = \frac{4x}{2x^2 - 1}$, со значениями

пределов интегрирования $a_0 = 2$, $b_0 = 5$ в сопровождении логически расположенных на рис. 6 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGraM" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "APROXINT" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 6А).

Последовательные нажатия клавиши "EXE" служат для отображения следующих окон:

1. Окна диалога для ввода в символьном виде подинтегральной

функции для определенного интеграла $\int_{a_0}^{b_0} f(x)dx$, то есть

$$y_1(x) = f(x) \text{ ["Y1"]} \text{ (рис. 6В).}$$

2. Окна построения графика подинтегральной функции $f(x)$, то есть $y_1(x) = f(x)$ ["Y1"] (рис. 6В).

3. Окна диалога для ввода значения абсциссы точки подинтегральной функции с координатами $(a_0, f(a_0))$, то есть a_0 ["A0"], и вывода значения ординаты данной точки, то есть $f(a_0)$ ["Y1(A0)"] (рис. 6C).
4. Окна диалога для ввода значения абсциссы точки подинтегральной функции с координатами $(b_0, f(b_0))$, то есть b_0 ["B0"], и вывода значения ординаты данной точки, то есть $f(b_0)$ ["Y1(B0)"] (рис. 6C).
5. Окна вывода точного значения определенного интеграла

$$I_R = \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx$$
 ["IR"] (рис. 6D).
6. Окна построения геометрической интерпретации точного значения определенного интеграла $I_R = \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx$ на графике подинтегральной функции $y_1(x) = f(x)$ (рис. 6D).

При работе с рассматриваемыми меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 6E):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD FUNC Y1 (2)** – перезагрузка в символьном виде подинтегральной функции $y_1(x) = f(x)$ ["Y1"] с поочередным отображением соответствующих окон.
- **RELOAD A0 B0 (3)** – перезагрузка значений абсцисс точек подинтегральной функции с координатами $(a_0, f(a_0))$ и $(b_0, f(b_0))$, то есть a_0 ["A0"] и b_0 ["B0"], с поочередным отображением соответствующих окон.

- **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка в символьном виде подинтегральной функции $y_i(x) = f(x)$ ["YI"], а также значений абсцисс точек подинтегральной функции с координатами $(a_0, f(a_0))$ и $(b_0, f(b_0))$, то есть a_0 ["A0"] и b_0 ["B0"], с поочередным отображением соответствующих окон.
- **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения продолжения выполнения расчетов в результате последовательного ввода цифры "1" и нажатия клавиши "EXE" открывается меню со следующими позициями (рис. 6F):

- **FORM MID RECTANS (1)** – вычисление приближенного значения определенного интеграла I_α^{MR} ["IALMR"] по формуле средних прямоугольников с поочередным отображением следующих окон (рис. 6G):

- ✓ Окна меню со следующими позициями:

- ❖ **CALCUL ON SALMR (1)** – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_α^{MR} ["IALMR"] по формуле средних прямоугольников по вводимому значению количества шагов s_α^{MR} ["SALMR"].

- ❖ **CALCUL ON HALMR (2)** – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_α^{MR} ["IALMR"] по формуле средних прямоугольников по вводимому значению фиксированного шага h_α^{MR} ["HALMR"].

- ❖ **OR PREVIOUS (3)** – возврат в предыдущее меню.

- ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_α^{MR} ["SALMR"] (фиксированного шага h_α^{MR} ["HALMR"]) и вывода значения фиксированного шага h_α^{MR} ["HALMR"] (количества шагов s_α^{MR} ["SALMR"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.

- ✓ Окна меню со следующими позициями:

- ❖ **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.

- ❖ **RELOAD SETUP MR (2)** – перезагрузка значения количества шагов s_α^{MR} ["SALMR"] или фиксированного

- шага h_{α}^{MR} ["HALMR"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
- ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
 - ✓ Окна вывода для формулы средних прямоугольников значений количества шагов s_{α}^{MR} ["SALMR"] и фиксированного шага h_{α}^{MR} ["HALMR"].
 - ✓ Окна вывода для формулы средних прямоугольников приближенного значения определенного интеграла I_{α}^{MR} ["IALMR"] и разности между приближенным и точным значением определенного интеграла $I_{\alpha}^{MR} - I_R$ ["IALMR-IR"].
- **FORM TRAPEZOIDS (2)** – вычисление приближенного значения определенного интеграла I_{α}^T ["IALT"] по формуле трапеций с поочередным отображением следующих окон (рис. 6H):
- ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CALCUL ON SALT (1) – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_{α}^T ["IALT"] по формуле трапеций по вводимому значению количества шагов s_{α}^T ["SALT"].
 - ❖ CALCUL ON HALT (2) – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_{α}^T ["IALT"] по формуле трапеций по вводимому значению фиксированного шага h_{α}^T ["HALT"].
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
 - ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_{α}^T ["SALT"] (фиксированного шага h_{α}^T ["HALT"]) и вывода значения фиксированного шага h_{α}^T ["HALT"] (количества шагов s_{α}^T ["SALT"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
 - ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
 - ❖ RELOAD SETUP T (2) – перезагрузка значения количества шагов s_{α}^T ["SALT"] или фиксированного шага

h_{α}^T ["HALT"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.

- ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
- ✓ Окна вывода для формулы трапеций значений количества шагов s_{α}^T ["SALT"] и фиксированного шага h_{α}^T ["HALT"].
- ✓ Окна вывода для формулы средних прямоугольников приближенного значения определенного интеграла I_{α}^T ["IALT"] и разности между приближенным и точным значением определенного интеграла $I_{\alpha}^T - I_R$ ["IALT-IR"].
- **FORM PARAB TRAPS (3)** – вычисление приближенного значения определенного интеграла I_{α}^{PT} ["IALPT"] по формуле параболических трапеций (Симпсона) с поочередным выводом следующих окон (рис. 6I):
 - ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CALCUL ON SALPT (1) – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_{α}^{PT} ["IALPT"] по формуле параболических трапеций (Симпсона) по вводимому значению количества шагов s_{α}^{PT} ["SALPT"].
 - ❖ CALCUL ON HALPT (2) – продолжение вычислений приближенного значения определенного интеграла I_{α}^{PT} ["IALPT"] по формуле параболических трапеций (Симпсона) по вводимому значению фиксированного шага h_{α}^{PT} ["HALPT"].
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
 - ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_{α}^{PT} ["SALPT"] (фиксированного шага h_{α}^{PT} ["HALPT"]) и вывода значения фиксированного шага h_{α}^{PT} ["HALPT"] (количества шагов s_{α}^{PT} ["SALPT"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
 - ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
 - ❖ RELOAD SETUP PT (2) – перезагрузка значения количества шагов s_{α}^{PT} ["SALPT"] или фиксированного

шага h_{α}^{PT} ["HALPT"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.

❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.

✓ Окна вывода для формулы параболических трапеций (Симпсона) значений количества шагов s_{α}^{PT} ["SALPT"] и фиксированного шага h_{α}^{PT} ["HALPT"].

✓ Окна вывода для формулы параболических трапеций (Симпсона) приближенного значения определенного интеграла I_{α}^{PT} ["IALPT"] и разности между приближенным и точным значением определенного интеграла $I_{\alpha}^{PT} - I_R$ ["IALPT-IR"].

➤ **ИТОГУ (4)** – последовательный сравнительный анализ полученных результатов с поочередным отображением следующих окон:

✓ Окна вывода совокупной таблицы исходных данных и результатов (матрица "Z") (рис. 6J).

➤ **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы результаты всех промежуточных расчетов оседают в списках согласно таблице 9 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения статистических расчетов "STATistics"), тогда как итоговые результаты проецируются в матрице "Z" согласно таблице 10 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix").

Таблица 9

Содержимое списков *List 1...List 20*

Список	Значения	Список	Значения	Список	Значения
List 1	$x_{(2N-1)/2}^{MR}$	List 7	x_{N-1}^T	List 13	x_{N-1}^{PT}
List 2	$f(x_{(2N-1)/2}^{MR})$	List 8	$f(x_{N-1}^T)$	List 14	$f(x_{N-1}^{PT})$
List 3	x_N^{MR}	List 9	x_N^T	List 15	$x_{(2N-1)/2}^{PT}$
List 4	$f(x_N^{MR})$	List 10	$f(x_N^T)$	List 16	$f(x_{(2N-1)/2}^{PT})$
List 5	q_N^{MR}	List 11	q_N^T	List 17	x_N^{PT}
List 6	$I_{\alpha N}^{MR}$	List 12	$I_{\alpha N}^T$	List 18	$f(x_N^{PT})$
				List 19	q_N^{PT}
				List 20	$I_{\alpha N}^{PT}$

Таблица 10

Содержимое матрицы "Z"

Значение	1	2	3	4
1	a_0	s_{α}^{MR}	s_{α}^T	s_{α}^{PT}
2	$f(a_0)$	h_{α}^{MR}	h_{α}^T	h_{α}^{PT}
3	b_0	I_{α}^{MR}	I_{α}^T	I_{α}^{PT}
4	$f(b_0)$	$I_{\alpha}^{MR} - I_R$	$I_{\alpha}^T - I_R$	$I_{\alpha}^{PT} - I_R$
5	$I_R = \int_{a_0}^{b_0} f(x) dx$	0	0	0

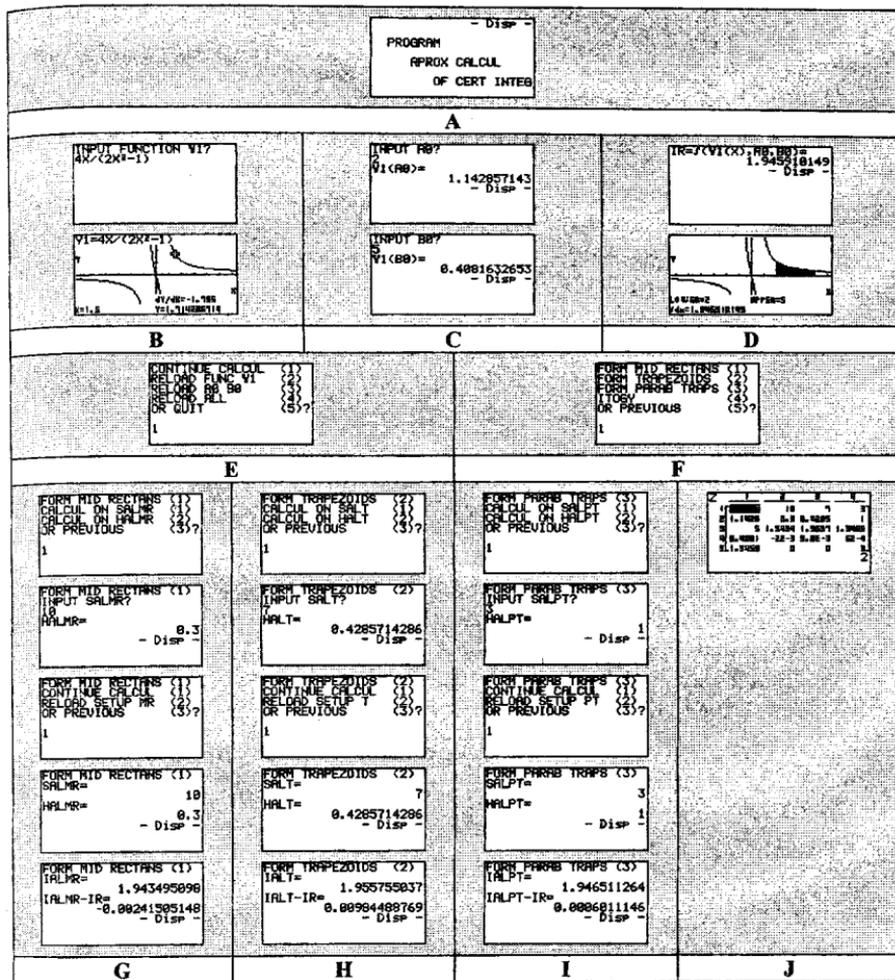


Рис. 6. Скриншоты из программы "APROXINT"

1.4. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Название работы с указанием наименования программы и соответствующего раздела высшей математики: приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутты второго, четвертого порядков точности и их сравнительный анализ (программа "APROXDFE", раздел "Дифференциальные уравнения").

Цель работы: реализовать приближенные решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков точности для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXDFE".

1.4.1. Теоретический аспект

При решении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, часто встречающихся при построении математических моделей различных явлений и процессов, нередко проблема невозможности или сложности решения данных уравнений.

В подобных ситуациях для решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка используют рассматриваемые в рамках данной лабораторной работы численные методы. Суть применяемых численных методов заключается в том, что для заданного обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$y' = f(x, y(x)) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{с начальными условиями,}$$

характеризующими координаты точки $(a_0, y(a_0))$ на некотором отрезке $[a_0, b_0]$, необходимо рассчитать приближенное значение функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$. Осуществляется деление данного отрезка на определенное количество равных меньших отрезков, или шагов, в зависимости от заданного значения количества шагов s_α или значения фиксированного шага h_α , расчет приближенного значения функции со значением абсциссы конечной точки на каждом из полученных отрезков, при этом приближенное значение функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ определяется как значение функции со значением абсциссы конечной точки последнего из полученных отрезков.

Рассмотрим логические основы реализации методов Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков для выполнения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого рода в зависимости от различных значений a_0 , $y(a_0)$, b_0 , s_α или h_α , заложенных в программу "APROXDFE".

Метод Эйлера

Исходя из уравнения касательной, проходящей из точки с координатами $(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$ к графику исходной функции $y(x)$, то есть $y_1(x_N) = y(x_{N-1}) + y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1})$, учитывая, что $y'(x_N) = f(x_N, y(x_N))$ или $y'(x_{N-1}) = f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$ и $x_N - x_{N-1} = h_\alpha$, получим соотношение: $\Delta y(x_N) = y_1(x_N) - y(x_{N-1}) = y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1}) = f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) \cdot h_\alpha$.

Таким образом, в методе Эйлера вычисление приближенного значения координат точки исходной функции с координатами $(x_N, y(x_N))$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$ исходной функции, осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} y(x_N) &= y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) \cdot h_\alpha, \\ x_N &= x_{N-1} + h_\alpha. \end{aligned}$$

Полученные соотношения можно получить и другими способами.

Например, используя формулировку вычисления определенного интеграла для функции $f(x, y(x))$, учитывая, что $y'(x_N) = f(x_N, y(x_N))$ или $y'(x_{N-1}) = f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$ и $x_N - x_{N-1} = h_\alpha$, можно получить следующее соотношение:

$$\Delta y(x_N) = y(x_N) - y(x_{N-1}) = y'(x_{N-1}) \cdot (x_N - x_{N-1}) = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) dx.$$

По формуле прямоугольников получим, что

$$\Delta y(x_N) = y(x_N) - y(x_{N-1}) = \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x, y(x)) dx = f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) h_\alpha.$$

Тогда вычисление приближенных значений координат точки исходной функции с координатами $(x_N, y(x_N))$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$, по методу Эйлера осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) \cdot h_\alpha, \\ x_N = x_{N-1} + h_\alpha.$$

Также соотношения метода Эйлера можно получить как частный случай методов Рунге-Кутты.

В методах Рунге-Кутты определенный интеграл определяется в виде интерполяционного многочлена согласно следующему соотношению:

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) dx = \\ = y(x_{N-1}) + \sum_{J=1}^S p_J \cdot K_J(h_\alpha),$$

где p_J – коэффициенты, зависящие от S ; $K_J(h_\alpha)$ – функции, зависящие от вида подинтегральной функции $f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$ и значения фиксированного шага h_α .

В общем случае значения p_J и $K_J(h_\alpha)$ определяются согласно следующим соотношениям:

$$K_1(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1})), \\ K_2(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1} + \alpha_2 \cdot h_\alpha, y(x_{N-1}) + \beta_{21} \cdot K_1(h_\alpha)), \\ K_3(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1} + \alpha_3 \cdot h_\alpha, y(x_{N-1}) + \beta_{31} \cdot K_1(h_\alpha) + \beta_{32} \cdot K_2(h_\alpha)), \\ \dots \\ K_S(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f \left(x_{N-1} + \alpha_S \cdot h_\alpha, y(x_{N-1}) + \beta_{S1} \cdot K_1(h_\alpha) + \dots + \right. \\ \left. + \beta_{S,S-1} \cdot K_{S-1}(h_\alpha) \right).$$

Значения p_J , α_S и $\beta_{S,S-1}$ получают из соображений высокой точности вычислений.

Если $p_1 = 1$ и $K_1(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$, то получим соотношение:

$$y(x_N) = y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) dx = \\ = y(x_{N-1}) + p_1 \cdot K_1(h_\alpha) = y(x_{N-1}) + h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1})).$$

Таким образом, метод Эйлера является методом Рунге-Кутты первого порядка.

В данной лабораторной работе метод Эйлера (“METHOD OF EULER”) имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

- 1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^E (при вводимом значении количества шагов s_α^E по формуле $h_\alpha^E = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^E}$), выбирается абсцисса точки графика исходной функции с координатами $(x_N^E, y(x_N^E))$, то есть x_N^E , согласно следующему соотношению: $x_N^E = x_{N-1}^E + h_\alpha^E$.
- 1.2. Осуществляется вычисление приближенного значения ординаты точки исходной функции с координатами $(x_N^E, y(x_N^E))$, то есть $y(x_N^E)$, согласно следующим соотношениям:
- $$y(x_N^E) = y(x_{N-1}^E) + \Delta y(x_N^E) = y(x_{N-1}^E) + h_\alpha^E \cdot f(x_{N-1}^E, y(x_{N-1}^E)),$$
- $$x_N^E = x_{N-1}^E + h_\alpha^E.$$
- 1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^E \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^E = N$, тогда приближенное значение исходной функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ определяется согласно соотношению $y(b_0^E) = y(x_N^E)$.
- 1.4. Если $x_N^E < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Рунге-Кутты 2-го порядка

В методе Рунге-Кутты второго порядка имеем следующие соотношения:

если $p_1 = 0$, то $K_1(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$;

если $p_2 = 1$, то $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$ и

$$K_2(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{1}{2} \cdot K_1(h_\alpha)\right) =$$

$$= h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))\right).$$

В итоге получим соотношение:

$$\begin{aligned}
 y(x_N) &= y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) dx = \\
 &= y(x_{N-1}) + \sum_{j=1}^2 p_j \cdot K_j(h_\alpha) = y(x_{N-1}) + p_1 \cdot K_1(h_\alpha) + p_2 \cdot K_2(h_\alpha) = \\
 &= y(x_{N-1}) + h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{1}{2} K_1(h_\alpha)\right) = \\
 &= y(x_{N-1}) + h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))\right).
 \end{aligned}$$

Тогда вычисление приближенных значений координат точки графика исходной функции с координатами $(x_N, y(x_N))$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$, по методу Рунге-Кутты второго порядка осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}
 x_{(2N-1)/2} &= x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, \\
 y(x_{(2N-1)/2}) &= y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1})), \\
 y(x_N) &= y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + h_\alpha \cdot f(x_{(2N-1)/2}, y(x_{(2N-1)/2})), \\
 x_N &= x_{N-1} + h_\alpha.
 \end{aligned}$$

В данной лабораторной работе метод Рунге-Кутты второго порядка ("METHOD OF RUNGA-KUTTA 2") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0 < b_0$, исходя из вводимого или рассчитанного значения фиксированного шага h_α^{RK2} (при вводимом значении количества шагов s_α^{RK2} по формуле $h_\alpha^{RK2} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{RK2}}$),

выбирается абсцисса точки графика исходной функции с координатами $(x_N^{RK2}, y(x_N^{RK2}))$, то есть x_N^{RK2} , согласно следующему соотношению: $x_N^{RK2} = x_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2}$.

1.2. Осуществляется вычисление приближенного значения ординаты точки исходной функции с координатами

$(x_N^{RK2}, y(x_N^{RK2}))$, то есть $y(x_N^{RK2})$, согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} x_{(2N-1)/2}^{RK2} &= x_{N-1}^{RK2} + \frac{h_\alpha^{RK2}}{2}, \\ y(x_{(2N-1)/2}^{RK2}) &= y(x_{N-1}^{RK2}) + \Delta y(x_{(2N-1)/2}^{RK2}) = \\ &= y_{N-1}^{RK2} + \frac{h_\alpha^{RK2}}{2} \cdot f(x_{N-1}^{RK2}, y_{N-1}^{RK2}), \\ y(x_N^{RK2}) &= y(x_{N-1}^{RK2}) + \Delta y(x_N^{RK2}) = \\ &= y_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2} \cdot f(x_{(2N-1)/2}^{RK2}, y_{(2N-1)/2}^{RK2}), \\ x_N^{RK2} &= x_{N-1}^{RK2} + h_\alpha^{RK2}. \end{aligned}$$

- 1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^{RK2} \geq b_0^{RK2}$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{RK2} = N$, тогда приближенное значение исходной функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ определяется согласно соотношению $y(b_0^{RK2}) = y(x_N^{RK2})$.
- 1.4. Если $x_N^{RK2} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

В методе Рунге-Кутты четвертого порядка имеем следующие соотношения:

Если $p_1 = \frac{1}{6}$, то $K_1(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$.

Если $p_2 = \frac{1}{3}$, то $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_{21} = \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} K_2(h_\alpha) &= h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{1}{2} \cdot K_1(h_\alpha)\right) = \\ &= h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{2} \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1}))\right). \end{aligned}$$

Если $p_3 = \frac{1}{3}$, то $\alpha_3 = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = 0$, $\beta_{32} = \frac{1}{2}$ и

$$K_3(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f\left(x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, y(x_{N-1}) + \frac{1}{2} \cdot K_2(h_\alpha)\right).$$

Если $p_4 = \frac{1}{6}$, то $\alpha_4 = 1$, $\beta_{41} = 0$, $\beta_{42} = 0$, $\beta_{43} = 1$ и

$$K_4(h_\alpha) = h_\alpha \cdot f(x_{N-1} + h_\alpha, y(x_{N-1}) + K_3(h_\alpha)).$$

В итоге получим соотношение:

$$\begin{aligned} y(x_N) &= y(x_{N-1}) + \Delta y(x_N) = y(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x_{N-1}, y(x_{N-1})) dx = \\ &= y(x_{N-1}) + \sum_{J=1}^4 p_J \cdot K_J(h_\alpha) = \\ &= y(x_{N-1}) + p_1 \cdot K_1(h_\alpha) + p_2 \cdot K_2(h_\alpha) + p_3 \cdot K_3(h_\alpha) + p_4 \cdot K_4(h_\alpha) = \\ &= y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{6} (K_1(h_\alpha) + 2K_2(h_\alpha) + 2K_3(h_\alpha) + K_4(h_\alpha)). \end{aligned}$$

Тогда вычисление приближенного значения координат точки графика исходной функции с координатами $(x_N, y(x_N))$, исходя из приближенных значений координат точки $(x_{N-1}, y(x_{N-1}))$, по методу Рунге-Кутты четвертого порядка осуществляется согласно следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} K_1(h_\alpha) &= h_\alpha \cdot f(x_{N-1}, y(x_{N-1})), \\ x_{(2N-1)/2} &= x_{N-1} + \frac{h_\alpha}{2}, \\ K_2(h_\alpha) &= h_\alpha \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}, y(x_{N-1}) + \frac{K_1(h_\alpha)}{2}\right), \\ K_3(h_\alpha) &= h_\alpha \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}, y(x_{N-1}) + \frac{K_2(h_\alpha)}{2}\right), \\ x_N &= x_{N-1} + h_\alpha, \\ K_4(h_\alpha) &= h_\alpha \cdot f(x_N, y(x_{N-1}) + K_3(h_\alpha)), \\ y(x_N) &= y(x_{N-1}) + \Delta y(x_{N-1}) = \\ &= y(x_{N-1}) + \frac{h_\alpha}{6} (K_1(h_\alpha) + 2K_2(h_\alpha) + 2K_3(h_\alpha) + K_4(h_\alpha)). \end{aligned}$$

В данной лабораторной работе метод Рунге-Кутты четвертого порядка ("METHOD OF RUNGA-KUTTA 4") имеет следующую реализацию:

1. Итерация с индексом "N" ($N \geq 1$):

1.1. На искомом отрезке $[a_0, b_0]$ при соблюдении условия $a_0^{RK+} < b_0^{RK+}$, исходя из вводимого или рассчитанного

значения фиксированного шага h_α^{RK+} (при вводимом количестве шагов s_α^{MR} по формуле $h_\alpha^{RK+} = \frac{b_0 - a_0}{s_\alpha^{RK+}}$),

выбирается абсцисса точки графика исходной функции с координатами $(x_N^{RK+}, y(x_N^{RK+}))$, то есть x_N^{RK+} , согласно следующему соотношению: $x_N^{RK+} = x_{N-1}^{RK+} + h_\alpha^{RK+}$.

1.2. Осуществляется вычисление приближенных значений ординат точки исходной функции с координатами $(x_N^{RK+}, y(x_N^{RK+}))$, то есть $y(x_N^{RK+})$, согласно соотношениям:

$$K_{1N}(h_\alpha^{RK+}) = h_\alpha^{RK+} \cdot f(x_{N-1}^{RK+}, y(x_{N-1}^{RK+})),$$

$$x_{(2N-1)/2}^{RK+} = x_{N-1}^{RK+} + \frac{h_\alpha^{RK+}}{2},$$

$$K_{2N}(h_\alpha^{RK+}) = h_\alpha^{RK+} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK+}, y(x_{N-1}^{RK+}) + \frac{K_{1N}(h_\alpha^{RK+})}{2}\right),$$

$$K_{3N}(h_\alpha^{RK+}) = h_\alpha^{RK+} \cdot f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK+}, y(x_{N-1}^{RK+}) + \frac{K_{2N}(h_\alpha^{RK+})}{2}\right),$$

$$x_N^{RK+} = x_{N-1}^{RK+} + h_\alpha^{RK+},$$

$$K_{4N}(h_\alpha^{RK+}) = h_\alpha^{RK+} \cdot f(x_N^{RK+}, y(x_{N-1}^{RK+}) + K_{3N}(h_\alpha^{RK+})),$$

$$y(x_N^{RK+}) = y(x_{N-1}^{RK+}) + \Delta y(x_{N-1}^{RK+}) =$$

$$= y(x_{N-1}^{RK+}) + \frac{h_\alpha^{RK+}}{6} \left(K_{1N}(h_\alpha^{RK+}) + 2K_{2N}(h_\alpha^{RK+}) + \right. \\ \left. + 2K_{3N}(h_\alpha^{RK+}) + K_{4N}(h_\alpha^{RK+}) \right)$$

1.3. Если достигнута истинность выражения $x_N^{RK+} \geq b_0$, то итерации прекращаются, количество шагов итераций $s_\alpha^{RK+} = N$, тогда приближенное значение исходной

функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ определяются согласно соотношению $y(b_0^{RK+}) = y(x_N^{RK+})$.

- 1.4. Если $x_N^{RK+} < b_0$, то осуществляется переход к следующей итерации.

1.4.2. Описание этапов проведения лабораторной работы

Лабораторная работа по реализации приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка с использованием методов Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков для различных условий варьирования значений исходных данных с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXDFE" может быть разделена на три этапа.

1 этап – "Приближенные решения дифференциальных уравнений первого порядка с помощью стандартных встроенных функций графического калькулятора"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента, что позволяет выявить различные личностные психологические особенности студентов. Каждой группе предлагаются различные исходные данные символьной записи функции двух переменных $f(x, y(x))$, значений a_0 , b_0 и количества шагов s_α или фиксированного шага h_α .

Реализация точных решений дифференциальных уравнений первого порядка может осуществляться с помощью стандартных встроенных функций калькулятора комбинированным *аналитическим* и *графическим* методами – выполнение совместных математических вычислений и функционального анализа с использованием стандартных функций в режиме выполнения решений дифференциальных уравнений "DIFFerential EQUation".

II этап – "Приближенные решения дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α с применением представленной в графическом калькуляторе программы "APROXDFE"

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает исходные данные символьной записи самой функции двух переменных $f(x, y(x))$, значений a_0 , b_0 и количества шагов s_α или фиксированного шага h_α в рамках одной малой группы.

Предполагается, что студенты предварительно по символьной записи самой функции двух переменных $f(x, y(x))$, а также по предлагаемым значениям концам одного из интервалов изоляции a_0 и b_0 реализуют итерации с индексами "1", "2" и "3" согласно методам Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков.

После этого студенты проведут соответствующие необходимые расчеты с применением реализованной в графическом калькуляторе программы "APROXDFE".

III этап – "Сравнительный анализ методов Эйлера, Рунге-Кутты второго и четвертого порядков в результате реализации приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α "

На данном финальном этапе преподаватель для каждой из малых групп, сформированных на первом этапе, предлагает провести сравнительный анализ реализованных на втором этапе приближенных решений дифференциальных уравнений первого порядка в зависимости от различных значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α .

Для этого согласно результатам расчетов необходимо заполнить совокупную таблицу 11 полученных значений в зависимости, во-первых, от численного метода вычислений, а во-вторых, от значений количества шагов s_α или фиксированного шага h_α , на основе которой формируются итоговые выводы по работе, заполняется отчет с последующей сдачей преподавателю и предлагается ответить на вопросы проверочного тестирования.

Совокупная таблица по лабораторной работе № 4

Название метода		Метод Эйлера		Метод Рунге-Кутта 2-го порядка	
s_α	h_α	$y(b_0^E)$	$y(b_0^E) - y(b_0)$	$y(b_0^{RK2})$	$y(b_0^{RK2}) - y(b_0)$
$s_{\alpha 1}$	$h_{\alpha 1}$				
...	...				
$s_{\alpha N}$	$h_{\alpha N}$				
Название метода		Метод Рунге-Кутта 4-го порядка			
s_α	h_α	$y(b_0^{RK4})$	$y(b_0^{RK4}) - y(b_0)$		
$s_{\alpha 1}$	$h_{\alpha 1}$				
...	...				
$s_{\alpha N}$	$h_{\alpha N}$				

1.4.3. Описание программы с примером

Перейдем непосредственно к рассмотрению программы "APROXDFE".

Описание программы "APROXDFE" приведем на примере нахождения приближенных значений исходной функции $y(b_0)$ в точке с координатами $(b_0, y(b_0))$ для функции двух переменных, заданной уравнением $f(x, y(x)) = x + 0,5y$, со значениями начальных условий $a_0 = 0$, $y(a_0) = 0$, $b_0 = 1$ в сопровождении логически расположенных на рис. 7 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGram" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "APROXDFE" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 7А).

Последовательные нажатия клавиши "EXE" служат для отображения следующих окон:

1. Окна диалога для ввода в символьном виде функции двух переменных, расположенной в правой части дифференциального

уравнения $y' = f(x, y(x))$, то есть $f_{N1}(x, y(x))$ ["fn1(X,Y)"] (рис. 7B).

2. Окна диалога для ввода значений абсциссы и ординаты точки исходной функции с координатами $(a_0, y(a_0))$, то есть a_0 ["A0"] и $y(a_0)$ ["Y(A0)"] (рис. 7C).
3. Окна диалога для ввода значения абсциссы точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть b_0 ["B0"], и точного решения дифференциального уравнения, то есть значения ординаты точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть $y(b_{0R})$ ["Y(BOR)"] (рис. 7D).

При работе с нижеизложенными меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 7E):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD fn1(X,Y) (2)** – перезагрузка в символьном виде функции двух переменных, расположенной в правой части дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$, то есть $f_{N1}(x, y(x))$ ["fn1(X,Y)"], с поочередным отображением соответствующих окон.
- **RELOAD AY(A)BY(B) (3)** – перезагрузка значений абсциссы и ординаты точки исходной функции с координатами $(a_0, y(a_0))$, то есть a_0 ["A0"] и $y(a_0)$ ["Y(A0)"], значения абсциссы точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть b_0 ["B0"], и точного решения дифференциального уравнения, то есть значения ординаты точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть $y(b_{0R})$ ["Y(BOR)"].
- **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка в символьном виде функции двух переменных, расположенной в правой части дифференциального уравнения $y' = f(x, y(x))$, то есть

$f_{N1}(x, y(x))$ ["fn1(X,Y)"], значений абсциссы и ординаты точки исходной функции с координатами $(a_0, y(a_0))$, то есть a_0 ["A0"], и $y(a_0)$ ["Y(A0)"], значения абсциссы точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть b_0 ["B0"], и точного решения дифференциального уравнения, то есть значения ординаты точки исходной функции с координатами $(b_0, y(b_0))$, то есть $y(b_{0R})$ ["Y(B0R)"].

- **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения выполнения расчетов путем ввода цифры "1" и нажатия клавиши "EXE" открывается меню со следующими позициями (рис. 7F):

- **MET EULER (1)** – нахождение приближенного значения исходной функции $y(b_0^E)$ ["Y(B0E)"] в точке с координатами $(b_0^E, y(b_0^E))$ по методу Эйлера с поочередным выводом следующих окон (рис. 7G):

- ✓ Окна меню со следующими позициями:

- ❖ **CALCUL ON SALE (1)** – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^E)$ ["Y(B0E)"] в точке с координатами $(b_0^E, y(b_0^E))$ по методу Эйлера по вводимому значению количества шагов s_α^E ["SALE"].

- ❖ **CALCUL ON HALE (2)** – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^E)$ ["Y(B0E)"] в точке с координатами $(b_0^E, y(b_0^E))$ по методу Эйлера по вводимому значению фиксированного шага h_α^E ["HALE"].

- ❖ **OR PREVIOUS (3)** – возврат в предыдущее меню.

- ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_α^E ["SALE"] (фиксированного шага h_α^E ["HALE"]) и вывода значения фиксированного шага h_α^E ["HALE"] (количества шагов s_α^E ["SALE"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.

- ✓ Окна меню со следующими позициями:

- ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- ❖ RELOAD SETUP E (2) – перезагрузка значения количества шагов s_{α}^E ["SALE"] или фиксированного шага h_{α}^E ["HALE"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
- ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
- ✓ Окна вывода для метода Эйлера значений количества шагов s_{α}^E ["SALE"] и фиксированного шага h_{α}^E ["HALE"].
- ✓ Окна вывода для метода Эйлера приближенного значения исходной функции $y(b_0^E)$ ["Y(BOE)"] в точке с координатами $(b_0^E, y(b_0^E))$ и разности между приближенным и точным значениями исходной функции в точке с координатами $(b_0^E, y(b_0^E))$, то есть $y(b_0^E) - y(b_{OR})$ ["Y(BOE)-Y(BOR)"].
- MET RUN-KUT 2 (2) – нахождение приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK2})$ ["Y(BORK2)"] в точке с координатами $(b_0^{RK2}, y(b_0^{RK2}))$ по методу Рунге-Кутты 2-го порядка с поочередным выводом следующих окон (рис. 7Н):
 - ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CALCUL ON SALRK2 (1) – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK2})$ ["Y(BORK2)"] в точке с координатами $(b_0^{RK2}, y(b_0^{RK2}))$ по методу Рунге-Кутты 2-го порядка по вводимому значению количества шагов s_{α}^{RK2} .
 - ❖ CALCUL ON HALRK2 (2) – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK2})$ ["Y(BORK2)"] в точке с координатами $(b_0^{RK2}, y(b_0^{RK2}))$ по методу Рунге-Кутты 2-го порядка по вводимому значению фиксированного шага h_{α}^{RK2} .
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
 - ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_{α}^{RK2} ["SALRK2"] (фиксированного шага h_{α}^{RK2} ["HALRK2"]) и вывода значения фиксированного шага h_{α}^{RK2} ["HALRK2"]

(количества шагов s_{α}^{RK2} ["SALRK2"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.

- ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
 - ❖ RELOAD SETUP RK2 (2) – перезагрузка значения количества шагов s_{α}^{RK2} ["SALRK2"] или фиксированного шага h_{α}^{RK2} ["HALRK2"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
- ✓ Окна вывода для метода Рунге-Кутты 2-го порядка значений количества шагов s_{α}^{RK2} ["SALRK2"] и фиксированного шага h_{α}^{RK2} ["HALRK2"].
- ✓ Окна вывода для метода Рунге-Кутты 2-го порядка приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK2})$ ["Y(BORK2)"] в точке с координатами $(b_0^{RK2}, y(b_0^{RK2}))$ и разности между приближенным и точным значениями исходной функции в точке с координатами $(b_0^{RK2}, y(b_0^{RK2}))$, то есть $y(b_0^{RK2}) - y(b_{0R})$ ["Y(BORK2)-Y(BOR)"].
- **MET RUN-KUT 4 (3)** – нахождение приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK4})$ ["Y(BORK4)"] в точке с координатами $(b_0^{RK4}, y(b_0^{RK4}))$ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка с поочередным выводом следующих окон (рис. 7I):
 - ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CALCUL ON SALRK4 (1) – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK4})$ ["Y(BORK4)"] в точке с координатами $(b_0^{RK4}, y(b_0^{RK4}))$ по методу Рунге-Кутты 4-го порядка по вводимому значению количества шагов s_{α}^{RK4} ["SALRK4"].
 - ❖ CALCUL ON HALRK2 (2) – продолжение вычисления приближенного значения исходной функции $y(b_0^{RK4})$ ["Y(BORK4)"] в точке с координатами $(b_0^{RK4}, y(b_0^{RK4}))$ по

методу Рунге-Кутты 4-го порядка по вводимому значению фиксированного шага h_{α}^{RK4} ["HALRK4"].

- ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
- ✓ Окна диалога для ввода значения количества шагов s_{α}^{RK4} ["SALRK4"] (фиксированного шага h_{α}^{RK4} ["HALRK4"]) и вывода значения фиксированного шага h_{α}^{RK4} ["HALRK4"] (количества шагов s_{α}^{RK4} ["SALRK4"]) в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
- ✓ Окна меню со следующими позициями:
 - ❖ CONTINUE CALCUL (1) – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
 - ❖ RELOAD SETUP RK4 (2) – перезагрузка значения количества шагов s_{α}^{RK4} ["SALRK4"] или фиксированного шага вычислений h_{α}^{RK4} ["HALRK4"] в зависимости от выбора позиции в предыдущем меню.
 - ❖ OR PREVIOUS (3) – возврат в предыдущее меню.
- ✓ Окна вывода для метода Рунге-Кутты 4-го порядка значений количества шагов s_{α}^{RK4} ["SALRK4"] и фиксированного шага h_{α}^{RK4} ["HALRK4"].
- ✓ Окна вывода для метода Рунге-Кутты 4-го порядка приближенного значения функции $y(b_0^{RK4})$ ["Y(BORK4)] в точке с координатами $(b_0^{RK4}, y(b_0^{RK4}))$ и разности между приближенным и точным значениями исходной функции в точке с координатами $(b_0^{RK}, y(b_0^{RK}))$, то есть $y(b_0^{RK4}) - y(b_{0R})$ ["Y(BORK4)-Y(BOR)"].
- **ITOGY (4)** – последовательный сравнительный анализ полученных результатов с поочередным отображением следующих окон:
 - ✓ Окна вывода совокупной таблицы исходных данных и результатов (матрица "Z") (рис. 7J).
- **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы результаты всех промежуточных расчетов оседают в списках согласно таблице 12 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения статистических расчетов "STATistics"), тогда как итоговые

результаты проецируются в матрице "Z" согласно таблице 13 (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix").

Таблица 12

Содержимое списков List 1...List 20

Список	Значения	Список	Значения	Список	Значения
List 1	$f(x_{N-1}^E, y(x_{N-1}^E))$	List 5	$f(x_{N-1}^{RK2}, y(x_{N-1}^{RK2}))$	List 13	$K_{1N}(h_\alpha^{RK4})$
List 2	$\Delta y(x_N^E)$	List 6	$\Delta y(x_{(2N-1)/2}^{RK2})$	List 14	$x_{(2N-1)/2}^{RK2}$
List 3	x_N^E	List 7	$x_{(2N-1)/2}^{RK2}$	List 15	$K_{2N}(h_\alpha^{RK4})$
List 4	$y(x_N^E)$	List 8	$y(x_{(2N-1)/2}^{RK2})$	List 16	$K_{3N}(h_\alpha^{RK4})$
		List 9	$f\left(x_{(2N-1)/2}^{RK2}, y(x_{(2N-1)/2}^{RK2})\right)$	List 17	$K_{4N}(h_\alpha^{RK4})$
		List 10	$\Delta y(x_N^{RK2})$	List 18	$\Delta y(x_N^{RK4})$
		List 11	x_N^{RK2}	List 19	x_N^{RK4}
		List 12	$y(x_N^{RK2})$	List 20	$y(x_N^{RK4})$

Таблица 13

Содержимое матрицы "Z"

Значение	1	2	3	4
1	a_0	s_α^E	s_α^{RK2}	s_α^{RK4}
2	$y(a_0)$	h_α^E	h_α^{RK2}	h_α^{RK4}
3	b_0	$y(b_0^E)$	$y(b_0^{RK2})$	$y(b_0^{RK4})$
4	$y(b_{0R})$	$y(b_0^E) - y(b_{0R})$	$y(b_0^{RK2}) - y(b_{0R})$	$y(b_0^{RK4}) - y(b_{0R})$

PROGRAM - DISP - APROX SOLVE OF DIFF EQUAT																																	
A																																	
INPUT f1(x,y) IN BY<Y>=f1(x,y)? 2<Y>	INPUT AB? INPUT Y<A0>?	INPUT BB? INPUT V<BB>=? 4.154845877																															
B	C	D																															
CONTINUE CALCUL (1) RELOAD f1(x,y) (2) RELOAD A<A>BY(3) RELOAD ALL (4) OR SUII (5)? 1		MET EULER (1) MET RUN-KUT 2 (2) MET RUN-KUT 4 (3) OR PREVIOUS (5)? 1																															
E	F																																
MET EULER (1) CALCUL ON SALLE (1) CALCUL ON SALLE (2) OR PREVIOUS (5)? 1	MET RUN-KUT 2 (2) CALCUL ON SALRK2 (1) CALCUL ON SALRK2 (2) OR PREVIOUS (5)? 1	MET RUN-KUT 4 (3) CALCUL ON SALRK4 (1) CALCUL ON SALRK4 (2) OR PREVIOUS (5)? 1	<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>		1	2	3	4	1	0	0	0	0	2	1	0	0	0	3	0	1	0	0	4	0	0	1	0	5	0	0	0	1
	1	2	3	4																													
1	0	0	0	0																													
2	1	0	0	0																													
3	0	1	0	0																													
4	0	0	1	0																													
5	0	0	0	1																													
MET EULER (1) INPUT SALLE? 8 HALL= 0.125 - DISP -	MET RUN-KUT 2 (2) INPUT SALRK2? 5 HALRK2= 0.2 - DISP -	MET RUN-KUT 4 (3) INPUT SALRK4? 3 HALRK4= 0.3333333333 - DISP -																															
MET EULER (1) CONTINUE CALCUL (1) RELOAD SETUP E (2) OR PREVIOUS (5)? 1	MET RUN-KUT 2 (2) CONTINUE CALCUL (1) RELOAD SETUP RK2 (4) OR PREVIOUS (5)? 1	MET RUN-KUT 4 (3) CONTINUE CALCUL (1) RELOAD SETUP RK4 (2) OR PREVIOUS (5)? 1																															
MET EULER (1) SALLE= 8 HALL= 0.125 - DISP -	MET RUN-KUT 2 (2) SALRK2= 5 HALRK2= 0.2 - DISP -	MET RUN-KUT 4 (3) SALRK4= 3 HALRK4= 0.3333333333 - DISP -																															
MET EULER (1) V<BBE>= 3.697353542 V<BBE>-V<BBE>= -8.4574915351 - DISP -	MET RUN-KUT 2 (2) V<BBRK2>= 4.18312449 V<BBRK2>-V<BBE>= -8.8457295874 - DISP -	MET RUN-KUT 4 (3) V<BBRK4>= 4.154289293 V<BBRK4>-V<BBE>= -8.8885379487 - DISP -																															
G	H	I	J																														

Рис. 7. Скриншоты из программы "APROXDFE"

2. Практические занятия по аналитической геометрии на плоскости с использованием графического калькулятора CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS

В данной главе представлены разработанные В.В. Богуном практические занятия по аналитической геометрии на плоскости для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности "Математика", с описанием проекта, включающего множество взаимосвязанных задач, с рассмотрением соответствующей авторской программы для графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* и методики ее использования.

В рамках школьного курса геометрии геометрические свойства произвольных треугольников на плоскости рассматриваются только с точки зрения линейных и угловых размеров элементов треугольника. При изучении высшей математики элементарная школьная геометрия возводится на новый уровень через призму аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, суть которой сводится к определению необходимых параметров геометрических фигур исходя из координат точек в двумерном или трехмерном пространстве, что отлично согласовывается с концепцией фундирования с точки зрения повторения полученных знаний в школе на новом витке спирали в вузе.

Основная цель практических занятий состоит в использовании графического калькулятора как средства интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных расчетов, суть которых заключается в нахождении и визуализации параметров геометрических фигур.

При реализации рассматриваемого проекта на основании поставленной цели были сформулированы следующие математические, информационные и дидактические задачи:

1. Изучение геометрических свойств произвольных треугольников на плоскости средствами аналитической геометрии.
2. Применение метода проектов при решении математических задач.
3. Применение различных методических концепций самореализация, самопроверка, принципы наглядного моделирования и фундирования математических знаний по Е.И Смирнову.

4. Применение информационно-коммуникационных технологий при решении математических задач и выполнении проекта в целом.

Фактически все практические занятия сводятся к определению и визуализация геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости исходя из задания значений координат его вершин с использованием соответствующей программы под названием "ANGEOPL".

Содержание проекта включает следующие необходимые компоненты:

1. Теоретический аспект.
2. Описание этапов проведения практических занятий.
3. Описание программы с примером.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

2.1.1 Теоретический аспект

Пусть на плоскости представлены три произвольные точки, образующие произвольный треугольник ($\triangle ABC$), со следующими координатами: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$.

Нахождение уравнений сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC)

Для нахождения уравнения сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC) необходимо воспользоваться уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту: $y = k \cdot x + b$, где k – угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс, b – свободный коэффициент прямой, равный длине отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат от начала координат.

Поскольку для каждой из сторон имеем значения координат двух вершин треугольника, можно реализовать нахождение значений коэффициентов k и b для соответствующих прямых через решение системы двух линейных уравнений.

Для стороны AB треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_A = k_{AB} \cdot x_A + b_{AB} \\ y_B = k_{AB} \cdot x_B + b_{AB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AB} \cdot x_A + b_{AB} = y_A \\ k_{AB} \cdot x_B + b_{AB} = y_B \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{AB} и b_{AB} :

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B},$$

$$b_{AB} = y_B - k_{AB} \cdot x_B = y_B - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_B \text{ или}$$

$$b_{AB} = y_A - k_{AB} \cdot x_A = y_A - \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot x_A.$$

Уравнение стороны AB : $y = k_{AB} \cdot x + b_{AB}$.

Для стороны AC треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_A = k_{AC} \cdot x_A + b_{AC} \\ y_C = k_{AC} \cdot x_C + b_{AC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AC} \cdot x_A + b_{AC} = y_A \\ k_{AC} \cdot x_C + b_{AC} = y_C \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{AC} и b_{AC} :

$$k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C},$$

$$b_{AC} = y_C - k_{AC} \cdot x_C = y_C - \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \cdot x_C \text{ или}$$

$$b_{AC} = y_A - k_{AC} \cdot x_A = y_A - \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \cdot x_A.$$

Уравнение стороны AC : $y = k_{AC} \cdot x + b_{AC}$.

Для стороны BC треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_B = k_{BC} \cdot x_B + b_{BC} \\ y_C = k_{BC} \cdot x_C + b_{BC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BC} \cdot x_B + b_{BC} = y_B \\ k_{BC} \cdot x_C + b_{BC} = y_C \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{BC} и b_{BC} :

$$k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C},$$

$$b_{BC} = y_C - k_{BC} \cdot x_C = y_C - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \cdot x_C \text{ или}$$

$$b_{BC} = y_B - k_{BC} \cdot x_B = y_B - \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \cdot x_B.$$

Уравнение стороны BC : $y = k_{BC} \cdot x + b_{BC}$.

Нахождение величин сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC)

Значения величин сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC) определяются согласно формуле нахождения расстояния между двумя точками на плоскости:

$$l_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

$$l_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2},$$

$$l_{BC} = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}.$$

Нахождение уравнений высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3)

Для нахождения значений коэффициентов k и b для прямых, соответствующих высотам треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3), необходимо воспользоваться соотношениями:

$$k_H = -\frac{1}{k_S}, \quad b_H = y_P - k_H \cdot x_P = y_P + \frac{x_P}{k_S},$$

где:

k_H – угловой коэффициент прямой, соответствующей высоте;

k_S – угловой коэффициент прямой, соответствующей стороне, на которую опущена высота;

$x_P(y_P)$ – абсцисса (ордината) вершины треугольника, из которой опущена высота.

Для высоты AH_1 треугольника $\triangle ABC$, опущенной из вершины A на сторону BC , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов k_{AH_1} и b_{AH_1} :

$$k_{AH_1} = -\frac{1}{k_{BC}}, \quad b_{AH_1} = y_A - k_{AH_1} \cdot x_A = y_A + \frac{x_A}{k_{BC}}.$$

Уравнение высоты AH_1 : $y = k_{AH_1} \cdot x + b_{AH_1}$.

Для высоты BH_2 треугольника $\triangle ABC$, опущенной из вершины B на сторону AC , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов k_{BH_2} и b_{BH_2} :

$$k_{BH_2} = -\frac{1}{k_{AC}}, \quad b_{BH_2} = y_B - k_{BH_2} \cdot x_B = y_B + \frac{x_B}{k_{AC}}.$$

Уравнение высоты BH_2 : $y = k_{BH_2} \cdot x + b_{BH_2}$.

Для высоты CH_3 треугольника $\triangle ABC$, опущенной из вершины C на сторону AB , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов k_{CH_3} и b_{CH_3} :

$$k_{CH_3} = -\frac{1}{k_{AB}}, \quad b_{CH_3} = y_C - k_{CH_3} \cdot x_C = y_C - \frac{x_C}{k_{AB}}.$$

Уравнение высоты CH_3 : $y = k_{CH_3} \cdot x + b_{CH_3}$.

Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них высот, то есть оснований высот, для треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 и BC , BH_2 и AC , CH_3 и AB)

Для нахождения точек пересечения сторон и опущенных на них высот, то есть оснований высот, для треугольника $\triangle ABC$ необходимо воспользоваться уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту, то есть $y = k \cdot x + b$.

Поскольку для каждой из прямых, соответствующих стороне и высоте, имеем значения коэффициентов k и b , можно реализовать нахождение численных значений координат точки пересечения прямых через решение системы двух линейных уравнений

Для высоты AH_1 и стороны BC треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{H1} = k_{AH1} \cdot x_{H1} + b_{AH1} \\ y_{H1} = k_{BC} \cdot x_{H1} + b_{BC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AH1} \cdot x_{H1} - y_{H1} = -b_{AH1} \\ k_{BC} \cdot x_{H1} - y_{H1} = -b_{BC} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений координат точки $H_1(x_{H1}, y_{H1})$:

$$x_{H1} = -\frac{b_{BC} - b_{AH1}}{k_{BC} - k_{AH1}} = -\frac{b_{AH1} - b_{BC}}{k_{AH1} - k_{BC}},$$

$$y_{H1} = k_{AH1} \cdot x_{H1} + b_{AH1} = -\frac{b_{BC} - b_{AH1}}{k_{BC} - k_{AH1}} \cdot k_{AH1} + b_{AH1} \text{ или}$$

$$y_{H1} = k_{BC} \cdot x_{H1} + b_{BC} = -\frac{b_{BC} - b_{AH1}}{k_{BC} - k_{AH1}} \cdot k_{BC} + b_{BC}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высоты AH_1 и стороны BC для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $H_1(x_{H1}, y_{H1})$.

Для высоты BH_2 и стороны AC треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{H2} = k_{BH2} \cdot x_{H2} + b_{BH2} \\ y_{H2} = k_{AC} \cdot x_{H2} + b_{AC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BH2} \cdot x_{H2} - y_{H2} = -b_{BH2} \\ k_{AC} \cdot x_{H2} - y_{H2} = -b_{AC} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений координат точки $H_2(x_{H2}, y_{H2})$:

$$x_{H2} = -\frac{b_{AC} - b_{BH2}}{k_{AC} - k_{BH2}} = -\frac{b_{BH2} - b_{AC}}{k_{BH2} - k_{AC}},$$

$$y_{H2} = k_{BH2} \cdot x_{H2} + b_{BH2} = -\frac{b_{AC} - b_{BH2}}{k_{AC} - k_{BH2}} \cdot k_{BH2} + b_{BH2} \text{ или}$$

$$y_{H2} = k_{AC} \cdot x_{H2} + b_{AC} = -\frac{b_{AC} - b_{BH2}}{k_{AC} - k_{BH2}} \cdot k_{AC} + b_{AC}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высоты BH_2 и стороны AC для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $H_2(x_{H2}, y_{H2})$.

Для высоты CH_3 и стороны AB треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{H3} = k_{CH3} \cdot x_{H3} + b_{CH3} \\ y_{H3} = k_{AB} \cdot x_{H3} + b_{AB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{CH3} \cdot x_{H3} - y_{H3} = -b_{CH3} \\ k_{AB} \cdot x_{H3} - y_{H3} = -b_{AB} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений координат точки $H_3(x_{H3}, y_{H3})$:

$$x_{H3} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} = -\frac{b_{CH3} - b_{AB}}{k_{CH3} - k_{AB}},$$

$$y_{H3} = k_{CH3} \cdot x_{H3} + b_{CH3} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} \cdot k_{CH3} + b_{CH3} \text{ или}$$

$$y_{H3} = k_{AB} \cdot x_{H3} + b_{AB} = -\frac{b_{AB} - b_{CH3}}{k_{AB} - k_{CH3}} \cdot k_{AB} + b_{AB}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высоты CH_3 и стороны AB для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $H_3(x_{H_3}, y_{H_3})$.

**Нахождение величин высот треугольника $\triangle ABC$
(AH_1, BH_2 и CH_3)**

Значения величин высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1, BH_2 и CH_3) определяются согласно формулам:

$$l_{AH_1} = \sqrt{(x_{H_1} - x_A)^2 + (y_{H_1} - y_A)^2},$$

$$l_{BH_2} = \sqrt{(x_{H_2} - x_B)^2 + (y_{H_2} - y_B)^2},$$

$$l_{CH_3} = \sqrt{(x_{H_3} - x_C)^2 + (y_{H_3} - y_C)^2}.$$

**Вычисление площади треугольника $\triangle ABC$ по трем вариантам
попарно рассматриваемых сторон и высот
(BC и AH_1, AC и BH_2, AB и CH_3)**

Вычисление площади треугольника $\triangle ABC$ по трем вариантам попарно рассматриваемых сторон и высот (BC и AH_1, AC и BH_2, AB и CH_3) осуществляется по формулам вычисления площади треугольника по стороне и опущенной на нее высоте:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{l_{BC} \cdot l_{AH_1}}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{l_{AC} \cdot l_{BH_2}}{2}, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{l_{AB} \cdot l_{CH_3}}{2}.$$

Нахождение координат точки пересечения высот или ортоцентра треугольника $\triangle ABC$, то есть точки H_C , по трем вариантам попарно рассматриваемых высот (AH_1 и BH_2, AH_1 и CH_3, BH_2 и CH_3)

Для высот AH_1 и BH_2 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{H_C} = k_{AH_1} \cdot x_{H_C} + b_{AH_1} \\ y_{H_C} = k_{BH_2} \cdot x_{H_C} + b_{BH_2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AH_1} \cdot x_{H_C} - y_{H_C} = -b_{AH_1} \\ k_{BH_2} \cdot x_{H_C} - y_{H_C} = -b_{BH_2} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $H_C(x_{H_C}, y_{H_C})$:

$$x_{H_C} = -\frac{b_{BH_2} - b_{AH_1}}{k_{BH_2} - k_{AH_1}} = -\frac{b_{AH_1} - b_{BH_2}}{k_{AH_1} - k_{BH_2}},$$

$$y_{HC} = k_{AH_1} \cdot x_{HC} + b_{AH_1} = -\frac{b_{BH_2} - b_{AH_1}}{k_{BH_2} - k_{AH_1}} \cdot k_{AH_1} + b_{AH_1} \text{ или}$$

$$y_{HC} = k_{BH_2} \cdot x_{HC} + b_{BH_2} = -\frac{b_{BH_2} - b_{AH_1}}{k_{BH_2} - k_{AH_1}} \cdot k_{BH_2} + b_{BH_2}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высот AH_1 и BH_2 для треугольника ΔABC , то есть точки $H_C(x_{HC}, y_{HC})$.

Для высот AH_1 и CH_3 треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{HC} = k_{AH_1} \cdot x_{HC} + b_{AH_1}, & \text{или} \\ y_{HC} = k_{CH_3} \cdot x_{HC} + b_{CH_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AH_1} \cdot x_{HC} - y_{HC} = -b_{AH_1} \\ k_{CH_3} \cdot x_{HC} - y_{HC} = -b_{CH_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $H_C(x_{HC}, y_{HC})$:

$$x_{HC} = -\frac{b_{CH_3} - b_{AH_1}}{k_{CH_3} - k_{AH_1}} = -\frac{b_{AH_1} - b_{CH_3}}{k_{AH_1} - k_{CH_3}},$$

$$y_{HC} = k_{AH_1} \cdot x_{HC} + b_{AH_1} = -\frac{b_{CH_3} - b_{AH_1}}{k_{CH_3} - k_{AH_1}} \cdot k_{AH_1} + b_{AH_1} \text{ или}$$

$$y_{HC} = k_{CH_3} \cdot x_{HC} + b_{CH_3} = -\frac{b_{CH_3} - b_{AH_1}}{k_{CH_3} - k_{AH_1}} \cdot k_{CH_3} + b_{CH_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высот AH_1 и CH_3 для треугольника ΔABC , то есть точки $H_C(x_{HC}, y_{HC})$.

Для высот BH_2 и CH_3 треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{HC} = k_{BH_2} \cdot x_{HC} + b_{BH_2}, & \text{или} \\ y_{HC} = k_{CH_3} \cdot x_{HC} + b_{CH_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BH_2} \cdot x_{HC} - y_{HC} = -b_{BH_2} \\ k_{CH_3} \cdot x_{HC} - y_{HC} = -b_{CH_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $H_C(x_{HC}, y_{HC})$:

$$x_{HC} = -\frac{b_{CH_3} - b_{BH_2}}{k_{CH_3} - k_{BH_2}} = -\frac{b_{BH_2} - b_{CH_3}}{k_{BH_2} - k_{CH_3}},$$

$$y_{HC} = k_{BH_2} \cdot x_{HC} + b_{BH_2} = -\frac{b_{CH_3} - b_{BH_2}}{k_{CH_3} - k_{BH_2}} \cdot k_{BH_2} + b_{BH_2} \text{ или}$$

$$y_{HC} = k_{CH_3} \cdot x_{HC} + b_{CH_3} = -\frac{b_{CH_3} - b_{BH_2}}{k_{CH_3} - k_{BH_2}} \cdot k_{CH_3} + b_{CH_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения высот BH_2 и CH_3 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $H_C(x_{HC}, y_{HC})$.

Нахождение величин расстояний между точкой пересечения высот треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой H_C , и вершинами треугольника (H_{CA} , H_{CB} и H_{CC})

Значения величин расстояний между точкой пересечения высот треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой H_C , и вершинами треугольника (H_{CA} , H_{CB} и H_{CC}) определяются согласно формулам:

$$l_{HCA} = \sqrt{(x_{HC} - x_A)^2 + (y_{HC} - y_A)^2},$$

$$l_{HCB} = \sqrt{(x_{HC} - x_B)^2 + (y_{HC} - y_B)^2},$$

$$l_{HCC} = \sqrt{(x_{HC} - x_C)^2 + (y_{HC} - y_C)^2}.$$

Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них медиан, то есть оснований медиан, для треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 и BC , BM_2 и AC , CM_3 и AB)

При решении данной задачи необходимо воспользоваться утверждением, что медиана, проведенная из вершины треугольника, делит противоположную сторону пополам.

Координаты основания медианы AM_1 , то есть точки $M_1(x_{M1}, y_{M1})$:

$$x_{M1} = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_{M1} = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Координаты основания медианы BM_2 , то есть точки $M_2(x_{M2}, y_{M2})$:

$$x_{M2} = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_{M2} = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Координаты основания медианы CM_3 , то есть точки $M_3(x_{M3}, y_{M3})$:

$$x_{M3} = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_{M3} = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Нахождение уравнений медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3)

Для медианы AM_1 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_A = k_{AM_1} \cdot x_A + b_{AM_1} \\ y_{M_1} = k_{AM_1} \cdot x_{M_1} + b_{AM_1} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AM_1} \cdot x_A + b_{AM_1} = y_A \\ k_{AM_1} \cdot x_{M_1} + b_{AM_1} = y_{M_1} \end{cases}$$

При решении данной системы уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{AM_1} и b_{AM_1} :

$$k_{AM_1} = \frac{y_{M_1} - y_A}{x_{M_1} - x_A} = \frac{y_A - y_{M_1}}{x_A - x_{M_1}},$$

$$b_{AM_1} = y_{M_1} - k_{AM_1} \cdot x_{M_1} = y_{M_1} - \frac{y_{M_1} - y_A}{x_{M_1} - x_A} \cdot x_{M_1} \text{ или}$$

$$b_{AM_1} = y_A - k_{AM_1} \cdot x_A = y_A - \frac{y_{M_1} - y_A}{x_{M_1} - x_A} \cdot x_A.$$

Уравнение медианы AM_1 : $y = k_{AM_1} \cdot x + b_{AM_1}$.

Для медианы BM_2 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_B = k_{BM_2} \cdot x_B + b_{BM_2} \\ y_{M_2} = k_{BM_2} \cdot x_{M_2} + b_{BM_2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BM_2} \cdot x_B + b_{BM_2} = y_B \\ k_{BM_2} \cdot x_{M_2} + b_{BM_2} = y_{M_2} \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{BM_2} и b_{BM_2} :

$$k_{BM_2} = \frac{y_{M_2} - y_B}{x_{M_2} - x_B} = \frac{y_B - y_{M_2}}{x_B - x_{M_2}},$$

$$b_{BM_2} = y_{M_2} - k_{BM_2} \cdot x_{M_2} = y_{M_2} - \frac{y_{M_2} - y_B}{x_{M_2} - x_B} \cdot x_{M_2} \text{ или}$$

$$b_{BM_2} = y_B - k_{BM_2} \cdot x_B = y_B - \frac{y_{M_2} - y_B}{x_{M_2} - x_B} \cdot x_B.$$

Уравнение медианы BM_2 : $y = k_{BM_2} \cdot x + b_{BM_2}$.

Для медианы CM_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_C = k_{CM_3} \cdot x_C + b_{CM_3} \\ y_{M_3} = k_{CM_3} \cdot x_{M_3} + b_{CM_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{CM_3} \cdot x_C + b_{CM_3} = y_C \\ k_{CM_3} \cdot x_{M_3} + b_{CM_3} = y_{M_3} \end{cases}$$

При решении данной системы уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{CM_3} и b_{CM_3} :

$$k_{CM_3} = \frac{y_{M_3} - y_C}{x_{M_3} - x_C} = \frac{y_C - y_{M_3}}{x_C - x_{M_3}},$$

$$b_{CM_3} = y_{M_3} - k_{CM_3} \cdot x_{M_3} = y_{M_3} - \frac{y_{M_3} - y_C}{x_{M_3} - x_C} \cdot x_{M_3} \text{ или}$$

$$b_{CM_3} = y_C - k_{CM_3} \cdot x_C = y_C - \frac{y_{M_3} - y_C}{x_{M_3} - x_C} \cdot x_C.$$

Уравнение медианы CM_3 : $y = k_{CM_3} \cdot x + b_{CM_3}$.

Нахождение величин медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3)

Значения величин медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3) определяются согласно формулам:

$$l_{AM_1} = \sqrt{(x_{M_1} - x_A)^2 + (y_{M_1} - y_A)^2},$$

$$l_{BM_2} = \sqrt{(x_{M_2} - x_B)^2 + (y_{M_2} - y_B)^2},$$

$$l_{CM_3} = \sqrt{(x_{M_3} - x_C)^2 + (y_{M_3} - y_C)^2}.$$

Нахождение координат точки пересечения медиан или центра тяжести треугольника $\triangle ABC$, то есть точки M_C , по трем вариантам попарно рассматриваемых медиан (AM_1 и BM_2 , AM_1 и CM_3 , BM_2 и CM_3)

Для медиан AM_1 и BM_2 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_M = k_{AM_1} \cdot x_M + b_{AM_1} \\ y_M = k_{BM_2} \cdot x_M + b_{BM_2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AM_1} \cdot x_M - y_M = -b_{AM_1} \\ k_{BM_2} \cdot x_M - y_M = -b_{BM_2} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$:

$$x_{MC} = -\frac{b_{BM_2} - b_{AM_1}}{k_{BM_2} - k_{AM_1}} = -\frac{b_{AM_1} - b_{BM_2}}{k_{AM_1} - k_{BM_2}},$$

$$y_{MC} = k_{AM_1} \cdot x_{MC} + b_{AM_1} = -\frac{b_{BM_2} - b_{AM_1}}{k_{BM_2} - k_{AM_1}} \cdot k_{AM_1} + b_{AM_1} \text{ или}$$

$$y_{MC} = k_{BM_2} \cdot x_{MC} + b_{BM_2} = -\frac{b_{BM_2} - b_{AM_1}}{k_{BM_2} - k_{AM_1}} \cdot k_{BM_2} + b_{BM_2}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения медиан AM_1 и BM_2 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$.

Для медиан AM_1 и CM_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{MC} = k_{AM_1} \cdot x_{MC} + b_{AM_1} \\ y_{MC} = k_{CM_3} \cdot x_{MC} + b_{CM_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AM_1} \cdot x_{MC} - y_{MC} = -b_{AM_1} \\ k_{CM_3} \cdot x_{MC} - y_{MC} = -b_{CM_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$:

$$x_{MC} = -\frac{b_{CM_3} - b_{AM_1}}{k_{CM_3} - k_{AM_1}} = -\frac{b_{AM_1} - b_{CM_3}}{k_{AM_1} - k_{CM_3}},$$

$$y_{MC} = k_{AM_1} \cdot x_{MC} + b_{AM_1} = -\frac{b_{CM_3} - b_{AM_1}}{k_{CM_3} - k_{AM_1}} \cdot k_{AM_1} + b_{AM_1} \text{ или}$$

$$y_{MC} = k_{CM_3} \cdot x_{MC} + b_{CM_3} = -\frac{b_{CM_3} - b_{AM_1}}{k_{CM_3} - k_{AM_1}} \cdot k_{CM_3} + b_{CM_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения медиан AM_1 и CM_3 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$.

Для медиан BM_2 и CM_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{MC} = k_{BM_2} \cdot x_{MC} + b_{BM_2} \\ y_{MC} = k_{CM_3} \cdot x_{MC} + b_{CM_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BM_2} \cdot x_{MC} - y_{MC} = -b_{BM_2} \\ k_{CM_3} \cdot x_{MC} - y_{MC} = -b_{CM_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы уравнений получим выражения для нахождения координат точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$:

$$x_{MC} = -\frac{b_{CM_3} - b_{BM_2}}{k_{CM_3} - k_{BM_2}},$$

$$y_{MC} = k_{BM_2} \cdot x_{MC} + b_{BM_2} = -\frac{b_{CM_3} - b_{BM_2}}{k_{CM_3} - k_{BM_2}} \cdot k_{BM_2} + b_{BM_2} \text{ или}$$

$$y_{MC} = k_{CM_3} \cdot x_{MC} + b_{CM_3} = -\frac{b_{CM_3} - b_{BM_2}}{k_{CM_3} - k_{BM_2}} \cdot k_{CM_3} + b_{CM_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения медиан BM_2 и CM_3 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $M_C(x_{MC}, y_{MC})$.

Нахождение величин расстояний между точкой пересечения медиан треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой M_C , и вершинами треугольника ($M_C A$, $M_C B$ и $M_C C$)

Значения величин расстояний между точкой пересечения медиан $\triangle ABC$, то есть точкой M_C , и вершинами треугольника ($M_C A$, $M_C B$ и $M_C C$) определяются согласно формулам:

$$l_{MCA} = \sqrt{(x_{MC} - x_A)^2 + (y_{MC} - y_A)^2},$$

$$l_{MCB} = \sqrt{(x_{MC} - x_B)^2 + (y_{MC} - y_B)^2},$$

$$l_{MCC} = \sqrt{(x_{MC} - x_C)^2 + (y_{MC} - y_C)^2}.$$

Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них биссектрис, то есть оснований биссектрис, для треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 и BC , BK_2 и AC , CK_3 и AB)

При решении данной задачи необходимо воспользоваться утверждением, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, отношение которых равно отношению прилежащих сторон.

Координаты основания биссектрисы AK_1 , то есть точки $K_1(x_{K1}, y_{K1})$:

$$\frac{l_{K1C}}{l_{K1B}} = \frac{l_{AC}}{l_{AB}}, \quad \frac{x_C - x_B}{x_{K1} - x_B} = \frac{l_{BC}}{l_{K1B}} = \frac{l_{K1B} + l_{K1C}}{l_{K1B}} = \frac{l_{AB} + l_{AC}}{l_{AB}} = 1 + \frac{l_{AC}}{l_{AB}}.$$

$$\text{Тогда } x_{K1} = x_B + \frac{x_C - x_B}{1 + \frac{l_{AC}}{l_{AB}}}, \text{ аналогично } y_{K1} = y_B + \frac{y_C - y_B}{1 + \frac{l_{AC}}{l_{AB}}}.$$

Координаты основания биссектрисы BK_2 , то есть точки $K_2(x_{K2}, y_{K2})$:

$$\frac{l_{K2C}}{l_{K2A}} = \frac{l_{BC}}{l_{AB}}, \quad \frac{x_C - x_A}{x_{K2} - x_A} = \frac{l_{AC}}{l_{K2A}} = \frac{l_{K2A} + l_{K2C}}{l_{K2A}} = \frac{l_{AB} + l_{BC}}{l_{AB}} = 1 + \frac{l_{BC}}{l_{AB}}.$$

$$\text{Тогда } x_{K2} = x_A + \frac{x_C - x_A}{1 + \frac{l_{BC}}{l_{AB}}}, \text{ аналогично } y_{K2} = y_A + \frac{y_C - y_A}{1 + \frac{l_{BC}}{l_{AB}}}.$$

Координаты основания биссектрисы CK_3 , то есть точки $K_3(x_{K3}, y_{K3})$:

$$\frac{l_{K3B}}{l_{K3A}} = \frac{l_{BC}}{l_{AC}}, \quad \frac{x_B - x_A}{x_{K3} - x_A} = \frac{l_{AB}}{l_{K3A}} = \frac{l_{K3A} + l_{K3B}}{l_{K3A}} = \frac{l_{AC} + l_{BC}}{l_{AC}} = 1 + \frac{l_{BC}}{l_{AC}}.$$

$$\text{Тогда } x_{K3} = x_A + \frac{x_B - x_A}{1 + \frac{l_{BC}}{l_{AC}}}, \text{ аналогично } y_{K3} = y_A + \frac{y_B - y_A}{1 + \frac{l_{BC}}{l_{AC}}}.$$

Нахождение уравнений биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3)

Для биссектрисы AK_1 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_A = k_{AK1} \cdot x_A + b_{AK1} \\ y_{K1} = k_{AK1} \cdot x_{K1} + b_{AK1} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AK1} \cdot x_A + b_{AK1} = y_A \\ k_{AK1} \cdot x_{K1} + b_{AK1} = y_{K1} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{AK1} и b_{AK1} :

$$k_{AK1} = \frac{y_{K1} - y_A}{x_{K1} - x_A} = \frac{y_A - y_{K1}}{x_A - x_{K1}},$$

$$b_{AK1} = y_{K1} - k_{AK1} \cdot x_{K1} = y_{K1} - \frac{y_{K1} - y_A}{x_{K1} - x_A} \cdot x_{K1} \text{ или}$$

$$b_{AK1} = y_A - k_{AK1} \cdot x_A = y_A - \frac{y_{K1} - y_A}{x_{K1} - x_A} \cdot x_A.$$

Уравнение биссектрисы AK_1 : $y = k_{AK1} \cdot x + b_{AK1}$.

Для биссектрисы BK_2 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_B = k_{BK2} \cdot x_B + b_{BK2} \\ y_{K2} = k_{BK2} \cdot x_{K2} + b_{BK2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BK2} \cdot x_B + b_{BK2} = y_B \\ k_{BK2} \cdot x_{K2} + b_{BK2} = y_{K2} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{BK2} и b_{BK2} :

$$k_{BK2} = \frac{y_{K2} - y_B}{x_{K2} - x_B} = \frac{y_B - y_{K2}}{x_B - x_{K2}},$$

$$b_{BK2} = y_{K2} - k_{BK2} \cdot x_{K2} = y_{K2} - \frac{y_{K2} - y_B}{x_{K2} - x_B} \cdot x_{K2} \text{ или}$$

$$b_{BK_2} = y_B - k_{BK_2} \cdot x_B = y_B - \frac{y_{K_2} - y_B}{x_{K_2} - x_B} \cdot x_B.$$

Уравнение биссектрисы BK_2 : $y = k_{BK_2} \cdot x + b_{BK_2}$.

Для биссектрисы CK_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_C = k_{CK_3} \cdot x_C + b_{CK_3} \\ y_{K_3} = k_{CK_3} \cdot x_{K_3} + b_{CK_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{CK_3} \cdot x_C + b_{CK_3} = y_C \\ k_{CK_3} \cdot x_{K_3} + b_{CK_3} = y_{K_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{CK_3} и b_{CK_3} :

$$k_{CK_3} = \frac{y_{K_3} - y_C}{x_{K_3} - x_C} = \frac{y_C - y_{K_3}}{x_C - x_{K_3}},$$

$$b_{CK_3} = y_{K_3} - k_{CK_3} \cdot x_{K_3} = y_{K_3} - \frac{y_{K_3} - y_C}{x_{K_3} - x_C} \cdot x_{K_3} \text{ или}$$

$$b_{CK_3} = y_C - k_{CK_3} \cdot x_C = y_C - \frac{y_{K_3} - y_C}{x_{K_3} - x_C} \cdot x_C.$$

Уравнение биссектрисы CK_3 : $y = k_{CK_3} \cdot x + b_{CK_3}$.

Нахождение величин биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3)

Значения величин биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3) определяются согласно формулам:

$$l_{AK_1} = \sqrt{(x_{K_1} - x_A)^2 + (y_{K_1} - y_A)^2},$$

$$l_{BK_2} = \sqrt{(x_{K_2} - x_B)^2 + (y_{K_2} - y_B)^2},$$

$$l_{CK_3} = \sqrt{(x_{K_3} - x_C)^2 + (y_{K_3} - y_C)^2}.$$

Нахождение координат точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$ (центра вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности), то есть точки K_C (I_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых биссектрис (AK_1 и BK_2 , AK_1 и CK_3 , BK_2 и CK_3)

Для биссектрис AK_1 и BK_2 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{KC} = k_{AK1} \cdot x_{KC} + b_{AK1} \\ y_{KC} = k_{BK2} \cdot x_{KC} + b_{BK2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AK1} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{AK1} \\ k_{BK2} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{BK2} \end{cases}.$$

При решении данной системы уравнений получим выражения для нахождения координат точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$:

$$x_{KC} = -\frac{b_{BK2} - b_{AK1}}{k_{BK2} - k_{AK1}} = -\frac{b_{AK1} - b_{BK2}}{k_{AK1} - k_{BK2}},$$

$$y_{KC} = k_{AK1} \cdot x_{KC} + b_{AK1} = -\frac{b_{BK2} - b_{AK1}}{k_{BK2} - k_{AK1}} \cdot k_{AK1} + b_{AK1} \text{ или}$$

$$y_{KC} = k_{BK2} \cdot x_{KC} + b_{BK2} = -\frac{b_{BK2} - b_{AK1}}{k_{BK2} - k_{AK1}} \cdot k_{BK2} + b_{BK2}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения биссектрис AK_1 и BK_2 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$.

Для биссектрис AK_1 и CK_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{KC} = k_{AK1} \cdot x_{KC} + b_{AK1} \\ y_{KC} = k_{CK3} \cdot x_{KC} + b_{CK3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{AK1} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{AK1} \\ k_{CK3} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{CK3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$:

$$x_{KC} = -\frac{b_{CK3} - b_{AK1}}{k_{CK3} - k_{AK1}} = -\frac{b_{AK1} - b_{CK3}}{k_{AK1} - k_{CK3}},$$

$$y_{KC} = k_{AK1} \cdot x_{KC} + b_{AK1} = -\frac{b_{CK3} - b_{AK1}}{k_{CK3} - k_{AK1}} \cdot k_{AK1} + b_{AK1} \text{ или}$$

$$y_{KC} = k_{CK3} \cdot x_{KC} + b_{CK3} = -\frac{b_{CK3} - b_{AK1}}{k_{CK3} - k_{AK1}} \cdot k_{CK3} + b_{CK3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения биссектрис AK_1 и CK_3 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$.

Для биссектрис BK_2 и CK_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{KC} = k_{BK2} \cdot x_{KC} + b_{BK2} \\ y_{KC} = k_{CK3} \cdot x_{KC} + b_{CK3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{BK2} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{BK2} \\ k_{CK3} \cdot x_{KC} - y_{KC} = -b_{CK3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$:

$$x_{KC} = -\frac{b_{CK3} - b_{BK2}}{k_{CK3} - k_{BK2}},$$

$$y_{KC} = k_{BK2} \cdot x_{KC} + b_{BK2} = -\frac{b_{CK3} - b_{BK2}}{k_{CK3} - k_{BK2}} \cdot k_{BK2} + b_{BK2} \text{ или}$$

$$y_{KC} = k_{CK3} \cdot x_{KC} + b_{CK3} = -\frac{b_{CK3} - b_{BK2}}{k_{CK3} - k_{BK2}} \cdot k_{CK3} + b_{CK3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения биссектрис BK_2 и CK_3 для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $K_C(x_{KC}, y_{KC})$.

Нахождение величин расстояний между точкой пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой K_C , и вершинами треугольника (K_CA , K_CB и K_CC)

Значения величин расстояний между точкой пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой K_C , и вершинами треугольника (K_CA , K_CB и K_CC) определяются согласно формулам:

$$l_{KCA} = \sqrt{(x_{KC} - x_A)^2 + (y_{KC} - y_A)^2},$$

$$l_{KCB} = \sqrt{(x_{KC} - x_B)^2 + (y_{KC} - y_B)^2},$$

$$l_{KCC} = \sqrt{(x_{KC} - x_C)^2 + (y_{KC} - y_C)^2}.$$

Нахождение уравнений перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности), опущенных из центра вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности, то есть точки I_C , на стороны треугольника (I_CL_1 , I_CL_2 и I_CL_3 на стороны BC , AC и AB соответственно)

Для радиуса вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности I_CL_1 опущенного из центра вписанной окружности I_C на сторону BC имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{I_C L_1}$ и $b_{I_C L_1}$:

$$k_{I_C L_1} = -\frac{1}{k_{BC}}, \quad b_{I_C L_1} = y_{I_C} - k_{I_C L_1} \cdot x_{I_C} = y_{I_C} + \frac{x_{I_C}}{k_{BC}}.$$

Уравнение радиуса вписанной окружности | I_CL_1
 $y = k_{I_C L_1} \cdot x + b_{I_C L_1}.$

Для радиуса вписанной в треугольник ΔABC окружности $I_C L_2$, опущенного из центра вписанной окружности I_C на сторону AC , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{I_C L_2}$ и $b_{I_C L_2}$:

$$k_{I_C L_2} = -\frac{1}{k_{AC}}, \quad b_{I_C L_2} = y_{I_C} - k_{I_C L_2} \cdot x_{I_C} = y_{I_C} + \frac{x_{I_C}}{k_{AC}}.$$

Уравнение радиуса вписанной окружности $I_C K_2$:
 $y = k_{I_C L_2} \cdot x + b_{I_C L_2}$.

Для радиуса вписанной в треугольник ΔABC окружности $I_C L_3$, опущенного из центра вписанной окружности I_C на сторону AB , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{I_C L_3}$ и $b_{I_C L_3}$:

$$k_{I_C L_3} = -\frac{1}{k_{AB}}, \quad b_{I_C L_3} = y_{I_C} - k_{I_C L_3} \cdot x_{I_C} = y_{I_C} + \frac{x_{I_C}}{k_{AB}}.$$

Уравнение радиуса вписанной окружности $I_C L_3$:
 $y = k_{I_C L_3} \cdot x + b_{I_C L_3}$.

Нахождение координат точек пересечения перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник ΔABC окружности), опущенных из центра вписанной в треугольник ΔABC окружности, то есть точки I_C , на стороны треугольника ($I_C L_1, I_C L_2$ и $I_C L_3$ на стороны BC, AC и AB соответственно)

Для радиуса вписанной окружности $I_C L_1$ и стороны BC треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{L_1} = k_{I_C L_1} \cdot x_{L_1} + b_{I_C L_1} \\ y_{L_1} = k_{BC} \cdot x_{L_1} + b_{BC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{I_C L_1} \cdot x_{L_1} - y_{L_1} = -b_{I_C L_1} \\ k_{BC} \cdot x_{L_1} - y_{L_1} = -b_{BC} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $L_1(x_{L_1}, y_{L_1})$:

$$x_{L_1} = -\frac{b_{BC} - b_{I_C L_1}}{k_{BC} - k_{I_C L_1}} = -\frac{b_{I_C L_1} - b_{BC}}{k_{I_C L_1} - k_{BC}},$$

$$y_{L_1} = k_{I_C L_1} \cdot x_{L_1} + b_{I_C L_1} = -\frac{b_{BC} - b_{I_C L_1}}{k_{BC} - k_{I_C L_1}} \cdot k_{I_C L_1} + b_{I_C L_1} \text{ или}$$

$$y_{L1} = k_{BC} \cdot x_{L1} + b_{BC} = -\frac{b_{BC} - b_{ICL1}}{k_{BC} - k_{ICL1}} \cdot k_{BC} + b_{BC} \cdot$$

В итоге получим значения координат точки пересечения радиуса вписанной окружности $I_C L_1$ и стороны BC для треугольника ΔABC , то есть точки $L_1(x_{L1}, y_{L1})$.

Для радиуса вписанной окружности $I_C L_2$ и стороны AC треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{L2} = k_{ICL2} \cdot x_{L2} + b_{ICL2} \\ y_{L2} = k_{AC} \cdot x_{L2} + b_{AC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{ICL2} \cdot x_{L2} - y_{L2} = -b_{ICL2} \\ k_{AC} \cdot x_{L2} - y_{L2} = -b_{AC} \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $L_2(x_{L2}, y_{L2})$:

$$x_{L2} = -\frac{b_{AC} - b_{ICL2}}{k_{AC} - k_{ICL2}} = -\frac{b_{ICL2} - b_{AC}}{k_{ICL2} - k_{AC}},$$

$$y_{L2} = k_{ICL2} \cdot x_{L2} + b_{ICL2} = -\frac{b_{AC} - b_{ICL2}}{k_{AC} - k_{ICL2}} \cdot k_{ICL2} + b_{ICL2} \text{ или}$$

$$y_{L2} = k_{AC} \cdot x_{L2} + b_{AC} = -\frac{b_{AC} - b_{ICL2}}{k_{AC} - k_{ICL2}} \cdot k_{AC} + b_{AC}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения радиуса вписанной окружности $I_C L_2$ и стороны AC для треугольника ΔABC , то есть точки $L_2(x_{L2}, y_{L2})$.

Для радиуса вписанной окружности $I_C L_3$ и стороны AB треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{L3} = k_{ICL3} \cdot x_{L3} + b_{ICL3} \\ y_{L3} = k_{AB} \cdot x_{L3} + b_{AB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{ICL3} \cdot x_{L3} - y_{L3} = -b_{ICL3} \\ k_{AB} \cdot x_{L3} - y_{L3} = -b_{AB} \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $L_3(x_{L3}, y_{L3})$:

$$x_{L3} = -\frac{b_{AB} - b_{ICL3}}{k_{AB} - k_{ICL3}} = -\frac{b_{ICL3} - b_{AB}}{k_{ICL3} - k_{AB}},$$

$$y_{L3} = k_{ICL3} \cdot x_{L3} + b_{ICL3} = -\frac{b_{AB} - b_{ICL3}}{k_{AB} - k_{ICL3}} \cdot k_{ICL3} + b_{ICL3} \text{ или}$$

$$y_{L3} = k_{AB} \cdot x_{L3} + b_{AB} = -\frac{b_{AB} - b_{ICL3}}{k_{AB} - k_{ICL3}} \cdot k_{AB} + b_{AB}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения радиуса вписанной окружности $I_C L_3$ и стороны AB для треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $L_3(x_{L3}, y_{L3})$.

Нахождение величин радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$)

Значения величин радиусов вписанной в треугольника $\triangle ABC$ окружности ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$) определяются согласно формулам:

$$l_{ICL1} = \sqrt{(x_{L1} - x_{IC})^2 + (y_{L1} - y_{IC})^2},$$

$$l_{ICL2} = \sqrt{(x_{L2} - x_{IC})^2 + (y_{L2} - y_{IC})^2},$$

$$l_{ICL3} = \sqrt{(x_{L3} - x_{IC})^2 + (y_{L3} - y_{IC})^2}.$$

Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных перпендикуляров для треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$ и BC , $M_2 N_2$ и AC , $M_3 N_3$ и AB)

Координаты основания серединного перпендикуляра $M_1 N_1$, то есть точки $M_1(x_{M1}, y_{M1})$:

$$x_{M1} = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_{M1} = \frac{y_B + y_C}{2}.$$

Координаты основания серединного перпендикуляра $M_2 N_2$, то есть точки $M_2(x_{M2}, y_{M2})$:

$$x_{M2} = \frac{x_A + x_C}{2}, \quad y_{M2} = \frac{y_A + y_C}{2}.$$

Координаты основания серединного перпендикуляра $M_3 N_3$, то есть точки $M_3(x_{M3}, y_{M3})$:

$$x_{M3} = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_{M3} = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

**Нахождение уравнений серединных перпендикуляров
треугольника ΔABC , опущенных на стороны треугольника
(M_1N_1 , M_2N_2 и M_3N_3 на стороны BC , AC и AB соответственно)**

Для серединного перпендикуляра M_1N_1 треугольника ΔABC , опущенного на сторону BC , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{M_1N_1}$ и $b_{M_1N_1}$:

$$k_{M_1N_1} = -\frac{1}{k_{BC}}, \quad b_{M_1N_1} = y_{M_1} - k_{M_1N_1} \cdot x_{M_1} = y_{M_1} + \frac{x_{M_1}}{k_{BC}}.$$

Уравнение серединного перпендикуляра M_1N_1 :
 $y = k_{M_1N_1} \cdot x + b_{M_1N_1}$.

Для серединного перпендикуляра M_2N_2 треугольника ΔABC , опущенного на сторону AC , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{M_2N_2}$ и $b_{M_2N_2}$:

$$k_{M_2N_2} = -\frac{1}{k_{AC}}, \quad b_{M_2N_2} = y_{M_2} - k_{M_2N_2} \cdot x_{M_2} = y_{M_2} + \frac{x_{M_2}}{k_{AC}}.$$

Уравнение серединного перпендикуляра M_2N_2 :
 $y = k_{M_2N_2} \cdot x + b_{M_2N_2}$.

Для серединного перпендикуляра M_3N_3 треугольника ΔABC , опущенного на сторону AB , имеем соотношения для нахождения значений коэффициентов $k_{M_3N_3}$ и $b_{M_3N_3}$:

$$k_{M_3N_3} = -\frac{1}{k_{AB}}, \quad b_{M_3N_3} = y_{M_3} - k_{M_3N_3} \cdot x_{M_3} = y_{M_3} + \frac{x_{M_3}}{k_{AB}}.$$

Уравнение серединного перпендикуляра M_3N_3 :
 $y = k_{M_3N_3} \cdot x + b_{M_3N_3}$.

**Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных
перпендикуляров для треугольника ΔABC
(M_1N_1 и AB , M_2N_2 и BC , M_3N_3 и AC)**

Для серединного перпендикуляра M_1N_1 и стороны AB треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{N_1} = k_{M_1N_1} \cdot x_{N_1} + b_{M_1N_1} \\ y_{N_1} = k_{AB} \cdot x_{N_1} + b_{AB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M_1N_1} \cdot x_{N_1} - y_{N_1} = -b_{M_1N_1} \\ k_{AB} \cdot x_{N_1} - y_{N_1} = -b_{AB} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_1(x_{N1}, y_{N1})$:

$$x_{N1} = -\frac{b_{AB} - b_{M1N1}}{k_{AB} - k_{M1N1}} = -\frac{b_{M1N1} - b_{AB}}{k_{M1N1} - k_{AB}},$$

$$y_{N1} = k_{M1N1} \cdot x_{N1} + b_{M1N1} = -\frac{b_{AB} - b_{M1N1}}{k_{AB} - k_{M1N1}} \cdot k_{M1N1} + b_{M1N1} \text{ или}$$

$$y_{N1} = k_{AB} \cdot x_{N1} + b_{AB} = -\frac{b_{AB} - b_{M1N1}}{k_{AB} - k_{M1N1}} \cdot k_{AB} + b_{AB}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединного перпендикуляра M_1N_1 и стороны AB треугольника ΔABC , то есть точки $N_1(x_{N1}, y_{N1})$.

Для серединного перпендикуляра M_2N_2 и стороны BC треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{N2} = k_{M2N2} \cdot x_{N2} + b_{M2N2} \\ y_{N2} = k_{BC} \cdot x_{N2} + b_{BC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M2N2} \cdot x_{N2} - y_{N2} = -b_{M2N2} \\ k_{BC} \cdot x_{N2} - y_{N2} = -b_{BC} \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_2(x_{N2}, y_{N2})$:

$$x_{N2} = -\frac{b_{BC} - b_{M2N2}}{k_{BC} - k_{M2N2}} = -\frac{b_{M2N2} - b_{BC}}{k_{M2N2} - k_{BC}},$$

$$y_{N2} = k_{M2N2} \cdot x_{N2} + b_{M2N2} = -\frac{b_{BC} - b_{M2N2}}{k_{BC} - k_{M2N2}} \cdot k_{M2N2} + b_{M2N2} \text{ или}$$

$$y_{N2} = k_{BC} \cdot x_{N2} + b_{BC} = -\frac{b_{BC} - b_{M2N2}}{k_{BC} - k_{M2N2}} \cdot k_{BC} + b_{BC}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединного перпендикуляра M_2N_2 и стороны BC треугольника ΔABC , то есть точки $N_2(x_{N2}, y_{N2})$.

Для серединного перпендикуляра M_3N_3 и стороны AC треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{N3} = k_{M3N3} \cdot x_{N3} + b_{M3N3} \\ y_{N3} = k_{AC} \cdot x_{N3} + b_{AC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M3N3} \cdot x_{N3} - y_{N3} = -b_{M3N3} \\ k_{AC} \cdot x_{N3} - y_{N3} = -b_{AC} \end{cases}$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_3(x_{N3}, y_{N3})$:

$$x_{N_3} = -\frac{b_{AC} - b_{M_3N_3}}{k_{AC} - k_{M_3N_3}} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{AC}}{k_{M_3N_3} - k_{AC}},$$

$$y_{N_3} = k_{M_3N_3} \cdot x_{N_3} + b_{M_3N_3} = -\frac{b_{AC} - b_{M_3N_3}}{k_{AC} - k_{M_3N_3}} \cdot k_{M_3N_3} + b_{M_3N_3} \text{ или}$$

$$y_{N_3} = k_{AC} \cdot x_{N_3} + b_{AC} = -\frac{b_{AC} - b_{M_3N_3}}{k_{AC} - k_{M_3N_3}} \cdot k_{AC} + b_{AC}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединного перпендикуляра M_3N_3 и стороны AC треугольника ABC , то есть точки $N_3(x_{N_3}, y_{N_3})$.

Нахождение величин серединных перпендикуляров треугольника ABC (M_1N_1 , M_2N_2 и M_3N_3)

Значения величин серединных перпендикуляров треугольника ABC (M_1N_1 , M_2N_2 и M_3N_3) определяются согласно формулам:

$$l_{M_1N_1} = \sqrt{(x_{N_1} - x_{M_1})^2 + (y_{N_1} - y_{M_1})^2},$$

$$l_{M_2N_2} = \sqrt{(x_{N_2} - x_{M_2})^2 + (y_{N_2} - y_{M_2})^2},$$

$$l_{M_3N_3} = \sqrt{(x_{N_3} - x_{M_3})^2 + (y_{N_3} - y_{M_3})^2}.$$

Нахождение координат точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника ABC

(центра описанной вокруг треугольника ABC окружности), то есть точки N_C (D_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых серединных перпендикуляров (M_1N_1 и M_2N_2 , M_1N_1 и M_3N_3 , M_2N_2 и M_3N_3 соответственно)

Для серединных перпендикуляров M_1N_1 и M_2N_2 треугольника ABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{NC} = k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} + b_{M_1N_1} \\ y_{NC} = k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} + b_{M_2N_2} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_1N_1} \\ k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_2N_2} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$:

$$x_{NC} = -\frac{b_{M_2N_2} - b_{M_1N_1}}{k_{M_2N_2} - k_{M_1N_1}} = -\frac{b_{M_1N_1} - b_{M_2N_2}}{k_{M_1N_1} - k_{M_2N_2}},$$

$$y_{NC} = k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} + b_{M_1N_1} = -\frac{b_{M_2N_2} - b_{M_1N_1}}{k_{M_2N_2} - k_{M_1N_1}} \cdot k_{M_1N_1} + b_{M_1N_1} \text{ или}$$

$$y_{NC} = k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} + b_{M_2N_2} = -\frac{b_{M_2N_2} - b_{M_1N_1}}{k_{M_2N_2} - k_{M_1N_1}} \cdot k_{M_2N_2} + b_{M_2N_2}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединных перпендикуляров M_1N_1 и M_2N_2 треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$.

Для серединных перпендикуляров M_1N_1 и M_3N_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{NC} = k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} + b_{M_1N_1} \\ y_{NC} = k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} + b_{M_3N_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_1N_1} \\ k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_3N_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$:

$$x_{NC} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_1N_1}}{k_{M_3N_3} - k_{M_1N_1}} = -\frac{b_{M_1N_1} - b_{M_3N_3}}{k_{M_1N_1} - k_{M_3N_3}},$$

$$y_{NC} = k_{M_1N_1} \cdot x_{NC} + b_{M_1N_1} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_1N_1}}{k_{M_3N_3} - k_{M_1N_1}} \cdot k_{M_1N_1} + b_{M_1N_1} \text{ или}$$

$$y_{NC} = k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} + b_{M_3N_3} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_1N_1}}{k_{M_3N_3} - k_{M_1N_1}} \cdot k_{M_3N_3} + b_{M_3N_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединных перпендикуляров M_1N_1 и M_3N_3 треугольника $\triangle ABC$, то есть точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$.

Для серединных перпендикуляров M_2N_2 и M_3N_3 треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{NC} = k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} + b_{M_2N_2} \\ y_{NC} = k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} + b_{M_3N_3} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_2N_2} \\ k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} - y_{NC} = -b_{M_3N_3} \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения координат точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$:

$$x_{NC} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_2N_2}}{k_{M_3N_3} - k_{M_2N_2}} = -\frac{b_{M_2N_2} - b_{M_1N_1}}{k_{M_2N_2} - k_{M_1N_1}},$$

$$y_{NC} = k_{M_2N_2} \cdot x_{NC} + b_{M_2N_2} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_2N_2}}{k_{M_3N_3} - k_{M_2N_2}} \cdot k_{M_2N_2} + b_{M_2N_2} \text{ или}$$

$$y_{NC} = k_{M_3N_3} \cdot x_{NC} + b_{M_3N_3} = -\frac{b_{M_3N_3} - b_{M_2N_2}}{k_{M_3N_3} - k_{M_2N_2}} \cdot k_{M_3N_3} + b_{M_3N_3}.$$

В итоге получим значения координат точки пересечения серединных перпендикуляров M_2N_2 и M_3N_3 треугольника ΔABC , то есть точки $N_C(x_{NC}, y_{NC})$.

Нахождение величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ΔABC , то есть точкой N_C , и серединами сторон треугольника (N_CM_1 , N_CM_2 и N_CM_3)

Значения величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ΔABC , то есть точкой N_C , и серединами сторон треугольника (N_CM_1 , N_CM_2 и N_CM_3) определяются согласно формулам:

$$l_{NCM_1} = \sqrt{(x_{NC} - x_{M_1})^2 + (y_{NC} - y_{M_1})^2},$$

$$l_{NCM_2} = \sqrt{(x_{NC} - x_{M_2})^2 + (y_{NC} - y_{M_2})^2},$$

$$l_{NCM_3} = \sqrt{(x_{NC} - x_{M_3})^2 + (y_{NC} - y_{M_3})^2}.$$

Нахождение уравнений прямых (радиусов описанной вокруг треугольника ΔABC окружности), проходящих через центр описанной вокруг треугольника ΔABC окружности, то есть точку D_C , и вершины треугольника (D_CA , D_CB и D_CC)

Для радиуса описанной окружности D_CA треугольника ΔABC имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{DC} = k_{DCA} \cdot x_{DC} + b_{DCA} \\ y_A = k_{DCA} \cdot x_A + b_{DCA} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{DCA} \cdot x_{DC} + b_{DCA} = y_{DC} \\ k_{DCA} \cdot x_A + b_{DCA} = y_A \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{DCA} и b_{DCA} :

$$k_{DCA} = \frac{y_A - y_{DC}}{x_A - x_{DC}} = \frac{y_{DC} - y_A}{x_{DC} - x_A},$$

$$b_{DCA} = y_A - k_{DCA} \cdot x_A = y_A - \frac{y_A - y_{DC}}{x_A - x_{DC}} \cdot x_A \text{ или}$$

$$b_{DCA} = y_{DC} - k_{DCA} \cdot x_{DC} = y_{DC} - \frac{y_A - y_{DC}}{x_A - x_{DC}} \cdot x_{DC}.$$

Уравнение прямой радиуса описанной окружности $D_C A$:
 $y = k_{DCA} \cdot x + b_{DCA}.$

Для радиуса описанной окружности $D_C B$ треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{DC} = k_{DCB} \cdot x_{DC} + b_{DCB} \\ y_B = k_{DCB} \cdot x_B + b_{DCB} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{DCB} \cdot x_{DC} + b_{DCB} = y_{DC} \\ k_{DCB} \cdot x_B + b_{DCB} = y_B \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{DCB} и b_{DCB} :

$$k_{DCB} = \frac{y_B - y_{DC}}{x_B - x_{DC}} = \frac{y_{DC} - y_B}{x_{DC} - x_B},$$

$$b_{DCB} = y_B - k_{DCB} \cdot x_B = y_B - \frac{y_B - y_{DC}}{x_B - x_{DC}} \cdot x_B \text{ или}$$

$$b_{DCB} = y_{DC} - k_{DCB} \cdot x_{DC} = y_{DC} - \frac{y_B - y_{DC}}{x_B - x_{DC}} \cdot x_{DC}.$$

Уравнение прямой радиуса описанной окружности $D_C B$:
 $y = k_{DCB} \cdot x + b_{DCB}.$

Для радиуса описанной окружности $D_C C$ треугольника $\triangle ABC$ имеем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_{DC} = k_{DCC} \cdot x_{DC} + b_{DCC} \\ y_C = k_{DCC} \cdot x_C + b_{DCC} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} k_{DCC} \cdot x_{DC} + b_{DCC} = y_{DC} \\ k_{DCC} \cdot x_C + b_{DCC} = y_C \end{cases}.$$

При решении данной системы линейных уравнений получим выражения для нахождения значений коэффициентов k_{DCC} и b_{DCC} :

$$k_{DCC} = \frac{y_C - y_{DC}}{x_C - x_{DC}} = \frac{y_{DC} - y_C}{x_{DC} - x_C},$$

$$b_{DCC} = y_C - k_{DCC} \cdot x_C = y_C - \frac{y_C - y_{DC}}{x_C - x_{DC}} \cdot x_C \text{ или}$$

$$b_{DCC} = y_{DC} - k_{DCC} \cdot x_{DC} = y_{DC} - \frac{y_C - y_{DC}}{x_C - x_{DC}} \cdot x_{DC}.$$

Уравнение прямой радиуса описанной окружности $D_C C$:
 $y = k_{DCC} \cdot x + b_{DCC}.$

Нахождение величин радиусов описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности ($D_C A, D_C B$ и $D_C C$)

Значения величин радиусов описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности ($D_C A = D_C B = D_C C$) определяются согласно формулам:

$$l_{DCA} = \sqrt{(x_{DC} - x_A)^2 + (y_{DC} - y_A)^2},$$

$$l_{DCB} = \sqrt{(x_{DC} - x_B)^2 + (y_{DC} - y_B)^2},$$

$$l_{DCC} = \sqrt{(x_{DC} - x_C)^2 + (y_{DC} - y_C)^2}.$$

2.1.2. Описание этапов проведения практических занятий

Практические занятия по реализации вычислений и визуализации разносторонних геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости, исходя из координат вершин треугольника, с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "ANGEOPL" могут быть разделены на два этапа.

I этап – "Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров треугольника аналитическим методом"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента с целью организации коллективной деятельности с учетом различных личностных психологических особенностей студентов. Каждой из групп представляют различные численные значения координат вершин треугольника и предлагают реализовать нахождение необходимых параметров треугольника, при этом студентами в рамках малой группы осуществляется совместное нахождение параметров сторон треугольника, а затем предполагается проведение каждым из студентов в рамках малой группы комплексного анализа взаимосвязанных параметров (например, математический анализ высот треугольника, медиан, биссектрис или серединных перпендикуляров).

Все необходимые расчеты обязательно отражаются на листе бумаге с отображением подробных промежуточных и итоговых расчетов, а также визуализацией исследуемой совокупности объектов.

II этап – "Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров треугольника с использованием представленной в графическом калькуляторе программы "ANGEOPL" "

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает определенное количество различных вариантов численных значений вершин треугольника в рамках одной малой группы.

Студенты, прежде всего, проверяют правильность выполнения расчетов, проведенных на первом этапе, осуществляют сравнительный анализ полученных результатов с помощью представленной в графическом калькуляторе программы "ANGEOPL", после чего производят автоматические расчеты с последующей визуализацией, на основе которых формулируют необходимые выводы.

2.1.3. Описание программы с примером

Рассмотрим схему работы программы "ANGEOPL", предназначенной для проведения математического анализа произвольных треугольников в рамках раздела "Аналитическая геометрия на плоскости" курса высшей математики.

В данной программе по вводимым значениям координат трех точек (точек A , B и C) на плоскости, образующих произвольный треугольник ($\triangle ABC$), реализуются следующие задачи:

1. Нахождение уравнений сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC).
2. Нахождение величин сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC).
3. Нахождение уравнений высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3).
4. Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них высот, то есть оснований высот, для треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 и BC , BH_2 и AC , CH_3 и AB).
5. Нахождение величин высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3).
6. Вычисление площади треугольника $\triangle ABC$ по трем вариантам попарно рассматриваемых сторон и высот (BC и AH_1 , AC и BH_2 , AB и CH_3).
7. Нахождение координат точки пересечения высот или ортоцентра треугольника $\triangle ABC$, то есть точки H_C , по трем вариантам попарно рассматриваемых высот (AH_1 и BH_2 , AH_1 и CH_3 , BH_2 и CH_3).

8. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения высот треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой H_C , и вершинами треугольника ($H_C A$, $H_C B$ и $H_C C$).
9. Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них медиан, то есть оснований медиан, для треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 и BC , BM_2 и AC , CM_3 и AB).
10. Нахождение уравнений медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3).
11. Нахождение величин медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3).
12. Нахождение координат точки пересечения медиан или центра тяжести треугольника $\triangle ABC$, то есть точки M_C , по трем вариантам попарно рассматриваемых медиан (AM_1 и BM_2 , AM_1 и CM_3 , BM_2 и CM_3).
13. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения медиан треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой M_C , и вершинами треугольника ($M_C A$, $M_C B$ и $M_C C$).
14. Нахождение координат точек пересечения сторон и опущенных на них биссектрис, то есть оснований биссектрис, для треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 и BC , BK_2 и AC , CK_3 и AB).
15. Нахождение уравнений биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3).
16. Нахождение величин биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3).
17. Нахождение координат точки пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (центра вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности), то есть точки K_C (I_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых биссектрис (AK_1 и BK_2 , AK_1 и CK_3 , BK_2 и CK_3).
18. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$, то есть точки K_C , и вершинами треугольника ($K_C A$, $K_C B$ и $K_C C$).
19. Нахождение уравнений перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности), опущенных из центра

вписанной в $\triangle ABC$ окружности, то есть из точки I_C , на стороны треугольника ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$ на стороны BC , AC и AB соответственно).

20. Нахождение координат точек пересечения перпендикуляров (радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности), опущенных из центра вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности, то есть из точки I_C , на стороны треугольника ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$ на стороны BC , AC и AB соответственно).
21. Нахождение величин радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$).
22. Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных перпендикуляров для треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$ и BC , $M_2 N_2$ и AC , $M_3 N_3$ и AB).
23. Нахождение уравнений серединных перпендикуляров треугольника $\triangle ABC$, опущенных на стороны треугольника ($M_1 N_1$, $M_2 N_2$ и $M_3 N_3$ на стороны BC , AC и AB соответственно).
24. Нахождение координат точек пересечения сторон и серединных перпендикуляров для треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$ и AB , $M_2 N_2$ и BC , $M_3 N_3$ и AC).
25. Нахождение величин серединных перпендикуляров треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$, $M_2 N_2$ и $M_3 N_3$).
26. Нахождение координат точки пересечения серединных перпендикуляров треугольника $\triangle ABC$ (центра описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности), то есть точки N_C (D_C), по трем вариантам попарно рассматриваемых серединных перпендикуляров ($M_1 N_1$ и $M_2 N_2$, $M_1 N_1$ и $M_3 N_3$, $M_2 N_2$ и $M_3 N_3$ соответственно).
27. Нахождение величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $\triangle ABC$, то есть точкой N_C , и серединами сторон треугольника ($N_C M_1$, $N_C M_2$ и $N_C M_3$).
28. Нахождение уравнений прямых (радиусов описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности), проходящих через центр описанной вокруг

треугольника ABC окружности, то есть точку D_C , и вершины треугольника ($D_C A$, $D_C B$ и $D_C C$).

29. Нахождение величин радиусов описанной вокруг треугольника ABC окружности ($D_C A$, $D_C B$ и $D_C C$).

Описание программы "ANGEOPL" приведем на примере проведения математического анализа произвольного треугольника ABC , образованного точками $A(1,4)$, $B(2,6)$ и $C(4,3)$, в сопровождении логически расположенных на рис. 8 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGraM" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "ANGLEOPL" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 8А).

Последовательные нажатия клавиши "EXE" служат для отображения следующих окон:

- Окна диалога для ввода значений координат точки А (X_A ["XA"] и Y_A ["YA"]) (рис. 8В).
- Окна диалога для ввода значений координат точки В (X_B ["XB"] и Y_B ["YB"]) (рис. 8С).
- Окна диалога для ввода значений координат точки С (X_C ["XC"] и Y_C ["YC"]) (рис. 8D).

При работе с указанными меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После ввода значений вышеуказанных параметров последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 8Е):

- **CONTINUE CALCUL (1)** – подтверждение продолжения выполнения расчетов.
- **RELOAD COORDS A (2)** – перезагрузка значений координат точки А с отображением соответствующего окна.
- **RELOAD COORDS B (3)** – перезагрузка значений координат точки В с отображением соответствующего окна.

- **RELOAD COORDS C (4)** – перезагрузка значений координат точки C с отображением соответствующего окна.
- **RELOAD ALL (4)** – перезагрузка значений координат всех вершин треугольника, то есть точек A , B и C , с поочередным отображением соответствующих окон.
- **OR QUIT (5)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора подтверждения продолжения выполнения расчетов в результате последовательного ввода цифры “1” и нажатия клавиши “EXE” осуществляется математический анализ обработки исходных данных координат вершин треугольника с поочередным отображением следующих окон:

- Окна вывода в виде матрицы “ A ” результатов реализации расчетов параметров сторон треугольника ΔABC (коэффициентов уравнений сторон, величин сторон) в соответствии с таблицей 15, что отражено на рис. 8F.
- Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с поочередным указанием вершин треугольника (точек A , B и C), что отражено на рис. 8G, 8H, 8I соответственно.

После вывода параметров результатов расчетов сторон треугольника последующее нажатие клавиши “EXE” приводит к появлению меню со следующими позициями (рис. 8J):

- **CALCUL HEIGHTS (1)** – подтверждение выполнения расчетов параметров высот треугольника с последовательным отображением следующих окон (рис. 8K):
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ B ” результатов реализации расчетов параметров высот треугольника ΔABC (AH_1 , BH_2 и CH_3), опущенных на стороны BC , AC и AB соответственно (коэффициентов уравнений высот, координат точек пересечения сторон и опущенных на них высот, величин высот, значений площади треугольника по трем вариантам попарно рассматриваемых сторон и высот), в соответствии с таблицей 16.
 - ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих высоты треугольника, а также поочередным указанием оснований высот (точек H_1 , H_2 и H_3).
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ C ” результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения высот или

ортоцентра треугольника $\triangle ABC$, то есть точки H_C (координат точки пересечения высот по трем вариантам попарно рассматриваемых высот, величин расстояний между точкой пересечения высот и вершинами треугольника), в соответствии с таблицей 17.

- ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и высоты треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения высот треугольника (точки H_C).
- **CALCUL MEDIANS (2)** – подтверждение выполнения расчетов параметров медиан треугольника с последовательным отображением следующих окон (рис. 8L):
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “D” результатов реализации расчетов параметров медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3), опущенных на стороны BC , AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них медиан, коэффициентов уравнений медиан, величин медиан), в соответствии с таблицей 18.
 - ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих медианы треугольника, а также поочередным указанием оснований медиан треугольника (точек M_1 , M_2 и M_3).
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “E” результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения медиан или центра тяжести треугольника $\triangle ABC$, то есть точки M_C (координат точки пересечения медиан по трем вариантам попарно рассматриваемых медиан, величин расстояний между точкой пересечения медиан и вершинами треугольника), в соответствии с таблицей 19.
 - ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и медианы треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения медиан треугольника (точки M_C).
- **CALCUL INS CIR (3)** – подтверждение выполнения расчетов параметров биссектрис треугольника и вписанной в него окружности с последовательным отображением следующих окон (рис. 8M):
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “F” результатов реализации расчетов параметров биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 ,

BK_2 и CK_3), опущенных на стороны BC , AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них биссектрис, коэффициентов уравнений биссектрис, величин биссектрис), в соответствии с таблицей 20.

- ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих биссектрисы треугольника, а также поочередным указанием оснований биссектрис треугольника (точек K_1 , K_2 и K_3).
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "G" результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения биссектрис или центра вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности, то есть точки K_C (I_C) (координат точки пересечения биссектрис по трем вариантам попарно рассматриваемых биссектрис, величин расстояний между точкой пересечения биссектрис и вершинами треугольника), в соответствии с таблицей 21.
 - ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и биссектрисы треугольника, с последующим указанием точки взаимного пересечения биссектрис треугольника (точки K_C).
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "H" результатов реализации расчетов параметров радиусов вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$), опущенных на стороны BC , AC и AB соответственно (коэффициентов уравнений радиусов вписанной окружности, координат точек пересечения сторон и опущенных на них радиусов вписанной окружности, величин радиусов вписанной окружности), в соответствии с таблицей 22.
 - ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и биссектрисы треугольника, с последующей визуализацией радиусов вписанной в треугольник окружности и самой вписанной в треугольник окружности, а также поочередным указанием центра вписанной окружности (точки I_C) и точек оснований радиусов вписанной окружности (точек L_1 , L_2 и L_3 соответственно).
- **CALCUL DES CIR (4)** – подтверждение выполнения расчетов параметров серединных перпендикуляров, проведенных к

сторонам треугольника, и описанной вокруг него окружности с последовательным отображением следующих окон (рис. 8N):

- ✓ Окна вывода в виде матрицы "K" результатов реализации расчетов параметров серединных перпендикуляров для треугольника $\triangle ABC$ (M_1N_1 , M_2N_2 и M_3N_3), опущенных на стороны BC , AC и AB соответственно (координат точек пересечения сторон и опущенных на них серединных перпендикуляров, коэффициентов уравнений серединных перпендикуляров, величин серединных перпендикуляров), в соответствии с таблицей 23.
- ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны треугольника, с последующей параллельной визуализацией прямых, отражающих серединные перпендикуляры треугольника, а также поочередным указанием оснований серединных перпендикуляров треугольника (точек M_1 , M_2 и M_3 соответственно).
- ✓ Окна вывода в виде матрицы "L" результатов реализации расчетов параметров точки взаимного пересечения серединных перпендикуляров или центра описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности, то есть точки N_C (D_C) (координат точки пересечения серединных перпендикуляров по трем вариантам попарно рассматриваемых серединных перпендикуляров и величин расстояний между точкой пересечения серединных перпендикуляров и серединами сторон треугольника), в соответствии с таблицей 24.
- ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и серединные перпендикуляры треугольника, с последующим указанием точки их взаимного пересечения (точки D_C).
- ✓ Окна вывода в виде матрицы "M" результатов реализации расчетов параметров радиусов описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности (D_{CA} , D_{CB} и D_{CC}) с основаниями, являющимися вершинами треугольника (точками A , B и C), в соответствии с таблицей 25.
- ✓ Окна параллельной визуализации прямых, отражающих стороны и серединные перпендикуляры треугольника, с последующей параллельной визуализацией радиусов описанной окружности и самой описанной вокруг треугольника окружности, а также с поочередным указанием центра описанной окружности (точки D_C) и оснований радиусов описанной окружности (точек A , B и C)

(коэффициентов уравнений радиусов описанной окружности, величин радиусов описанной окружности).

➤ **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

В процессе выполнения программы итоговые результаты проецируются в указанные ниже соответствующие матрицы (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов "RUN.MATrix"):

- ❖ Данные о координатах точек проецируются в матрицу "Z".
- ❖ Данные о значениях параметров сторон треугольника $\triangle ABC$ (AB , AC и BC) проецируются в матрицу "A".
- ❖ Данные о значениях параметров высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3) проецируются в матрицу "B".
- ❖ Данные о значениях параметров пересечения высот треугольника $\triangle ABC$ (AH_1 , BH_2 и CH_3) проецируются в матрицу "C".
- ❖ Данные о значениях параметров медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3) проецируются в матрицу "D".
- ❖ Данные о значениях параметров пересечения медиан треугольника $\triangle ABC$ (AM_1 , BM_2 и CM_3) проецируются в матрицу "E".
- ❖ Данные о значениях параметров биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3) проецируются в матрицу "F".
- ❖ Данные о значениях параметров пересечения биссектрис треугольника $\triangle ABC$ (AK_1 , BK_2 и CK_3) проецируются в матрицу "G".
- ❖ Данные о значениях параметров радиуса вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности ($I_C L_1$, $I_C L_2$ и $I_C L_3$) проецируются в матрицу "H".
- ❖ Данные о значениях параметров серединных перпендикуляров треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$, $M_2 N_2$ и $M_3 N_3$) проецируются в матрицу "K".
- ❖ Данные о значениях характеристик пересечения серединных перпендикуляров треугольника $\triangle ABC$ ($M_1 N_1$, $M_2 N_2$ и $M_3 N_3$) проецируются в матрицу "L".
- ❖ Данные о значениях характеристик радиуса описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности ($D_C A$, $D_C B$ и $D_C C$) проецируются в матрицу "M".

Таблица 14

Содержимое матрицы "Z"

Значение	1	2
1	X_A	Y_A
2	X_B	Y_B
3	X_C	Y_C

Таблица 15

Содержимое матрицы "A"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_A	Y_A	X_B	Y_B	k_{AB}	b_{AB}	α_{AB}	l_{AB}
2	X_A	Y_A	X_C	Y_C	k_{AC}	b_{AC}	α_{AC}	l_{AC}
3	X_B	Y_B	X_C	Y_C	k_{BC}	b_{BC}	α_{BC}	l_{BC}

Таблица 16

Содержимое матрицы "B"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	X_A	Y_A	X_{H1}	Y_{H1}	k_{AH1}	b_{AH1}	α_{AH1}	l_{AH1}	$S_{\Delta ABC} = (l_{BC} \cdot l_{AH1})/2$
2	X_B	Y_B	X_{H2}	Y_{H2}	k_{BH2}	b_{BH2}	α_{BH2}	l_{BH2}	$S_{\Delta ABC} = (l_{AC} \cdot l_{BH2})/2$
3	X_C	Y_C	X_{H3}	Y_{H3}	k_{CH3}	b_{CH3}	α_{CH3}	l_{CH3}	$S_{\Delta ABC} = (l_{AB} \cdot l_{CH3})/2$

Таблица 17

Содержимое матрицы "C"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	X_A	Y_A	X_{H1}	Y_{H1}	X_B	Y_B	X_{H2}	Y_{H2}	X_{HC}	Y_{HC}	l_{HCA}
2	X_A	Y_A	X_{H1}	Y_{H1}	X_C	Y_C	X_{H3}	Y_{H3}	X_{HC}	Y_{HC}	l_{HCB}
3	X_B	Y_B	X_{H2}	Y_{H2}	X_C	Y_C	X_{H3}	Y_{H3}	X_{HC}	Y_{HC}	l_{HCC}

Таблица 18

Содержимое матрицы "D"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_A	Y_A	X_{M1}	Y_{M1}	k_{AM1}	b_{AM1}	α_{AM1}	l_{AM1}
2	X_B	Y_B	X_{M2}	Y_{M2}	k_{BM2}	b_{BM2}	α_{BM2}	l_{BM2}
3	X_C	Y_C	X_{M3}	Y_{M3}	k_{CM3}	b_{CM3}	α_{CM3}	l_{CM3}

Таблица 19

Содержимое матрицы "E"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	X_A	Y_A	X_{M1}	Y_{M1}	X_B	Y_B	X_{M2}	Y_{M2}	X_{MC}	Y_{MC}	l_{MCA}
2	X_A	Y_A	X_{M1}	Y_{M1}	X_C	Y_C	X_{M3}	Y_{M3}	X_{MC}	Y_{MC}	l_{MCB}
3	X_B	Y_B	X_{M2}	Y_{M2}	X_C	Y_C	X_{M3}	Y_{M3}	X_{MC}	Y_{MC}	l_{MCC}

Таблица 20

Содержимое матрицы "F"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_A	Y_A	X_{K1}	Y_{K1}	k_{AK1}	b_{AK1}	α_{AK1}	l_{AK1}
2	X_B	Y_B	X_{K2}	Y_{K2}	k_{BK2}	b_{BK2}	α_{BK2}	l_{BK2}
3	X_C	Y_C	X_{K3}	Y_{K3}	k_{CK3}	b_{CK3}	α_{CK3}	l_{CK3}

Таблица 21

Содержимое матрицы "G"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	X_A	Y_A	X_{K1}	Y_{K1}	X_B	Y_B	X_{K2}	Y_{K2}	X_{KC}	Y_{KC}	l_{KCA}
2	X_A	Y_A	X_{K1}	Y_{K1}	X_C	Y_C	X_{K3}	Y_{K3}	X_{KC}	Y_{KC}	l_{KCB}
3	X_B	Y_B	X_{K2}	Y_{K2}	X_C	Y_C	X_{K3}	Y_{K3}	X_{KC}	Y_{KC}	l_{KCC}

Таблица 22

Содержимое матрицы "H"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_{IC}	Y_{IC}	X_{L1}	Y_{L1}	k_{ICL1}	b_{ICL1}	α_{ICL1}	l_{ICL1}
2	X_{IC}	Y_{IC}	X_{L2}	Y_{L2}	k_{ICL2}	b_{ICL2}	α_{ICL2}	l_{ICL2}
3	X_{IC}	Y_{IC}	X_{L3}	Y_{L3}	k_{ICL3}	b_{ICL3}	α_{ICL3}	l_{ICL3}

Таблица 23

Содержимое матрицы "K"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_{M1}	Y_{M1}	X_{N1}	Y_{N1}	k_{M1N1}	b_{M1N1}	α_{M1N1}	l_{M1N1}
2	X_{M2}	Y_{M2}	X_{N2}	Y_{N2}	k_{M2N2}	b_{M2N2}	α_{M2N2}	l_{M2N2}
3	X_{M3}	Y_{M3}	X_{N3}	Y_{N3}	k_{M3N3}	b_{M3N3}	α_{M3N3}	l_{M3N3}

Таблица 24

Содержимое матрицы "L"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	X_{M1}	Y_{M1}	X_{N1}	Y_{N1}	X_{M2}	Y_{M2}	X_{N2}	Y_{N2}	X_{NC}	Y_{NC}	l_{NCM1}
2	X_{M1}	Y_{M1}	X_{N1}	Y_{N1}	X_{M3}	Y_{M3}	X_{N3}	Y_{N3}	X_{NC}	Y_{NC}	l_{NCM2}
3	X_{M2}	Y_{M2}	X_{N2}	Y_{N2}	X_{M3}	Y_{M3}	X_{N3}	Y_{N3}	X_{NC}	Y_{NC}	l_{NCM3}

Таблица 25

Содержимое матрицы "M"

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X_{DC}	Y_{DC}	X_A	Y_A	k_{DCA}	b_{DCA}	α_{DCA}	l_{DCA}
2	X_{DC}	Y_{DC}	X_B	Y_B	k_{DCB}	b_{DCB}	α_{DCB}	l_{DCB}
3	X_{DC}	Y_{DC}	X_C	Y_C	k_{DCC}	b_{DCC}	α_{DCC}	l_{DCC}

3. Факультатив по исследованию геометрических свойств равнобедренных треугольников и правильных четырехугольных пирамид с использованием графического калькулятора

В данной главе представлен разработанный В.В. Богуном факультатив по исследованию геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности "Математика", с описанием проекта, включающего ряд взаимосвязанных задач, с рассмотрением соответствующей авторской программы для графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* и методики ее использования.

В рамках школьного курса геометрии геометрические свойства равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве рассматриваются только с точки зрения сформулированных нескольких определений, свойств и ряда доказываемых теорем. Однако в курсе элементарной геометрии не освещаются вопросы широкого исследования указанных фигур в ракурсе соотношений между линейными и угловыми размерами элементов, входящих в состав данных геометрических фигур.

Следует отметить, что в процессе решения задач, возникающих при исследовании геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве с точки зрения реализации соотношений между угловыми и линейными характеристиками данных фигур, полноценно используются в совокупности знания из двух разделов математики – элементарной геометрии и тригонометрии.

Основная цель факультатива состоит в использовании графического калькулятора как средства интеграции математических и информационных знаний при выполнении численных расчетов, суть которых заключается в нахождении и визуализации параметров геометрических фигур на основе использования тригонометрических соотношений.

При реализации рассматриваемого проекта на основании поставленной цели были сформулированы следующие математические, информационные и дидактические задачи:

1. Изучение геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных

пирамид в пространстве средствами и методами элементарной геометрии и тригонометрии в интеграционных рамках.

2. Применение метода проектов при решении математических задач.
3. Применение различных методических концепций: самореализация, самопроверка, принципы наглядного моделирования и фундирования математических знаний.
4. Применение информационно-коммуникационных технологий при решении математических задач и выполнении проекта в целом.

Данный раздел можно условно разделить на две составляющие:

1. Исследование геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости.
2. Исследование геометрических свойств правильных четырехугольных пирамид в пространстве.

Содержание проекта включает следующие необходимые компоненты:

1. Теоретический аспект.
2. Описание этапов проведения практических занятий.
3. Описание программы с примером.

3.1. ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ РАВНОБЕДРЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ

3.1.1. Теоретический аспект

Для полноценного описания геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости внесем дополнительное определение:

- **Основная высота равнобедренного треугольника** – высота равнобедренного треугольника, опущенная из вершины, являющейся точкой пересечения боковых сторон, на основание, и, соответственно, пересекающей последнее в его середине.

Исследуем соотношения между линейными и угловыми элементами равнобедренных треугольников.

Теорема 1: "Об отношении основной высоты равнобедренного треугольника к радиусу вписанной в него окружности"

Отношение основной высоты равнобедренного треугольника к радиусу (диаметру) вписанной в него окружности равно сумме (половине суммы) единицы и величины, обратной по значению косинусу угла при основании.

Исходные данные:

Равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ (рис. 9): $BD = h$ — основная высота, опущенная из вершины B на основание $AC = 2a$ ($AD = CD = a$); $AB = BC = b$ — боковые стороны треугольника; $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r$ ($DF = d$) — радиусы (диаметр) вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности; $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ — углы при основании равнобедренного треугольника.

Доказать:

$$\frac{h}{r} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha} \text{ и } \frac{h}{d} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right).$$

Доказательство:

Формулы для вычисления площади равнобедренного треугольника $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} Pr = \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot DO_1 = \frac{2(a+b)}{2} \cdot r = (a+b) \cdot r.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{2ah}{2} = ah.$$

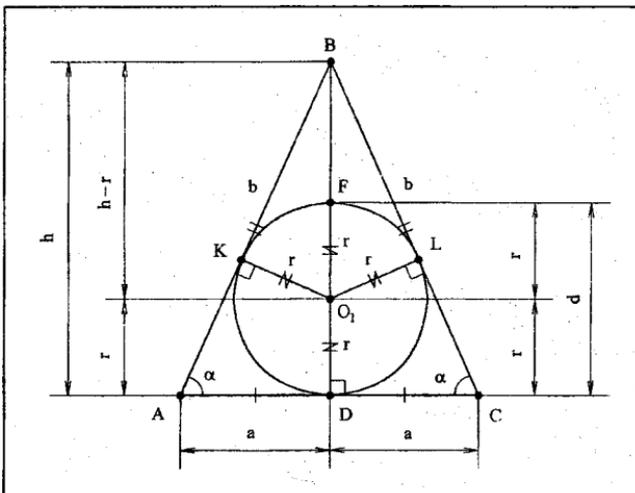


Рис. 9. Равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ с вписанной в него окружностью

Поскольку равны левые части выражений, указанных выше, то равны и правые:

$$(a+b) \cdot r = ah \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Тогда $\frac{h}{d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{r} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right).$

Следствия из теоремы 1:

- 1.1. Отношение половины основания равнобедренного треугольника к радиусу вписанной в него окружности равно котангенсу половинного угла при основании (центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис углов треугольника):

$$\frac{a}{r} = \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{r} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg}(\alpha/2).$$

- 1.2. Отношение боковой стороны равнобедренного треугольника к радиусу вписанной в него окружности равно отношению котангенса половинного угла при основании к косинусу угла при основании:

$$\frac{b}{r} = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{r} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha}\right) = \frac{\cos \alpha + 1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{\cos \alpha}.$$

- 1.3. В равнобедренном треугольнике отношение разности между основной высотой и радиусом вписанной окружности к величине последнего равно величине, обратной по значению косинусу угла при основании:

$$\frac{h-r}{r} = \frac{h}{r} - 1 = 1 + \frac{1}{\cos \alpha} - 1 = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Теорема 2: "Об отношении основной высоты равнобедренного треугольника к радиусу описанной вокруг него окружности"

Отношение основной высоты равнобедренного треугольника к радиусу (диаметру) описанной вокруг него окружности равно удвоенному квадрату (квадрату) синуса угла при основании или разности (половине разности) единицы и косинуса двойного угла при основании.

Исходные данные:

Равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ (рис. 10): $BD = h$ – основная высота, опущенная из вершины B на основание $AC = 2a$ ($AD = CD = a$); $AB = BC = b$ – боковые стороны треугольника; $AO_2 = BO_2 = CO_2 = EO_2 = R$ ($BE = D$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности; $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ – углы при основании равнобедренного треугольника.

Доказать:

$$\frac{h}{R} = 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \quad \text{и} \quad \frac{h}{D} = \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

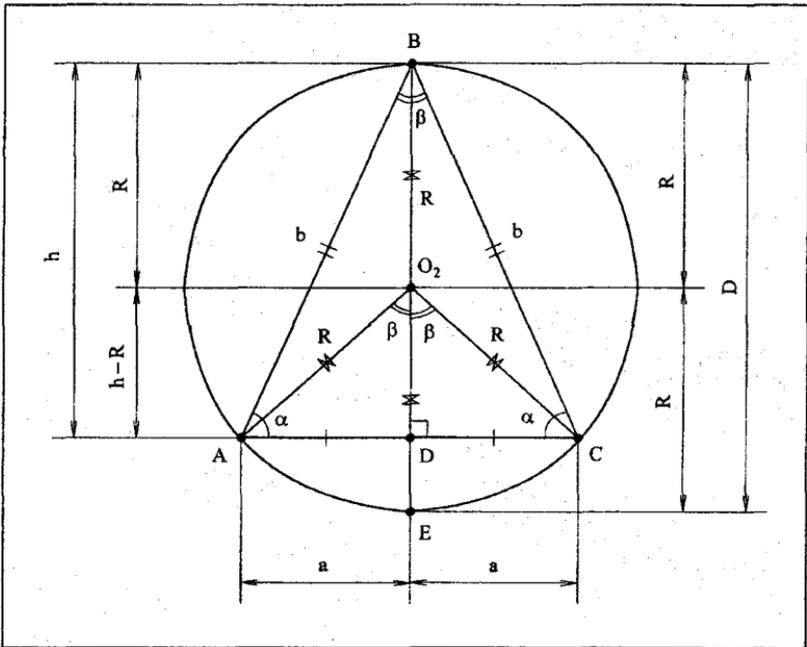


Рис. 10. Равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ с описанной вокруг него окружностью

Доказательство:

Формулы для вычисления площади равнобедренного треугольника $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot AO_2} = \frac{2abb}{4R} = \frac{ab^2}{2R}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{2ah}{2} = ah.$$

Поскольку равны левые части выражений, указанных выше, то равны и правые:

$$\frac{ab^2}{2R} = ah \Rightarrow \frac{1}{2R} = \frac{h}{b^2}.$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow 2R = \frac{b^2}{h} = \frac{h^2}{h \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{h}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\frac{h}{R} = 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha.$$

$$\text{Тогда } \frac{h}{D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{R} = \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

Следствия из теоремы 2:

- 2.1. Отношение половины основания равнобедренного треугольника к радиусу описанной вокруг него окружности равно синусу двойного угла при основании:

$$\begin{aligned} \frac{a}{R} &= \sin \angle AO_2D = \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{R} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot 2 \sin^2 \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot 2 \sin^2 \alpha = \\ &= \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

- 2.2. Отношение боковой стороны равнобедренного треугольника к радиусу описанной вокруг него окружности равно удвоенному синусу угла при основании:

$$\frac{b}{R} = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{R} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot 2 \sin^2 \alpha = 2 \sin \alpha.$$

- 2.3. В равнобедренном треугольнике отношение разности между радиусом описанной окружности и основной высотой к величине первого равно косинусу двойного угла при основании:

$$\frac{R-h}{R} = 1 - \frac{h}{R} = 1 - (1 - \cos 2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

- 2.4. В равнобедренном треугольнике два равных угла, образующих в сумме угол между радиусами описанной окружности, проведенными к вершинам основания, равны углу между боковыми сторонами треугольника при соответствующей вершине:

$$\begin{aligned} \cos \angle AO_2D &= \cos \angle CO_2D = \frac{h-R}{R} = \frac{h}{R} - 1 = (1 - \cos 2\alpha) - 1 = \\ &= -\cos 2\alpha = \cos(\pi - 2\alpha) = \cos \beta. \end{aligned}$$

Тогда $\angle AO_2D = \angle CO_2D = \pi - 2\alpha = \beta = \angle ABC$.

Таким образом, для равнобедренных треугольников на плоскости можно вывести относительно высоты треугольника (h) следующие соотношения (для половины основания (a), боковой стороны (b), радиуса (диаметра) вписанной ($r(d)$) и описанной ($R(D)$) окружностей), выражаемые через сочетание тригонометрических функций угла при основании:

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{h}{b} = \sin \alpha,$$

$$\frac{h}{r} = \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha}, \quad \frac{h}{h-r} = 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{h}{d} = \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha}, \quad \frac{h}{h-d} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{h}{R} = 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad \frac{h}{h-R} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha},$$

$$\frac{h}{D} = \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \frac{h}{D-h} = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}.$$

Для любого равнобедренного треугольника между основными линейными элементами существуют следующие интересные соотношения:

1. Для любого равнобедренного треугольника отношение основной высоты к половине основания равно отношению половины основания к разности между диаметром описанной вокруг треугольника окружности и основной высотой (квадрат половины основания равен произведению основной высоты и разности между диаметром описанной вокруг треугольника окружности и основной высотой), то есть: $\frac{h}{a} = \frac{a}{D-h}$

$$(a^2 = h \cdot (D-h));$$

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{a}{D-h} = \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{D-h} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{поэтому}$$

$$\frac{h}{a} = \frac{a}{D-h} \text{ и } a^2 = h \cdot (D-h).$$

2. Для любого равнобедренного треугольника отношение основной высоты к боковой стороне равно отношению боковой стороны к диаметру описанной вокруг треугольника окружности (квадрат боковой стороны равен произведению основной высоты и диаметра описанной вокруг треугольника окружности), то есть:

$$\frac{h}{b} = \frac{b}{D} \quad (b^2 = h \cdot D).$$

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha, \quad \frac{b}{D} = \frac{b}{h} \cdot \frac{h}{D} = \frac{1}{\sin \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \sin \alpha, \quad \text{поэтому} \quad \frac{h}{b} = \frac{b}{D} \quad \text{и}$$

$$b^2 = h \cdot D.$$

3. Для любого равнобедренного треугольника отношение половины основания к боковой стороне равно отношению радиуса вписанной в треугольник окружности к разности между основной высотой и радиусом вписанной в треугольник

окружности, то есть: $\frac{a}{b} = \frac{r}{h-r}.$

$$\frac{a}{b} = \cos \alpha, \quad \frac{r}{h-r} = \frac{r}{h} \cdot \frac{h}{h-r} = \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \cdot (1 + \cos \alpha) = \cos \alpha,$$

поэтому $\frac{a}{b} = \frac{r}{h-r}.$

В предлагаемой ниже теореме рассмотрена взаимосвязь между диаметром описанной вокруг равнобедренного треугольника окружности и радиусом вписанной в данный треугольник окружности с использованием основной высоты треугольника.

Теорема 3: "О взаимосвязи окружностей в равнобедренном треугольнике"

Отношение разности между диаметром описанной вокруг равнобедренного треугольника окружности и основной высотой к величине указанного диаметра равно квадрату отношения радиуса вписанной в треугольник окружности к разности между основной высотой и указанным радиусом и равно квадрату косинуса угла при основании равнобедренного треугольника:

$$\frac{D-h}{D} = \left(\frac{r}{h-r} \right)^2 = \cos^2 \alpha.$$

Исходные данные:

Равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ (рис. 11): $BD = h$ – основная высота, опущенная из вершины B на основание $AC = 2a$

($AD = CD = a$); $AB = BC = b$ – боковые стороны треугольник
 $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r$ ($DF = d$) – радиусы (диаметр) вписанной
 треугольник $\triangle ABC$ окружности; $AO_2 = BO_2 = CO_2 = EO_2 =$
 ($BE = D$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$
 окружности; $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ – углы при основании
 равнобедренного треугольника.

Доказать:

$$\frac{D-h}{D} = \left(\frac{r}{h-r} \right)^2 = \cos^2 \alpha .$$

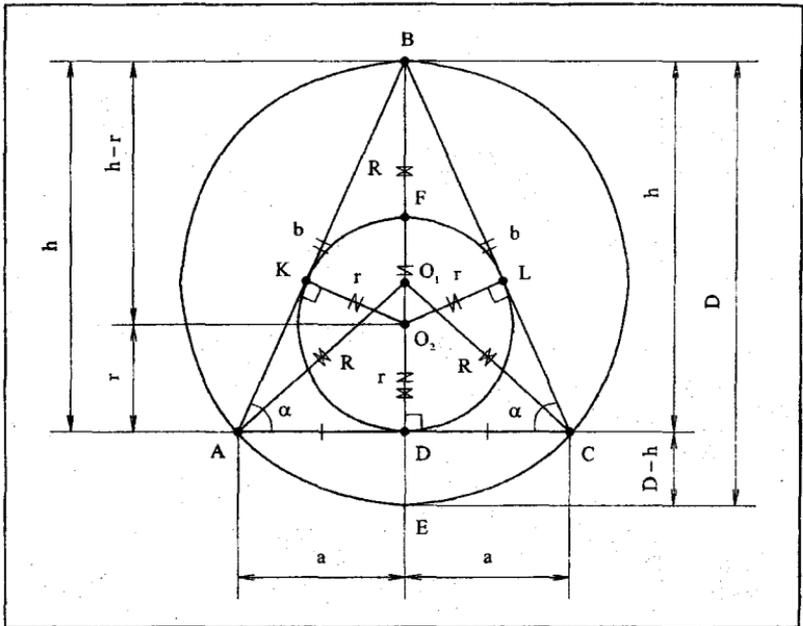


Рис. 11. Геометрическая интерпретация теоремы 3

Доказательство:

Согласно теоремам 1 и 2, указанным выше, имеем:

$$\frac{h-r}{r} = \frac{h}{r} - 1 = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \left(\frac{r}{h-r} \right)^2 = \cos^2 \alpha .$$

$$\frac{h}{D} = \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{D-h}{D} = 1 - \frac{h}{D} = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha.$$

В итоге получим:

$$\frac{D-h}{D} = \cos^2 \alpha = \left(\frac{r}{h-r} \right)^2, \text{ что и требовалось доказать.}$$

В предлагаемых ниже двух теоремах рассмотрены взаимосвязи между вписанными и описанными окружностями двух равнобедренных треугольников, имеющих один общий элемент. В первой теореме таким элементом является основная высота, во второй – основание. При совпадении боковых сторон равнобедренных треугольников получим их равенство по двум сторонам и углу между ними.

Теорема 4: "О равных углах двух равнобедренных треугольников, построенных на общей основной высоте"

Если два равнобедренных треугольника построены на общей основной высоте и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то центры вписанной и описанной окружностей данных треугольников, соответственно, совпадут.

Исходные данные:

Равнобедренные треугольники ΔA_1BC_1 и ΔA_2BC_2 с общей основной высотой $BD = h$; $A_1D = C_1D = a_1$ ($A_2D = C_2D = a_2$) – половины оснований треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2); $A_1B = C_1B = b_1$ ($A_2B = C_2B = b_2$) – боковые стороны треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2); $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r_1$ ($DF = d$) – радиусы (диаметр) вписанной в равнобедренный треугольник ΔA_1BC_1 окружности; $A_2O_2 = BO_2 = C_2O_2 = EO_2 = R_2$ ($BE = D$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного треугольника ΔA_2BC_2 окружности; $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle A_2BC_2 = \alpha_1$ ($\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = \alpha_2$) – углы при основании равнобедренного треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2) (рис. 12).

Необходимо доказать совпадение точек ($O = O_1 = O_2$) или равенство $h = r_1 + R_2$.

Доказательство:

Для равнобедренного треугольника ΔA_1BC_1 имеем соотношение:

$$\frac{h}{r_1} = 1 + \frac{l}{\cos \alpha_1}.$$

Для равнобедренного треугольника ΔA_2BC_2 имеем соотношение:

$$\frac{h}{R_2} = 2 \sin^2 \alpha_2 = 1 - \cos 2\alpha_2.$$

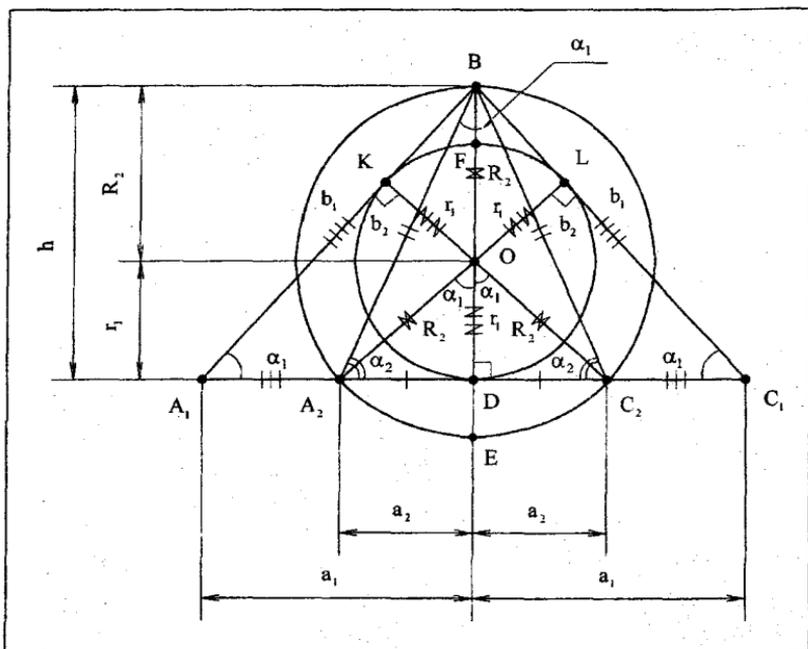


Рис. 12. Геометрическая интерпретация теоремы 4

По условию теоремы, имеем равенства: $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle A_2BC_2 = \alpha_1$ и $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = \alpha_2$.

Так как $\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = \alpha_2 = \frac{\pi - \angle A_2BC_2}{2} = \frac{\pi - \alpha_1}{2}$, то

получаем соотношение:

$$\frac{h}{R_2} = 1 - \cos 2\alpha_2 = 1 - \cos(\pi - \alpha_1) = 1 + \cos \alpha_1.$$

$$\frac{h}{r_1} = 1 + \frac{1}{\cos \alpha_1} = \frac{1 + \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1}.$$

Если $h = r_1 + R_2$ или т. $O = O_1 = O_2$, то $\frac{R_2}{h} + \frac{r_1}{h} = 1$.

Действительно, $\frac{R_2}{h} + \frac{r_1}{h} = \frac{1}{1 + \cos \alpha_1} + \frac{\cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} = \frac{1 + \cos \alpha_1}{1 + \cos \alpha_1} = 1$, что

и требовалось доказать.

При этом, согласно теореме 2, имеем равенство углов:

$$\angle A_2OD = \angle C_2OD = \angle A_2BC_2 = \angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \alpha_1.$$

Следствия из теоремы 4:

1. Если два равнобедренных треугольника построены на общей основной высоте и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то отношение оснований второго и первого треугольников равно разности величины, обратной по значению косинусу угла при основании первого треугольника, и единицы (удвоенной величине, обратной разности квадрата тангенса угла при основании второго треугольника, и единицы):

Так как $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h}{a_1}$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h}{a_2}$, то $a_1 \operatorname{tg} \alpha_1 = a_2 \operatorname{tg} \alpha_2$.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \alpha_1}{2} \right)} = \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{1 - \cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} =$$

$$= \frac{1 - \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{1}{\cos \alpha_1} - 1.$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha_2)}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{-\operatorname{tg} 2\alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_2} =$$

$$= \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1}.$$

2. Если два равнобедренных треугольника построены на общей основной высоте и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то отношение равных боковых сторон второго и первого треугольников равно удвоенному синусу половинного угла при основании первого треугольника (удвоенному косинусу угла при основании второго треугольника):

Поскольку $\sin \alpha_1 = \frac{h}{b_1}$ и $\sin \alpha_2 = \frac{h}{b_2}$, то $b_1 \sin \alpha_1 = b_2 \sin \alpha_2$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \left(\frac{\pi - \alpha_1}{2} \right)} = \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha_1}{2} \right)} = 2 \sin \left(\frac{\alpha_1}{2} \right).$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin(\pi - 2\alpha_2)}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin 2\alpha_2}{\sin \alpha_2} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2} = 2 \cos \alpha_2.$$

Теорема 5: "О равных углах двух равнобедренных треугольников, построенных на общем основании"

Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то описанная вокруг первого треугольника окружность проходит через центр описанной вокруг второго треугольника окружности, которая, в свою очередь, проходит через центр вписанной в первый треугольник окружности, а перпендикуляры, проведенные из вершин основания треугольников к боковым сторонам первого треугольника, пересекаются в центре описанной вокруг второго треугольника окружности, тогда как перпендикуляры, проведенные из вершин основания треугольников к боковым сторонам второго треугольника, пересекаются в центре вписанной в первый треугольник окружности.

Исходные данные:

Равнобедренные треугольники $\triangle AB_1C$ и $\triangle AB_2C$ с общим основанием $AC = 2a$ ($AD = CD = a$); $B_1D = h_1$ ($B_2D = h_2$) – основная высота треугольника $\triangle AB_1C$ ($\triangle AB_2C$); $AB_1 = CB_1 = b_1$ ($AB_2 = CB_2 = b_2$) – боковые стороны треугольника $\triangle AB_1C$ ($\triangle AB_2C$); $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r_1$ ($DF = d$) – радиусы (диаметр) вписанной в равнобедренный треугольник $\triangle AB_1C$ окружности; $AO_2 = B_1O_2 = CO_2 = O_2O_3 = R_1$ ($B_1O_3 = D_1$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного треугольника $\triangle AB_1C$ окружности; $AO_3 = B_2O_3 = CO_3 = O_1O_3 = R_2$ ($B_2O_1 = D_2$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного треугольника $\triangle AB_2C$ окружности;

$\angle B_1AC = \angle B_1CA = \angle AB_2C = \alpha_1$ ($\angle B_2AC = \angle B_2CA = \alpha_2$) – углы при основании равнобедренного треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2) (рис. 13).

Необходимо доказать, что:

$$D_1 = h_1 + (h_2 - R_2), \quad D_2 = h_2 + r_1.$$

$$\angle B_1AO_3 = \angle B_1CO_3 = \frac{\pi}{2}, \quad \angle O_1AB_2 = \angle O_1CB_2 = \frac{\pi}{2}.$$

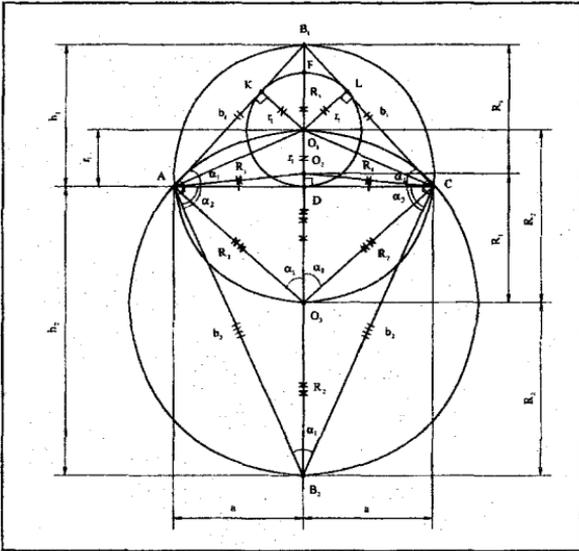


Рис. 13. Геометрическая интерпретация теоремы 5

Доказательство:

Докажем, что $D_1 = h_1 + (h_2 - R_2)$, или $D_1 = h_1 + h_2 - R_2$.

По условию теоремы, $\angle B_1AC = \angle B_1CA = \angle AB_2C = \alpha_1$;

$\angle B_2AC = \angle B_2CA = \alpha_2$, то есть:

$$\angle B_2AC = \angle B_2CA = \alpha_2 = \frac{\pi - \angle AB_2C}{2} = \frac{\pi - \alpha_1}{2}.$$

Из курса элементарной геометрии известно, что угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым углом.

Если $B_1O_3 = D_1$ – диаметр описанной вокруг равнобедренного треугольника ΔAB_1C окружности, то $\angle B_1AO_3 = \angle B_1CO_3 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$.

Тогда для равнобедренного треугольника ΔAO_3C имеем:

$$\angle AO_3D = \angle CO_3D = \angle AB_2C = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \alpha_1.$$

Согласно теореме 2, в равнобедренном треугольнике два равных угла, образующих в сумме угол между радиусами описанной окружности, проведенными к вершинам основания, равны углу между боковыми сторонами треугольника при соответствующей вершине.

Тогда для равнобедренного треугольника $\triangle AB_2C$ точка O_3 является центром описанной вокруг него окружности, так как $\angle AO_3D = \angle CO_3D = \angle AB_2C = \alpha_1$, то есть $D_1 = h_1 + h_2 - R_2$.

Аналогично, если $B_2O_1 = D_2$ — диаметр описанной вокруг равнобедренного $\triangle AB_2C$ окружности, то $\angle O_1AB_2 = \angle O_1CB_2 = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно, для равнобедренного треугольника $\triangle AO_1C$ имеем:

$$\angle AO_1D = \angle CO_1D = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1}{2}.$$

Тогда для равнобедренного треугольника $\triangle AB_1C$ точка O_1 является центром вписанной в него окружности, так как

$$\angle O_1AC = \angle O_1CA = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha_1}{2} \right) = \frac{\alpha_1}{2} \text{ и } \angle B_1AC = \angle B_1CA = \alpha_1, \text{ то есть}$$

$$D_2 = h_2 + r_1.$$

Теорема доказана.

Следствия из теоремы 5:

1. Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то отношение основных высот второго и первого треугольников равно отношению косинуса угла при основании первого треугольника к разности квадрата тангенса угла при основании второго треугольника и единицы):

$$\text{Так как } \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_1}{a} \text{ и } \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_2}{a}, \text{ то } h_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = h_2 \operatorname{tg} \alpha_1.$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi - \alpha_1}{2} \right)}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\sin \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1} \cdot \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1}.$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg}(\pi - 2\alpha_2)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{-\operatorname{tg} 2\alpha_2} = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1}{2\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1}{2}.$$

2. Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то отношение величины отрезка прямой, включающего основные высоты треугольников, к основной высоте второго треугольника равно величине, обратной по значению косинусу угла при основании первого треугольника (отношение суммы квадрата тангенса угла при основании второго треугольника и единицы к разности данных составляющих):

Так как $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1}$, то получим равенство:

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = 1 + \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{1 - \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \frac{1}{\cos \alpha_1}.$$

Так как $\frac{h_2}{h_1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1}{2}$, то

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = 1 + \frac{h_1}{h_2} = 1 + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha_2 - 1}.$$

3. Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании и угол при основании одного треугольника равен углу между боковыми сторонами второго, то отношение боковых сторон второго и первого треугольников равно отношению косинуса угла при основании первого треугольника к синусу половинного указанного угла (отношению, взятому со знаком минус, косинусов двойного и полного угла при основании второго треугольника):

Поскольку $\cos \alpha_1 = \frac{a}{b_1}$ и $\cos \alpha_2 = \frac{a}{b_2}$, то $b_1 \cos \alpha_1 = b_2 \cos \alpha_2$.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos\left(\frac{\pi - \alpha_1}{2}\right)} = \frac{\cos \alpha_1}{\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)}.$$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos(\pi - 2\alpha_2)}{\cos \alpha_2} = -\frac{\cos 2\alpha_2}{\cos \alpha_2}.$$

3.1.2. Описание этапов проведения факультативных занятий

Факультативные занятия по реализации вычислений и визуализации различных параметров равнобедренных треугольников на плоскости с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "GEOTRIAN" могут быть разделены на два этапа.

1 этап – "Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров равнобедренных треугольников на плоскости аналитическим методом"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента с целью организации коллективной деятельности с учетом различных личностных психологических особенностей студентов. Каждой из групп предлагаются различные численные значения определенных углов и координат середины основания для рассматриваемого равнобедренного треугольника с целью реализации нахождения численных значений необходимых угловых и линейных параметров треугольника, при этом студентами в рамках малой группы осуществляется совместное нахождение значений собственно величин и геометрических функций необходимых углов, а затем предполагается проведение каждым из студентов в рамках малой группы комплексного анализа взаимосвязанных параметров (например, соотношений между необходимыми линейными элементами полученных треугольников с использованием значений тригонометрических функций углов при основании, расчет размеров линейных элементов треугольников и т.д.) с последующей визуализацией полученных результатов.

Следует отметить, что необходимые расчеты обязательно отражаются на листе бумаге с отображением подробных промежуточных и итоговых расчетов, а также с визуализацией исследуемой совокупности объектов.

II этап – “Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров равнобедренных треугольников на плоскости с использованием представленной в графическом калькуляторе программы “GEOTRIAN””

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные варианты численных значений определенных углов и координат середины основания для определенного количества равнобедренных треугольников в рамках одной малой группы.

Студенты, прежде всего, проверяют правильность выполнения расчетов, реализованных на первом этапе, с проведением сравнительного визуального анализа полученных результатов на основе представленной в графическом калькуляторе программы “GEOTRIAN”, после чего осуществляют различные автоматические расчеты (указанные при описании первого этапа расчеты плюс поиск кратных соотношений между парами линейных элементов равнобедренных треугольников с адекватным выводом полученных результатов, реализация теорем взаимосвязи между равнобедренными треугольниками и т.д.) с последующей визуализацией, на основе которых формулируют необходимые выводы.

3.1.3. Описание программы с примером

Рассмотрим схему работы программы “GEOTRIAN”, предназначенной для проведения математического анализа равнобедренных треугольников на плоскости в рамках раздела “Элементарная геометрия на плоскости” курса элементарной геометрии.

Описание программы “GEOTRIAN” приведем на примере проведения математического анализа равнобедренного треугольника, который автор назвал “золотым треугольником 1-го рода”.

Для начала решения задачи представим дополнительную к изложенной ранее информацию о золотой пропорции, которая имеет непосредственное отношение к решаемой задаче.

Остановимся на геометрических аспектах золотой пропорции.

Принято считать, что понятие о золотой пропорции ввел в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик (VI в. до н.э.).

Есть предположение, что Пифагор свое знание золотой пропорции позаимствовал у египтян и вавилонян. Золотая пропорция отражена в многочисленных памятниках как древней архитектуры (пирамида Хеопса и другие древнеегипетские храмы и сооружения, древнегреческие памятники Парфенон и Пантеон), так и современности (здание сената в Кремле, Голицынская больница, дом Пашкова в Москве). Необходимо также отметить, что особый интерес к золотой пропорции ощущался и в средних веках в связи с ее применением как в геометрии, так и в искусстве (издание в 1509 году в Венеции книги монаха и величайшего математика Италии Луки Пачоли "Божественная пропорция"), тогда как в 1855 году немецкий исследователь золотой пропорции профессор Цейзинг опубликовал свой труд "Эстетические исследования", в котором абсолютизировал золотую пропорцию, объявив ее универсальной для всех явлений природы и искусства.

На рис. 14 представлена геометрическая интерпретация золотой пропорции. Если начертить квадрат и разделить его на две половины, как это показано на рисунке, провести диагональ (линию DF), а затем при помощи циркуля развернуть данную диагональ, то получим отрезки BC , CG и BG , где BC , деленное на CG , равно BG , деленному на BC , то есть золотому числу, или φ .

Если отложить на диагонали DF отрезок $FH = CF$ и провести окружность с центром в точке D и радиусом, равным DH , то точка ее пересечения со стороной CD , то есть точка K , делит CD в золотой пропорции, а $DH = DK = CG$.

Вышесказанные утверждения можно записать в символическом виде:

$$\frac{BG}{BC} = \frac{BC}{CG} = \varphi \text{ и } \frac{CD}{DK} = \frac{DK}{CK} = \varphi.$$

В самом деле, по теореме Пифагора получим:

$$DF^2 = CD^2 + CF^2 = BC^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}BC^2.$$

$$BG = BC + CG = BF + FG = \frac{BC}{2} + DF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}BC = \varphi \cdot BC.$$

Тогда $\frac{BG}{BC} = \frac{BC}{CG} = \varphi.$

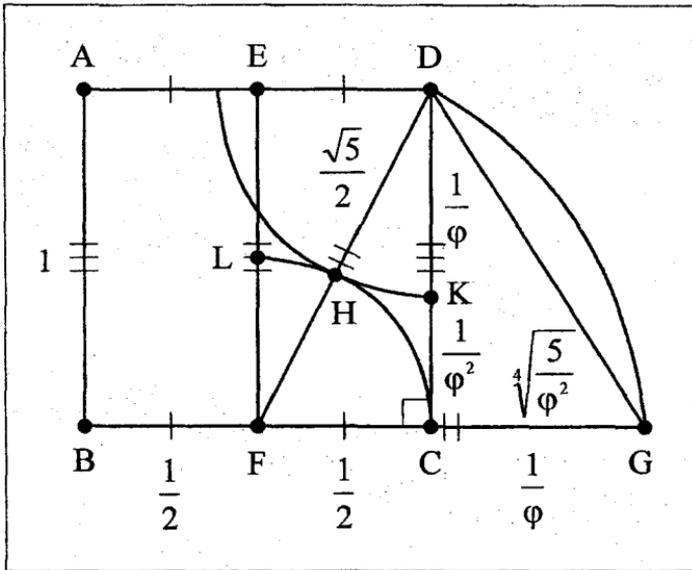


Рис. 14. Геометрическая интерпретация золотой пропорции

Отметим в треугольнике $\triangle DFG$ значения тригонометрических функций для $\angle DFG$:

$$\operatorname{tg} \angle DFG = \frac{CD}{CF} = 2, \quad \cos \angle DFG = \frac{CF}{DF} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \angle DFG = \frac{CD}{DF} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Так как треугольник $\triangle DFG$ – равнобедренный, то

$$\operatorname{tg} \angle DGF = \operatorname{tg} \angle GDF = \frac{CD}{CG} = \frac{BC}{CG} = \varphi.$$

Таким образом, если в равнобедренном треугольнике тангенс угла между боковыми сторонами равен двум, то тангенс угла при основании равен золотому числу.

По теореме Пифагора получим:

$$(FH + DH)^2 = CF^2 + CD^2 \quad \text{или} \quad FH^2 + 2 \cdot FH \cdot DH + DH^2 = CF^2 + CD^2.$$

Так как по построению $CF = FH = \frac{CD}{2} = \frac{BC}{2}$ и $DH = DK$, то:

$$\frac{CD^2}{4} + 2 \cdot \frac{CD}{2} \cdot DK + DK^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + CD^2, \quad \text{откуда имеем уравнение:}$$

$$CD \cdot DK + DK^2 = CD^2.$$

Разделив обе части уравнения на DK^2 , получим:

$$\left(\frac{CD}{DK}\right) + 1 = \left(\frac{CD}{DK}\right)^2, \left(\frac{CD}{DK}\right)^2 - \left(\frac{CD}{DK}\right) - 1 = 0.$$

Данное уравнение аналогично выражению $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, поэтому

$$\frac{CD}{DK} = \varphi, \text{ и, следовательно, } \frac{CD}{DK} = \frac{DK}{CK} = \varphi.$$

Рассмотрим взаимосвязь золотого числа с числом π .

Напомним, что число π равно отношению длины окружности к её диаметру.

Рассмотрим решение задачи Евклида о построении угла 72° — именно под этим углом видна сторона правильного пятиугольника из центра описанной вокруг него окружности, — приведенное в [3].

Возьмем отрезок AE и разделим его в соответствии с золотой пропорцией (рис. 15). Получим: $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE} = \varphi$.

Из точек B и E проведем окружности с радиусами, равными AB . При пересечении данных окружностей получим точку C : $BC = CE = AB$. Соединим отрезком прямой точки A и C .

Предположим, что $AC = AE$ (доказательство приведено ниже).

Так как в треугольнике $\triangle BCE$ получаем равенство $BC = CE = AB$, то данный треугольник является равнобедренным.

Если $\angle CBE = \angle CEB = \alpha$, то $\angle BCE = 180^\circ - 2\alpha = \pi - 2\alpha$.

Поскольку $\angle ABC$ является смежным с $\angle CBE$, то

$$\angle ABC = 180^\circ - \angle CBE = 180^\circ - \alpha = \pi - \alpha.$$

Треугольник $\triangle ACE$ является равнобедренным ($AC = AE$) и $\angle ACE = \angle AEC$.

Получим равенство: $\angle ACB + \angle BCE = \angle AEC$.

$$\text{Тогда } \angle ACB = \angle AEC - \angle BCE = \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = 3\alpha - 180^\circ = 3\alpha - \pi.$$

Так как $\triangle ABC$ равнобедренный ($AB = BC$), то

$$\angle CAB = \angle ACB = 3\alpha - 180^\circ = 3\alpha - \pi.$$

Поскольку сумма внутренних углов треугольника равна $180^\circ(\pi)$, то получим равенство:

$$\angle ABC + \angle ACB + \angle CAB = 180^\circ \quad \text{или} \quad (180^\circ - \alpha) + (3\alpha - 180^\circ) + (3\alpha - 180^\circ) = 180^\circ.$$

Получим уравнение: $5\alpha = 360^\circ$, откуда $\alpha = 72^\circ = \frac{2\pi}{5} \text{ рад}$.

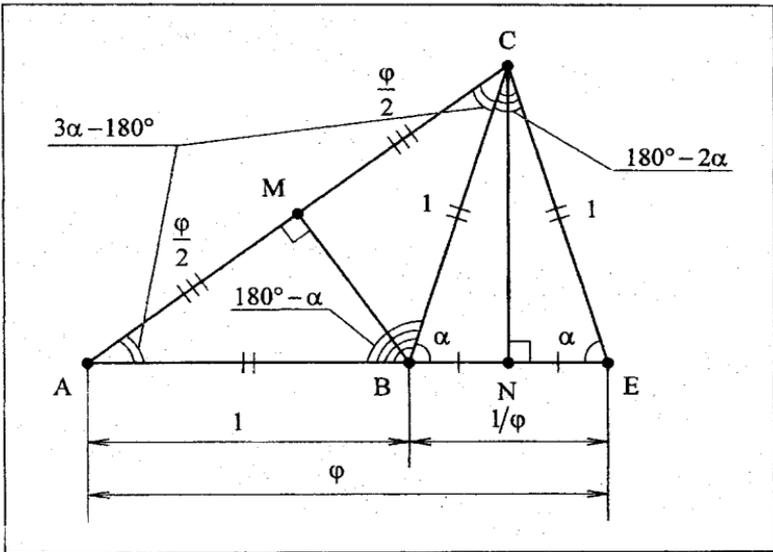


Рис. 15. К решению задачи Евклида

Докажем теперь, что $AC = AE$.

Так как $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE} = \varphi$, то для упрощения доказательства введем

обозначения: $AE = \varphi$, $AB = 1$ и $BE = \frac{1}{\varphi}$.

Проведем в равнобедренном треугольнике $\triangle BCE$ высоту CN из вершины C на основание BE .

$$CN^2 = BC^2 - BN^2 = BC^2 - \left(\frac{BE}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2\varphi}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4\varphi^2}.$$

Так как треугольник $\triangle ACN$ является прямоугольным, то по теореме Пифагора получим:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AN^2 + CN^2 = (AB + BN)^2 + CN^2 = \left(1 + \frac{1}{2\varphi}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4\varphi^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{4\varphi^2} + 1 - \frac{1}{4\varphi^2} = 2 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi = \varphi^2. \end{aligned}$$

Таким образом $AC = AE = \varphi$, что и требовалось доказать.

Установим взаимосвязь между золотым числом и числом π с использованием изложенного ниже доказательства равенства отрезков

AE и AC как следствие из решения задачи Евклида, отличающегося от доказательства равенства данных отрезков выше [3].

Так как $\angle CEB = \alpha = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}$ рад, то $\cos \alpha = \frac{EN}{CE} = \frac{1}{2\varphi}$ или

$$\cos 72^\circ = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2\varphi}.$$

$$\angle CAB = \angle BCA = 3\alpha - 180^\circ = 3 \cdot 72^\circ - 180^\circ = 36^\circ = \frac{\pi}{5} \text{ рад.}$$

Используя формулу половинного угла $\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \right)$,

получим:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2\varphi}}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 + \frac{1}{\varphi} \right) = \frac{1}{4} \cdot (1 + \varphi) = \frac{\varphi^2}{4}.$$

Таким образом, $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{2}$ или $\cos 36^\circ = \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2}$.

Последнее утверждение отражено на рис. 16.

Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный ($AB = BC$), то высота BM , проведенная из вершины B на основание AC , является также медианой и биссектрисой треугольника, поэтому $AM = MC$ и, следовательно,

$$\angle ABM = \angle CBM = \frac{180^\circ - \angle CBE}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку $\cos \angle CAB = \frac{AM}{AB}$, $AB = 1$ и $\cos \angle CAB = \cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2}$, то

$$AM = \frac{AC}{2} = AB \cdot \cos \angle CAB = \frac{\varphi}{2} \text{ и } AC = 2 \cdot AM = 2 \cdot \frac{\varphi}{2} = \varphi = AE.$$

Таким образом $AC = AE = \varphi$, что и было доказано в процессе решения задачи Евклида.

Можно сформулировать следующий вывод:

Косинус угла $\frac{\pi}{5}$ рад или 36° равен половине золотого числа, а

косинус угла $\frac{2\pi}{5}$ рад или 72° равен половине числа, обратного золотому числу – связь между золотым числом и числом π (таблица 26):

$$\cos \frac{\pi}{5} = \cos 36^\circ = \frac{\varphi}{2} \text{ и } \cos \frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ = \frac{1}{2\varphi}.$$

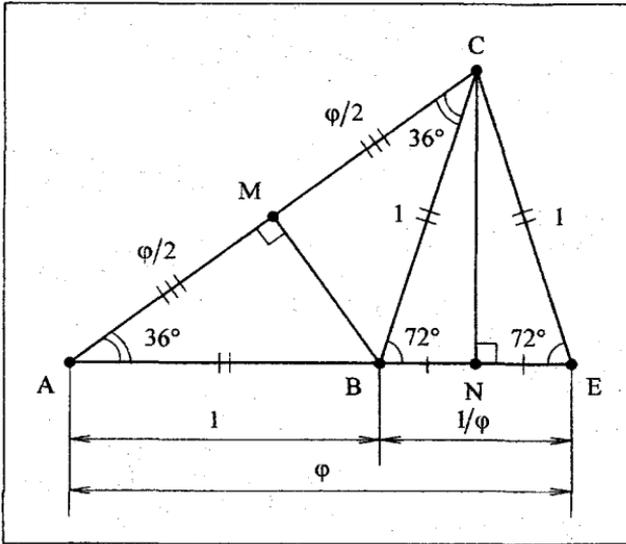


Рис. 16. К определению тригонометрических функций углов 36° и 72°

Таблица 26

Значения тригонометрических функций некоторых углов

1.1 x	рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
	град	0	30	36	45	60	72	90
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\sqrt{\frac{\varphi^2}{5}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5\varphi^2}}{2}$	1	
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\varphi}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2\varphi}$	0	
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{5}{\varphi^6}}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5\varphi^6}$	∞	
$\operatorname{ctg} x$	∞	$\sqrt{3}$	$\sqrt{\frac{\varphi^6}{5}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5\varphi^6}}$	0	

Рассмотрим геометрические свойства равнобедренного треугольника, названного автором как “золотой треугольник 1-го рода”, то есть равнобедренного треугольника, в котором отношение боковой стороны к половине основания равно золотому числу.

В золотом треугольнике 1-го рода косинусы углов при основании равны числу, обратному золотому, то есть получим выражение:

$$\cos \angle BAC = \cos \angle BCA = \cos \alpha = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\varphi}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{\varphi^2}} = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \text{а } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{\varphi}.$$

Окружность с центром в вершине основания, то есть в точке A , и радиусом AD , равным половине основания, пересекаясь с боковой стороной AB в точке E , делит её в золотой пропорции:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{BE} = \varphi, \quad \text{так как } AD = AE = \frac{AB}{\varphi}.$$

По теореме Пифагора, основная высота треугольника $\triangle ABC$ равна:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{\varphi^2 - 1} \cdot AD = \sqrt{\varphi} \cdot AD.$$

Таким образом, для золотого треугольника 1-го рода справедливо выражение: квадрат основной высоты равен произведению боковой стороны и половины основания или $BD^2 = AB \cdot AD = BC \cdot CD$.

Тогда, если $AD = CD = 1$, то $BD = \sqrt{\varphi} \cdot AD = \sqrt{\varphi}$, а $AB = BC = \varphi \cdot AD = \varphi$ (рис. 17).

Таким образом, для золотого треугольника 1-го рода можно вывести относительно высоты треугольника (h) следующие соотношения (для половины основания (a), боковой стороны (b), радиуса (диаметра) вписанной ($r(d)$) и описанной ($R(D)$) окружностей), выражаемые через сочетание тригонометрических функций угла при основании:

$$\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\varphi}, \quad \frac{h}{b} = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{\varphi}},$$

$$\frac{h}{r} = \frac{1 + \cos \alpha}{\cos \alpha} = \varphi^2, \quad \frac{h}{h-r} = 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \varphi,$$

$$\frac{h}{d} = \frac{1 + \cos \alpha}{2 \cos \alpha} = \frac{\varphi^2}{2}, \quad \frac{h}{h-d} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \varphi^3,$$

$$\frac{h}{R} = 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha = \frac{2}{\varphi}, \quad \frac{h}{h-R} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha - 1} = \frac{\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = 2\varphi^2,$$

$$\frac{h}{D} = \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{\varphi}, \quad \frac{h}{D-h} = \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \varphi.$$

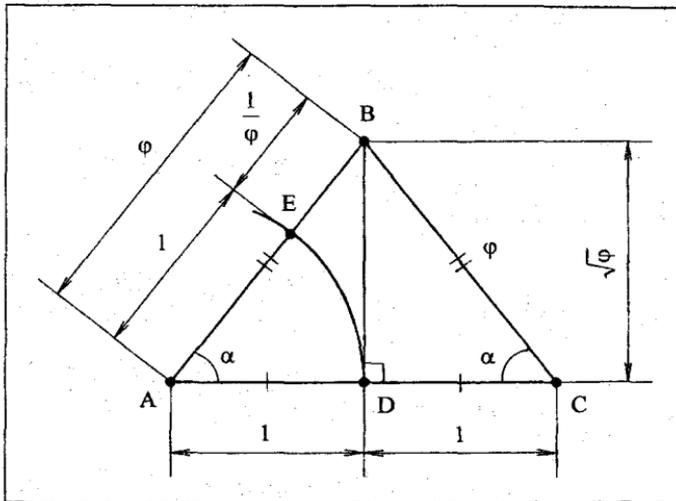


Рис. 17. Золотой треугольник 1-го рода

Рассмотрим свойства золотого треугольника 1-го рода:

- Центр вписанной в золотой треугольник 1-го рода окружности делит основную высоту в золотой пропорции.

Докажем данное утверждение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$, основная высота которого $BD = h$, половины основания $AD = CD = a$, боковые стороны — $AB = BC = b$, $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r$ ($DF = d$) — радиусы (диаметр) радиусы вписанной в треугольник $\triangle ABC$ окружности, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ — углы при основании треугольника $\triangle ABC$ (рис. 18).

В данном случае геометрическая интерпретация золотой пропорции отражается в следующих выражениях:

$$\frac{h}{h-r} = \frac{h-r}{r}, \quad \frac{h}{h-r} = 1 + \cos \alpha, \quad \frac{h-r}{r} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

При решении квадратного уравнения $1 + \cos \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, или $\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0$, имеем положительный корень уравнения: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что характерно только для рассматриваемого треугольника.

Тогда для золотого треугольника 1-го верны соотношения:

$$\frac{BD}{BO_1} = \frac{BO_1}{DO_1} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} = \varphi, \text{ или } \frac{h}{h-r} = \frac{h-r}{r} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} = \varphi.$$

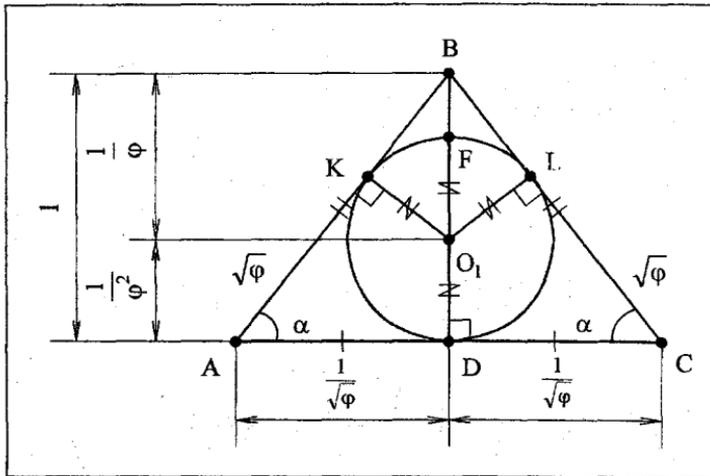


Рис. 18. Золотой треугольник 1-го рода с вписанной в него окружностью

- Середина основания золотого треугольника 1-го рода делит диаметр описанной вокруг данного треугольника окружности в золотой пропорции.

Докажем данное утверждение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$, основная высота которого равна $BD = h$, половины основания равны $AD = CD = a$, боковые стороны — $AB = BC = b$, $AO_2 = BO_2 = CO_2 = EO_2 = R$ ($BE = D$) — радиусы (диаметр) описанной вокруг треугольника $\triangle ABC$ окружности, $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ — углы при основании треугольника $\triangle ABC$ (рис. 19).

В данном случае геометрическая интерпретация золотой

пропорции отражается в следующих выражениях:

$$\frac{D}{h} = \frac{h}{D-h}, \quad \frac{D}{h} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{1-\cos^2 \alpha}, \quad \frac{h}{D-h} = \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 1} = \frac{1-\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

Получим уравнение $\cos^2 \alpha = (1-\cos^2 \alpha)^2$, или $\cos^4 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1 = 0$.

Решая биквадратное уравнение, получим адекватный положительный корень:

$$\cos^2 \alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 - \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2}.$$

Таким образом, получим положительное значение $\cos \alpha = \frac{1}{\varphi}$,

что характерно только для рассматриваемого треугольника.

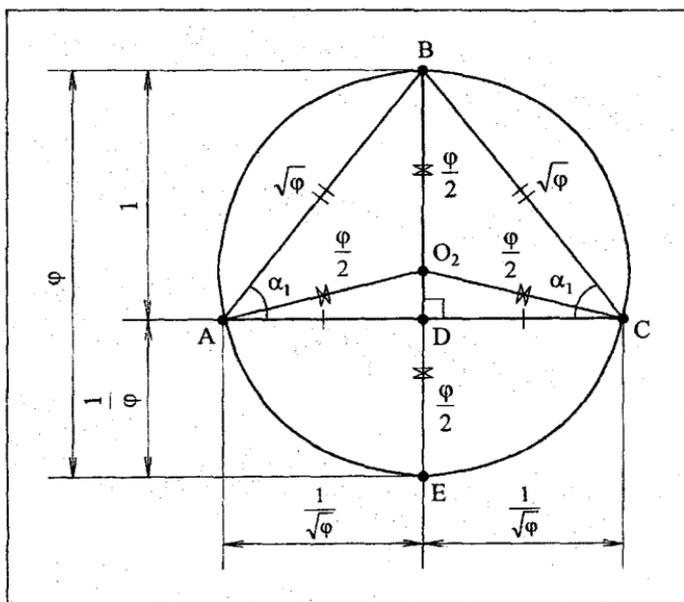


Рис. 19. Золотой треугольник 1-го рода с описанной вокруг него окружностью

Тогда для золотого треугольника 1-го рода верны соотношения:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} = \varphi \quad \text{или} \quad \frac{D}{h} = \frac{h}{D-h} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\cos \alpha} = \varphi.$$

- Если два равнобедренных треугольника построены на общей основной высоте, причем один из них является золотым треугольником 1-го рода, а угол между боковыми сторонами второго треугольника равен углу при основании первого, то его вершины делят половины основания золотого треугольника 1-го рода в золотой пропорции.

Докажем данное утверждение.

Рассмотрим равнобедренные ΔA_1BC_1 и ΔA_2BC_2 с общей основной высотой $BD = h$; $A_1D = C_1D = a_1$ ($A_2D = C_2D = a_2$) – половины оснований треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2); $A_1B = C_1B = b_1$ ($A_2B = C_2B = b_2$) – боковые стороны треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2); $DO = KO = LO = FO = r_1$ ($DF = d$) – радиусы (диаметр) вписанной в равнобедренный треугольник ΔA_1BC_1 окружности; $A_2O = B_2O = C_2O = EO = R_2$ ($BE = D$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного треугольника ΔA_2BC_2 окружности; $\angle BA_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle A_2BC_2 = \alpha_1$ ($\angle BA_2C_2 = \angle BC_2A_2 = \alpha_2$) – углы при основании равнобедренного треугольника ΔA_1BC_1 (ΔA_2BC_2) (рис. 20).

В данном случае геометрическая интерпретация золотой пропорции отражается в следующих выражениях:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1 - a_2}, \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1}, \quad \frac{a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1 - \cos \alpha_1}{2 \cos \alpha_1 - 1}.$$

При решении квадратного уравнения $\cos \alpha_1 (2 \cos \alpha_1 - 1) = (1 - \cos \alpha_1)^2$, или $\cos^2 \alpha_1 + \cos \alpha_1 - 1 = 0$, имеем

положительный корень уравнения: $\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что

характерно только для рассматриваемого треугольника.

В итоге получим, что если равнобедренный ΔA_1BC_1 является золотым треугольником 1-го рода, то справедливы соотношения:

$$\frac{A_1D}{A_2D} = \frac{A_2D}{A_1A_2} = \frac{C_1D}{C_2D} = \frac{C_2D}{C_1C_2} = \varphi, \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_1 - a_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1} = \varphi.$$

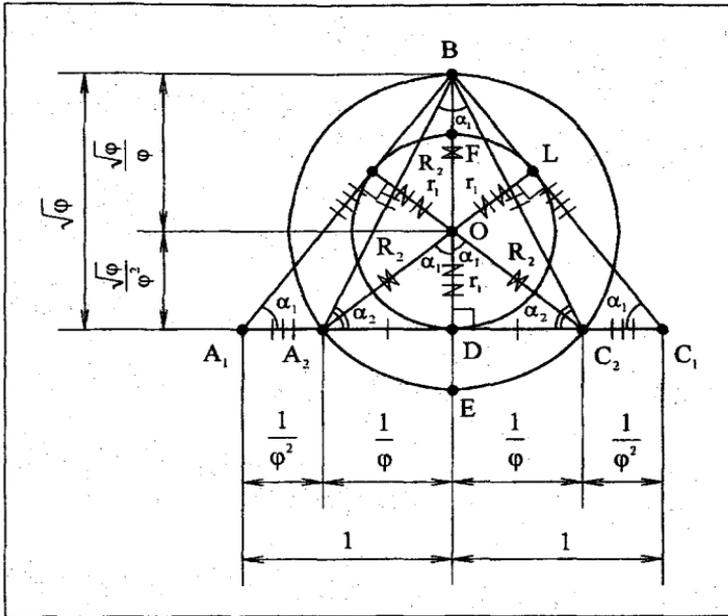


Рис. 20. Применение теоремы 4 к исследованию золотого треугольника 1-го рода

- Если два равнобедренных треугольника построены на общем основании, причем один из них является золотым треугольником 1-го рода, а угол между боковыми сторонами второго треугольника равен углу при основании первого, то общий центр основания треугольников делит отрезок прямой, включающий основные высоты треугольников, в золотой пропорции, равно как центр описанной вокруг второго треугольника окружности делит основную высоту второго треугольника, при этом радиус данной окружности равен основной высоте первого треугольника.

Докажем данное утверждение.

Рассмотрим равнобедренные треугольники $\triangle AB_1C$ и $\triangle AB_2C$ с общим основанием $AC = 2a$ ($AD = CD = a$); $B_1D = h_1$ ($B_2D = h_2$) – основная высота треугольника $\triangle AB_1C$ ($\triangle AB_2C$); $AB_1 = CB_1 = b_1$ ($AB_2 = CB_2 = b_2$) – боковые стороны треугольника $\triangle AB_1C$ ($\triangle AB_2C$); $DO_1 = KO_1 = LO_1 = FO_1 = r_1$ ($DF = d$) – радиусы (диаметр) вписанной в равнобедренный

треугольник $\triangle AB_1C$ окружности; $AO_2 = B_1O_2 = CO_2 = O_2O_3 = R_1$ ($B_1O_3 = D_1$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного $\triangle AB_1C$ окружности; $AO_3 = B_2O_3 = CO_3 = O_1O_3 = R_2$ ($B_2O_1 = D_2$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг равнобедренного треугольника $\triangle AB_2C$ окружности; $\angle B_1AC = \angle B_1CA = \angle AB_2C = \alpha_1$; ($\angle B_2AC = \angle B_2CA = \alpha_2$) – углы при основании равнобедренного треугольника $\triangle AB_1C$ ($\triangle AB_2C$) (рис. 21).

В первом указанном выше случае геометрическая интерпретация золотой пропорции отражается в следующих выражениях:

$$\frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_1}, \quad \frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1}, \quad \frac{h_2}{h_1} = \frac{\cos \alpha_1}{1 - \cos \alpha_1}.$$

При решении квадратного уравнения $1 - \cos \alpha_1 = \cos^2 \alpha_1$, или $\cos^2 \alpha_1 + \cos \alpha_1 - 1 = 0$, имеем положительный корень

уравнения: $\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что характерно только для

рассматриваемого треугольника.

В итоге получим, что если равнобедренный треугольник $\triangle AB_1C$ является золотым треугольником 1-го рода, то справедливы соотношения:

$$\frac{B_1B_2}{B_2D} = \frac{B_2D}{B_1D} = \varphi, \quad \text{или} \quad \frac{h_2 + h_1}{h_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{\cos \alpha_1} = \varphi.$$

Во втором указанном выше случае геометрическая интерпретация золотой пропорции отражается в следующих выражениях:

$$\frac{h_2}{R_2} = \frac{R_2}{h_2 - R_2}; \quad \frac{h_2}{R_2} = 2 \sin^2 \alpha_2 = 1 - \cos 2\alpha_2 = 1 + \cos(\pi - 2\alpha_2) = 1 + \cos \alpha_1, \quad \frac{R_2}{h_2 - R_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1}.$$

При решении квадратного уравнения $1 + \cos \alpha_1 = \frac{1}{\cos \alpha_1}$, или

$\cos^2 \alpha_1 + \cos \alpha_1 - 1 = 0$, имеем положительный корень

уравнения: $\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{1}{\varphi}$, что характерно только для золотого треугольника 1-го рода.

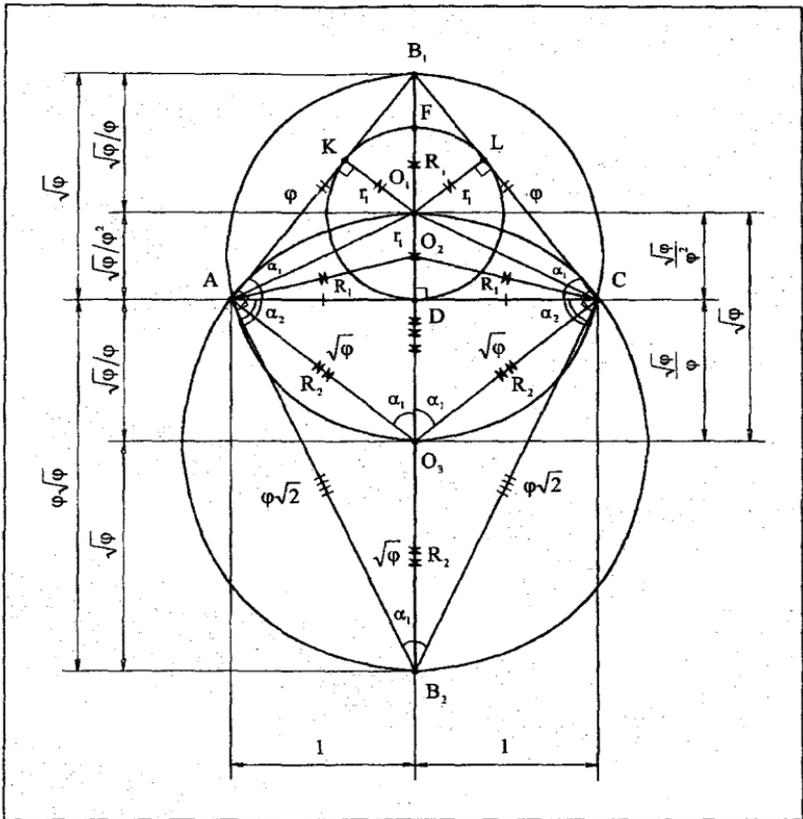


Рис. 21. Применение теоремы 5 к исследованию золотого треугольника 1-го рода

В итоге получим, что если равнобедренный треугольник AB_1C является золотым треугольником 1-го рода, то справедливы соотношения:

$$\frac{B_2D}{B_2O_3} = \frac{B_2O_3}{DO_3} = \varphi, \text{ или } \frac{h_2}{R_2} = \frac{R_2}{h_2 - R_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1} = \varphi.$$

Осталось доказать равенство радиуса описанной вокруг второго треугольника окружности основной высоте первого треугольника.

В рассматриваемом случае для равнобедренных треугольников $\triangle AB_1C$ (золотого треугольника 1-го рода) и $\triangle AB_2C$ справедливы соотношения:

$$\frac{B_2D}{B_1D} = \frac{B_2D}{B_2O_3} = \varphi, \text{ или } \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{R_2} = \frac{1}{\cos \alpha_1} = \varphi.$$

Тогда получим необходимое равенство: $B_1D = B_2O_3$, или $h_1 = R_2$.

Перейдем непосредственно к описанию программы "GEOTRIAN" на примере проведения математического анализа золотого треугольника 1-го рода в сопровождении логически расположенных на рис. 22 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGraM" при помощи активации соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "GEOTRIAN" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 22А).

При работе с рассматриваемыми меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После вывода указанного информационного окна последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню установки угловой системы мер со следующими позициями (рис. 22В):

- **SELECT ANGLES SYSTEM** – выбор устанавливаемой угловой системы мер:
 - **DEGREES (Deg) (1)** – выбор градусной угловой системы мер.
 - **RADIANS (Rad) (2)** – выбор радианной угловой системы мер.
 - **GRADS (Gra) (3)** – выбор градусной угловой системы мер.
 - **OR QUIT (4)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора определенной угловой системы мер в результате последовательного ввода необходимой цифры и нажатия клавиши "EXE" осуществляется вывод соответствующего информационного окна о выбранной системе угловой меры (рис. 22С).

После вывода указанного информационного окна последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню выбора способа загрузки значения угла со следующими позициями (рис. 22D):

- **SELECT OPER ANGLES** – выбор алгоритма получения значения необходимого угла:
 - **DIRECT ENTER ANG (1)** – непосредственный ввод значения угла с последующим отображением следующих окон:
 - ✓ Окна меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 22E).
 - ✓ Окна ввода значения выбранного угла (рис. 22F) в указанной ранее угловой системе мер.
 - **SOLVE EQUATION (2)** – получение значения угла в ходе решения вводимого уравнения с последовательным отображением следующих окон:
 - ✓ Окна последовательного ввода левой и правой частей уравнения, при этом в качестве неизвестной принимается значение угла.
 - ✓ Окна последовательного ввода нижней и верхней границ значений угла.
 - ✓ Окна вывода значения угла, рассчитанного в ходе решения искомого уравнения, в указанной ранее угловой системе мер.
 - ✓ Окна меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 22E).
 - **IMPORT PYRAM ANG (3)** – импорт значения угла из программы "GEOPYRAM" при непосредственном переходе из указанной программы вследствие предварительного экспорта значения соответствующего угла с отображением окна меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 22E).
 - **OR PREVIOUS (4)** – возврат в предыдущее меню.

Указанное выше меню выбора вида угла представляется следующими позициями (рис. 22E):

- **SELECT ENTER ANGLE** – выбор вида угла, для которого рассчитывается значение в указанной ранее угловой системе мер:
 - **A = BASE ANGLE (1)** – угол при основании исходного равнобедренного треугольника.
 - **B = (180-A)/2 (2)** – угол при основании равнобедренного треугольника, для которого угол между боковыми сторонами равен углу при основании исходного.
 - **C = 180-2A (3)** – угол при основании равнобедренного треугольника, для которого данный угол при основании равен углу между боковыми сторонами исходного.

Активировав в данном случае позицию для непосредственного ввода значения угла, осуществляем ввод значения угла через

тригонометрическое выражение ($A = \arccos(1/\varphi)$), или $A = \arccos(2/(1+\sqrt{5}))$, то есть [$\cos^{-1}(2/(1+\sqrt{5}))$]), что отражено на рис. 22F.

После реализации описанных выше пунктов в результате очередного нажатия клавиши "EXE" осуществляется математическая обработка полученного значения угла в соответствии с указанным его видом с поочередным отображением следующих окон:

- Окна последовательного вывода значений углов при основаниях указанных выше равнобедренных треугольников (A , B и C) с указанием наименования угла и его значения в заявленной ранее угловой системе мер (рис. 22G).
- Окна вывода в виде матрицы "A" значений основных углов при основаниях указанных выше равнобедренных треугольников (A , B и C) в градусах и радианах, а также основных тригонометрических функций для данных углов в соответствии с таблицей 27 (рис. 22H).

После вывода указанных информационных окон последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню выбора расчета соотношений между основными линейными элементами равнобедренных треугольников с углами при основаниях A , B и C соответственно, поиска и вывода найденных кратных из полученных соотношений со следующими позициями (рис. 22I):

- **CALCUL CORRELATIONS** – расчет соотношений:
- **IN TRIANGLE A (1)** – в равнобедренном треугольнике с углом при основании A с последовательным отображением следующих окон (рис. 22J):
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании A .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "B" значений соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании A на основе тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 28.
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании A .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "C" значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных

элементов равнобедренного треугольника с углом при основании A на основе обработки представленных в матрице “ B ” значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 29.

- **IN TRIANGLE B (2)** – в равнобедренном треугольнике с углом при основании B с последовательным отображением следующих окон (рис. 22K):
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании B .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ D ” значений соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании B на основе тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 30.
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании B .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ E ” значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании B на основе обработки представленных в матрице “ D ” значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 31.
- **IN TRIANGLE C (1)** – в равнобедренном треугольнике с углом при основании C с последовательным отображением следующих окон (рис. 22L):
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании C .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ F ” значений соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании C на основе тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 32.
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании C .

- ✓ Окна вывода в виде матрицы “*G*” значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании *C* на основе обработки представленных в матрице “*F*” значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 33.

- **OR NEXT (4)** – переход в последующее меню.
- **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора позиции перехода в последующее меню с помощью последовательного нажатия клавиш “4” и “*EXE*” отображается меню выбора возможностей построения равнобедренных треугольников с углами *A*, *B* или *C* со следующими позициями (рис. 22M):

- **DRAW PICTURE** – сформировать изображение:
- **TRIANGLE A (1)** – равнобедренного треугольника с углом при основании *A* с последовательным отображением следующих окон (рис. 22N):

- ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании *A* со следующими позициями:

- **PARAMS OF TRIANGLE A** – выбор исходного расчетного линейного элемента равнобедренного треугольника с углом при основании *A*:

- ❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании *A* по вводимому значению основной высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты “*H*”, абсциссы “*X0*” и ординаты “*Y0*” середины основания.

- ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании *A* по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания “*A*”, абсциссы “*X0*” и ординаты “*Y0*” середины основания.

- ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения равнобедренного треугольника с углом при основании *A*.

- ✓ Окна вывода в виде матрицы “*H*” значений координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании *A* в соответствии с таблицей 34.

- ✓ Окна параллельной визуализации сторон и основной высоты равнобедренного треугольника с углом при основании A с указанием середины основания (т. D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).
- **TRIANGLE B (2)** – равнобедренного треугольника с углом при основании B с последовательным отображением следующих окон (рис. 220):
 - ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании B со следующими позициями:
 - **PARAMS OF TRIANGLE B** – выбор исходного расчетного линейного элемента равнобедренного треугольника с углом при основании B ;
 - ❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании B по вводимому значению основной высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты “ H ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания.
 - ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании B по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания “ A ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания.
 - ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения равнобедренного треугольника с углом при основании B .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ T ” значений координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании B в соответствии с таблицей 35.
 - ✓ Окна параллельной визуализации сторон и основной высоты равнобедренного треугольника с углом при основании B с указанием середины основания (точки D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник

окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).

- **TRIANGLE C (1)** – равнобедренного треугольника с углом при основании C с последовательным отображением следующих окон (рис. 22Р):
 - ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании C со следующими позициями:
 - **PARAMS OF TRIANGLE C** – выбор исходного расчетного линейного элемента равнобедренного треугольника с углом при основании C ;
 - ❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании C по вводимому значению основной высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты “ H ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания.
 - ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании C по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания “ A ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания.
 - ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения равнобедренного треугольника с углом при основании C .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ J ” значений координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании C в соответствии с таблицей 36.
 - ✓ Окна параллельной визуализация сторон и основной высоты равнобедренного треугольника с углом при основании C с указанием середины основания (точки D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника

окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).

- **OR NEXT (4)** – переход в последующее меню.
- **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора позиции перехода в последующее меню путем последовательного нажатия клавиш “4” и “EXE” отображается меню выбора возможностей геометрической интерпретации теорем взаимосвязи между вписанными и описанными окружностями двух равнобедренных треугольников, имеющих один общий элемент (в первой теореме таким элементом является основная высота, во второй – основание) со следующими позициями (рис. 22Q):

- **THEOR COM H A B (1)** – геометрическая интерпретация теоремы для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общей основной высоте H с последовательным отображением следующих окон (рис. 22R):

- ✓ Окна последовательного ввода значений основной высоты “ H ”, абсциссы “ X_0 ” и ординаты “ Y_0 ” середины основания, являющихся общими для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно.
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ K ” значений координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общей основной высоте, в соответствии с таблицей 37.
- ✓ Окна параллельной визуализации для равнобедренного треугольника с углом при основании A сторон, основной высоты, вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1) с последующей параллельной визуализацией для равнобедренного треугольника с углом при основании B сторон, основной высоты, описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).

- **THEOR COM H C A (2)** – геометрическая интерпретация теоремы для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общей основной высоте H с последовательным отображением следующих окон (рис. 22S):

- ✓ Окна последовательного ввода значений основной высоты “ H ”, абсциссы “ X_0 ” и ординаты “ Y_0 ” середины основания,

являющихся общими для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно.

- ✓ Окна вывода в виде матрицы " L " значений координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общей основной высоте, в соответствии с таблицей 38.
- ✓ Окна параллельной визуализации для равнобедренного треугольника с углом при основании C сторон, основной высоты, вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1) с последующей параллельной визуализацией для равнобедренного треугольника с углом при основании A сторон, основной высоты, описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).

➤ **THEOR COM A A B (3)** – геометрическая интерпретация теоремы для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общем основании $2A$ с последовательным отображением следующих окон (рис. 22Т):

- ✓ Окна последовательного ввода значений основания " A ", абсциссы " X_0 " и ординаты " Y_0 " середины основания, являющихся общими для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно.
- ✓ Окна вывода в виде матрицы " M " значений координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общем основании, в соответствии с таблицей 39.
- ✓ Окна параллельной визуализации для равнобедренного треугольника с углом при основании A сторон, основной высоты, вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1) с последующей параллельной визуализацией для данного равнобедренного треугольника описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2), а также последующей параллельной визуализацией для равнобедренного треугольника с углом при основании B сторон, основной высоты, описанной вокруг

треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_3).

- **THEOR COM A C A (4)** – геометрическая интерпретация теоремы для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общем основании $2A$ с последовательным отображением следующих окон (рис. 22U):
 - ✓ Окна последовательного ввода значений основания “ A ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания, являющихся общими для двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно.
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы “ N ” значений координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общем основании, в соответствии с таблицей 40.
 - ✓ Окна параллельной визуализации для равнобедренного треугольника с углом при основании C сторон, основной высоты, вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1) с последующей параллельной визуализацией для данного равнобедренного треугольника описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2), а также последующей параллельной визуализацией для равнобедренного треугольника с углом при основании A сторон, основной высоты, описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_3).
- **OR NEXT (5)** – переход в последующее меню.
- **OR PREVIOUS (6)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора позиции перехода в последующее меню с помощью последовательного нажатия клавиш “5” и “EXE” отображается меню выбора значения угла, предназначенного для экспорта в программу “GEOPYRAM”, со следующими позициями (рис. 22V):

- **SELECT ANGLE EXPORT TO PROGRAM GEOPYRAM** – выбор наименования угла для экспорта значения в программу “GEOPYRAM”:
- **ANGLE A (1)** – экспорт значения угла A с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного

значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 22W).

- **ANGLE B (2)** – экспорт значения угла B с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 22X).
- **ANGLE A (3)** – экспорт значения угла C с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 22Y).
- **OR PREVIOUS (4)** – возврат в предыдущее меню.

В ходе выполнения программы итоговые результаты проецируются в указанные ниже соответствующие матрицы (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*”):

- ❖ Данные о значениях основных углов при основаниях равнобедренных треугольников (A , B и C) в градусах и радианах, а также основных тригонометрических функций для данных углов проецируются в матрицу “ A ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании A проецируются в матрицу “ B ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании A проецируются в матрицу “ C ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании B проецируются в матрицу “ D ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании B проецируются в матрицу “ E ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами равнобедренного треугольника с углом при основании C проецируются в матрицу “ F ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов равнобедренного треугольника с углом при основании C проецируются в матрицу “ G ”.
- ❖ Данные о значениях координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании A проецируются в матрицу “ H ”.

- ❖ Данные о значениях координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании B проецируются в матрицу " I ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек равнобедренного треугольника с углом при основании C проецируются в матрицу " J ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общей основной высоте, проецируются в матрицу " K ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общей основной высоте, проецируются в матрицу " L ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях A и B соответственно, построенных на общем основании, проецируются в матрицу " M ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек двух равнобедренных треугольников с углами при основаниях C и A соответственно, построенных на общем основании, проецируются в матрицу " N ".

Таблица 27

Содержимое матрицы " A "

Значение	1	2	3
1	A	B	C
2	$\sin A$	$\sin B$	$\sin C$
3	$\cos A$	$\cos B$	$\cos C$
4	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} B$	$\operatorname{tg} C$
5	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} B$	$\operatorname{ctg} C$

Таблица 28

Содержимое матрицы "B"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_A$	$\left(\frac{h}{b}\right)_A$	$\left(\frac{h}{r}\right)_A$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{h}{R}\right)_A$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_A$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_A$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_A$	$\left(\frac{a}{r}\right)_A$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{a}{R}\right)_A$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_A$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_A$	$\left(\frac{b}{a}\right)_A$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_A$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{b}{R}\right)_A$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_A$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_A$	$\left(\frac{r}{a}\right)_A$	$\left(\frac{r}{b}\right)_A$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{r}{R}\right)_A$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_A$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_A$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_A$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_A$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_A$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_A$	$\left(\frac{R}{a}\right)_A$	$\left(\frac{R}{b}\right)_A$	$\left(\frac{R}{r}\right)_A$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_A$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_A$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_A$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_A$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_A$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_A$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_A$	1

Таблица 29

Содержимое матрицы "C"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el_1^1)_A$	$(el_1^2)_A$	$(el_1^3)_A$	$(el_1^4)_A$	$\frac{(el_1^1)_A / (el_1^2)_A}{(el_1^3)_A / (el_1^4)_A}$
2	$(el_2^1)_A$	$(el_2^2)_A$	$(el_2^3)_A$	$(el_2^4)_A$	$\frac{(el_2^1)_A / (el_2^2)_A}{(el_2^3)_A / (el_2^4)_A}$
...
N-1	$(el_{N-1}^1)_A$	$(el_{N-1}^2)_A$	$(el_{N-1}^3)_A$	$(el_{N-1}^4)_A$	$\frac{(el_{N-1}^1)_A / (el_{N-1}^2)_A}{(el_{N-1}^3)_A / (el_{N-1}^4)_A}$
N	$(el_N^1)_A$	$(el_N^2)_A$	$(el_N^3)_A$	$(el_N^4)_A$	$\frac{(el_N^1)_A / (el_N^2)_A}{(el_N^3)_A / (el_N^4)_A}$

Таблица 30

Содержимое матрицы "D"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_B$	$\left(\frac{h}{b}\right)_B$	$\left(\frac{h}{r}\right)_B$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{h}{R}\right)_B$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_B$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_B$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_B$	$\left(\frac{a}{r}\right)_B$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{a}{R}\right)_B$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_B$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_B$	$\left(\frac{b}{a}\right)_B$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_B$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{b}{R}\right)_B$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_B$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_B$	$\left(\frac{r}{a}\right)_B$	$\left(\frac{r}{b}\right)_B$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{r}{R}\right)_B$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_B$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_B$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_B$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_B$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_B$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_B$	$\left(\frac{R}{a}\right)_B$	$\left(\frac{R}{b}\right)_B$	$\left(\frac{R}{r}\right)_B$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_B$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_B$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_B$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_B$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_B$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_B$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_B$	1

Таблица 31

Содержимое матрицы "E"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el_1^1)_B$	$(el_1^2)_B$	$(el_1^3)_B$	$(el_1^4)_B$	$\frac{(el_1^1)_B / (el_1^2)_B}{(el_1^3)_B / (el_1^4)_B}$
2	$(el_2^1)_B$	$(el_2^2)_B$	$(el_2^3)_B$	$(el_2^4)_B$	$\frac{(el_2^1)_B / (el_2^2)_B}{(el_2^3)_B / (el_2^4)_B}$
...
N-1	$(el_{N-1}^1)_B$	$(el_{N-1}^2)_B$	$(el_{N-1}^3)_B$	$(el_{N-1}^4)_B$	$\frac{(el_{N-1}^1)_B / (el_{N-1}^2)_B}{(el_{N-1}^3)_B / (el_{N-1}^4)_B}$
N	$(el_N^1)_B$	$(el_N^2)_B$	$(el_N^3)_B$	$(el_N^4)_B$	$\frac{(el_N^1)_B / (el_N^2)_B}{(el_N^3)_B / (el_N^4)_B}$

Содержимое матрицы "F"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_C$	$\left(\frac{h}{b}\right)_C$	$\left(\frac{h}{r}\right)_C$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{h}{R}\right)_C$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_C$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_C$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_C$	$\left(\frac{a}{r}\right)_C$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{a}{R}\right)_C$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_C$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_C$	$\left(\frac{b}{a}\right)_C$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_C$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{b}{R}\right)_C$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_C$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_C$	$\left(\frac{r}{a}\right)_C$	$\left(\frac{r}{b}\right)_C$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{r}{R}\right)_C$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_C$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_C$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_C$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_C$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_C$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_C$	$\left(\frac{R}{a}\right)_C$	$\left(\frac{R}{b}\right)_C$	$\left(\frac{R}{r}\right)_C$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_C$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_C$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_C$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_C$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_C$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_C$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_C$	1

Таблица 33

Содержимое матрицы "G"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el^1)_C$	$(el^2)_C$	$(el^3)_C$	$(el^4)_C$	$\frac{(el^1)_C / (el^2)_C}{(el^3)_C / (el^4)_C}$
2	$(el^1)_C$	$(el^2)_C$	$(el^3)_C$	$(el^4)_C$	$\frac{(el^1)_C / (el^2)_C}{(el^3)_C / (el^4)_C}$
...
N-1	$(el^1_{N-1})_C$	$(el^2_{N-1})_C$	$(el^3_{N-1})_C$	$(el^4_{N-1})_C$	$\frac{(el^1_{N-1})_C / (el^2_{N-1})_C}{(el^3_{N-1})_C / (el^4_{N-1})_C}$
N	$(el^1_N)_C$	$(el^2_N)_C$	$(el^3_N)_C$	$(el^4_N)_C$	$\frac{(el^1_N)_C / (el^2_N)_C}{(el^3_N)_C / (el^4_N)_C}$

Таблица 34

Содержимое матрицы "H"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_A$	$(Y_A)_A$	$(X_C)_A$	$(Y_C)_A$
2	$(X_B)_A$	$(Y_B)_A$	$(X_D)_A$	$(Y_D)_A$
3	$(X_{O1})_A$	$(Y_{O1})_A$	$(X_{O2})_A$	$(Y_{O2})_A$
4	$(X_K)_A$	$(Y_K)_A$	$(X_L)_A$	$(Y_L)_A$
5	$(X_F)_A$	$(Y_F)_A$	$(X_E)_A$	$(Y_E)_A$

Таблица 35

Содержимое матрицы "I"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_B$	$(Y_A)_B$	$(X_C)_B$	$(Y_C)_B$
2	$(X_B)_B$	$(Y_B)_B$	$(X_D)_B$	$(Y_D)_B$
3	$(X_{O1})_B$	$(Y_{O1})_B$	$(X_{O2})_B$	$(Y_{O2})_B$
4	$(X_K)_B$	$(Y_K)_B$	$(X_L)_B$	$(Y_L)_B$
5	$(X_F)_B$	$(Y_F)_B$	$(X_E)_B$	$(Y_E)_B$

Таблица 36

Содержимое матрицы "J"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_C$	$(Y_A)_C$	$(X_C)_C$	$(Y_C)_C$
2	$(X_B)_C$	$(Y_B)_C$	$(X_D)_C$	$(Y_D)_C$
3	$(X_{O1})_C$	$(Y_{O1})_C$	$(X_{O2})_C$	$(Y_{O2})_C$
4	$(X_K)_C$	$(Y_K)_C$	$(X_L)_C$	$(Y_L)_C$
5	$(X_F)_C$	$(Y_F)_C$	$(X_E)_C$	$(Y_E)_C$

Таблица 37

Содержимое матрицы "К"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_{A1})_{AB}^A$	$(Y_{A1})_{AB}^A$	$(X_{C1})_{AB}^A$	$(Y_{C1})_{AB}^A$
2	$(X_B)_{AB}$	$(Y_B)_{AB}$	$(X_D)_{AB}$	$(Y_D)_{AB}$
3	$(X_{A2})_{AB}^B$	$(Y_{A2})_{AB}^B$	$(X_{C2})_{AB}^B$	$(Y_{C2})_{AB}^B$
4	$(X_{O1})_{AB}^A$	$(Y_{O1})_{AB}^A$	$(X_{O2})_{AB}^B$	$(Y_{O2})_{AB}^B$
5	$(X_K)_{AB}^A$	$(Y_K)_{AB}^A$	$(X_L)_{AB}^A$	$(Y_L)_{AB}^A$
6	$(X_F)_{AB}^A$	$(Y_F)_{AB}^A$	$(X_E)_{AB}^B$	$(Y_E)_{AB}^B$

Таблица 38

Содержимое матрицы "L"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_{A1})_{CA}^C$	$(Y_{A1})_{CA}^C$	$(X_{C1})_{CA}^C$	$(Y_{C1})_{CA}^C$
2	$(X_B)_{CA}$	$(Y_B)_{CA}$	$(X_D)_{CA}$	$(Y_D)_{CA}$
3	$(X_{A2})_{CA}^A$	$(Y_{A2})_{CA}^A$	$(X_{C2})_{CA}^A$	$(Y_{C2})_{CA}^A$
4	$(X_{O1})_{CA}^C$	$(Y_{O1})_{CA}^C$	$(X_{O2})_{CA}^A$	$(Y_{O2})_{CA}^A$
5	$(X_K)_{CA}^C$	$(Y_K)_{CA}^C$	$(X_L)_{CA}^C$	$(Y_L)_{CA}^C$
6	$(X_F)_{CA}^C$	$(Y_F)_{CA}^C$	$(X_E)_{CA}^A$	$(Y_E)_{CA}^A$

Содержимое матрицы "M"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_{B1})_{AB}^A$	$(Y_{B1})_{AB}^A$	$(X_{B2})_{AB}^B$	$(Y_{B2})_{AB}^B$
2	$(X_C)_{AB}$	$(Y_C)_{AB}$	$(X_A)_{AB}$	$(Y_A)_{AB}$
3	$(X_{O2})_{AB}^A$	$(Y_{O2})_{AB}^A$	$(X_D)_{AB}$	$(Y_D)_{AB}$
4	$(X_{O1})_{AB}^A$	$(X_{O1})_{AB}^A$	$(X_{O1})_{AB}^B$	$(X_{O1})_{AB}^B$
5	$(X_{O3})_{AB}^A$	$(X_{O3})_{AB}^A$	$(X_{O3})_{AB}^B$	$(X_{O3})_{AB}^B$
6	$(X_K)_{AB}^A$	$(Y_K)_{AB}^A$	$(X_L)_{AB}^A$	$(Y_L)_{AB}^A$
7	$(X_F)_{AB}^A$	$(Y_F)_{AB}^A$	$(X_E)_{AB}^B$	$(Y_E)_{AB}^B$

Таблица 40

Содержимое матрицы "N"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_{B1})_{CA}^C$	$(Y_{B1})_{CA}^C$	$(X_{B2})_{CA}^A$	$(Y_{B2})_{CA}^A$
2	$(X_C)_{CA}$	$(Y_C)_{CA}$	$(X_A)_{CA}$	$(Y_A)_{CA}$
3	$(X_{O2})_{CA}^C$	$(Y_{O2})_{CA}^C$	$(X_D)_{CA}$	$(Y_D)_{CA}$
4	$(X_{O1})_{CA}^C$	$(X_{O1})_{CA}^C$	$(X_{O1})_{CA}^A$	$(X_{O1})_{CA}^A$
5	$(X_{O3})_{CA}^C$	$(X_{O3})_{CA}^C$	$(X_{O3})_{CA}^A$	$(X_{O3})_{CA}^A$
6	$(X_K)_{CA}^C$	$(Y_K)_{CA}^C$	$(X_L)_{CA}^C$	$(Y_L)_{CA}^C$
7	$(X_F)_{CA}^C$	$(Y_F)_{CA}^C$	$(X_E)_{CA}^A$	$(Y_E)_{CA}^A$

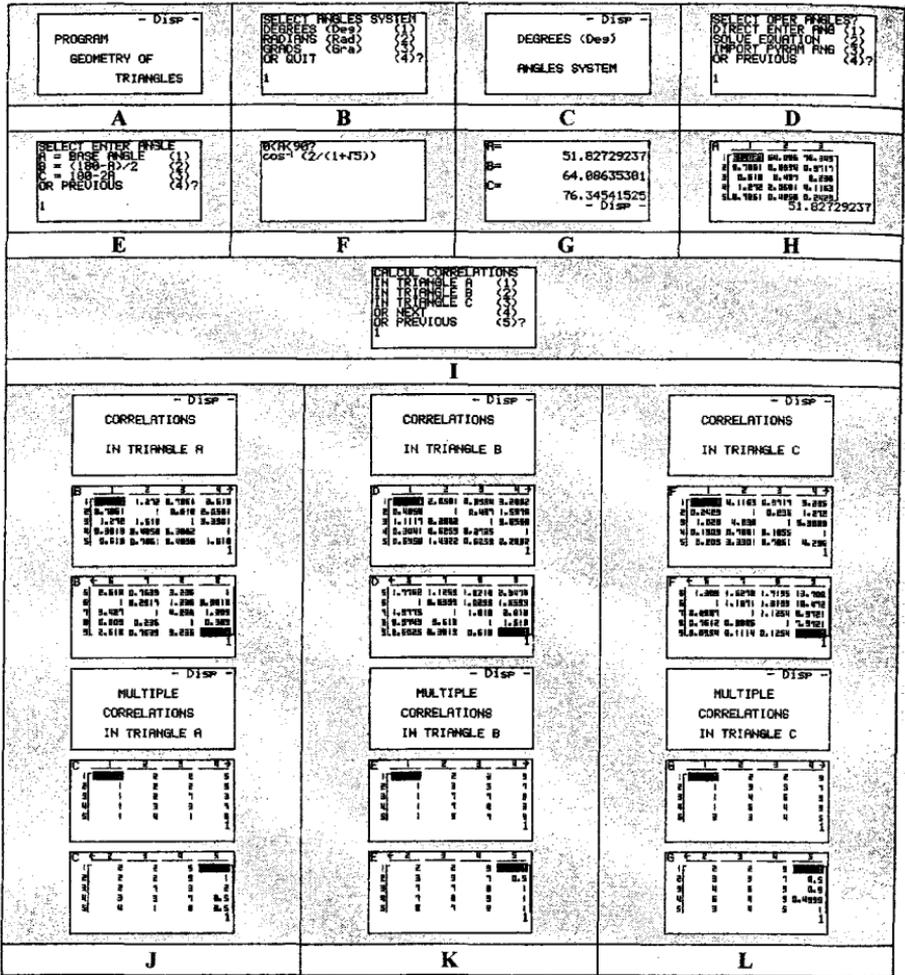


Рис. 22. Скриншоты из программы "GEOTRIAN" (начало)

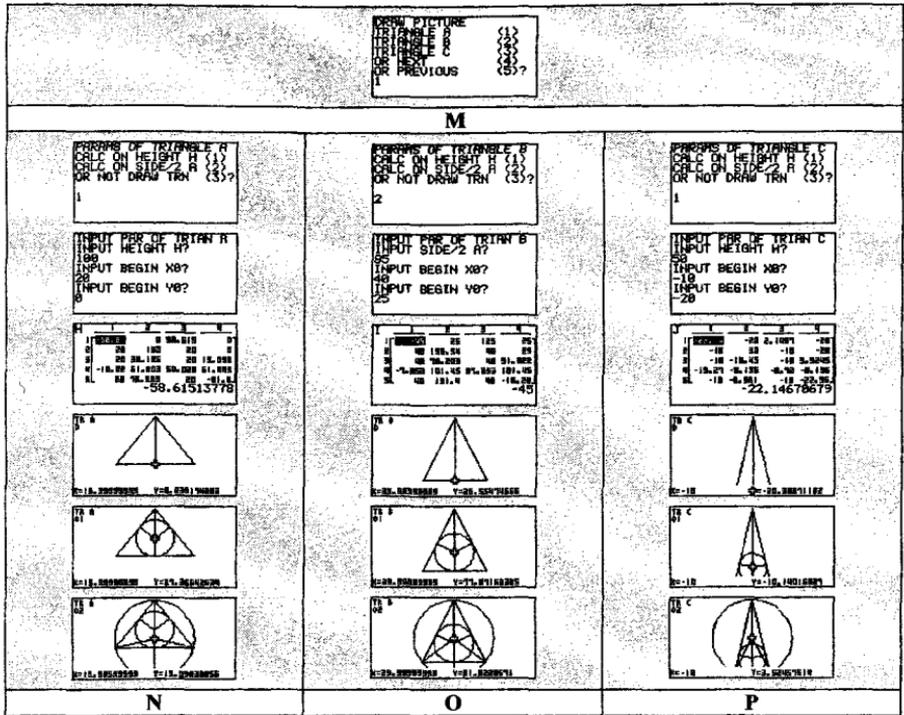


Рис. 22. Скриншоты из программы "GEOTRIAN" (продолжение)

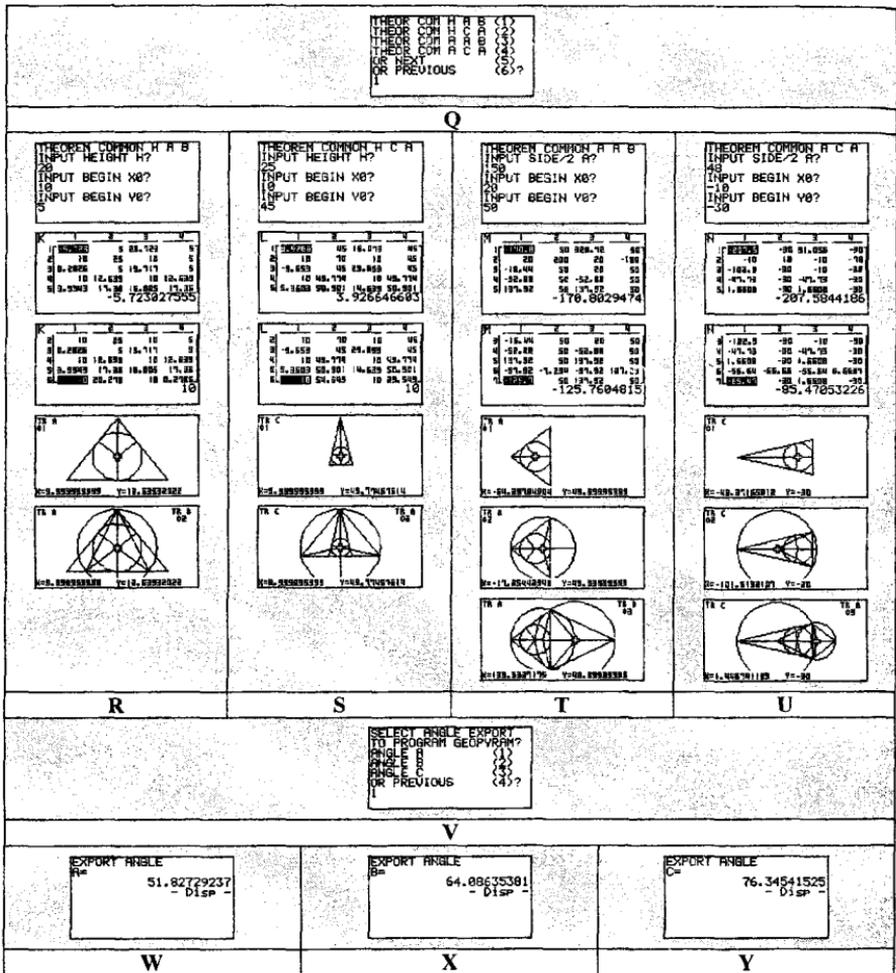


Рис. 22. Скриншоты из программы "GEOTRIAN" (окончание)

3.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРАВИЛЬНЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНЫХ ПИРАМИД В ПРОСТРАНСТВЕ

3.2.1. Теоретический аспект

Для полноценного описания геометрических свойств правильных четырехугольных пирамид в пространстве необходимо внести ряд основных определений:

- **Поперечный треугольник правильной четырехугольной пирамиды** – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и середины противоположных сторон основания.
- **Граневый треугольник правильной четырехугольной пирамиды** – равнобедренный треугольник, совпадающий с гранью правильной четырехугольной пирамиды.
- **Диагональный треугольник правильной четырехугольной пирамиды** – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и противоположные вершины сторон основания.

В рамках исследования соотношений между линейными и угловыми элементами равнобедренных треугольников, входящих в состав правильной четырехугольной пирамиды, рассмотрим соотношения между тригонометрическими функциями углов при основаниях указанных треугольников.

Теорема 6: "Теорема синусов для правильных четырехугольных пирамид"

В правильной четырехугольной пирамиде произведение синусов углов при основаниях поперечного и граневого треугольников равно синусу угла при основании диагонального треугольника.

Исходные данные:

Правильная четырехугольная пирамида $BKLMN$, равнобедренные треугольники которой являются: $\triangle ABC = \triangle BRS$ – поперечными треугольниками ($\angle BAC = \angle BCA = \angle BRS = \angle BSR = \alpha$), $\triangle BKL = \triangle BLM$ – граневыми треугольниками ($\angle BKL = \angle BLK = \angle BLM = \angle BML = \beta$), а $\triangle BKM = \triangle BLN$ – диагональными треугольниками ($\angle BKM = \angle BMK = \angle BLN = \angle BNL = \gamma$) (рис. 23).

Доказать:

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \sin \gamma .$$

Получим, что $\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta = \sin^2 \gamma$.

Так как, согласно теореме 2, в любом равнобедренном треугольнике отношение основной высоты к диаметру описанной вокруг него окружности равно квадрату синуса угла при основании, имеем:

$$\left(\frac{h}{D}\right)_\alpha \cdot \left(\frac{h}{D}\right)_\beta = \left(\frac{h}{D}\right)_\gamma, \text{ или } \frac{h_\alpha}{D_\alpha} \cdot \frac{h_\beta}{D_\beta} = \frac{h_\gamma}{D_\gamma},$$

где индексы α, β, γ означают принадлежность геометрических элементов определенным треугольникам в пирамиде (α – поперечному, β – граневому и γ – диагональному треугольникам соответственно).

А поскольку из рис. 23 наглядно видно, что основные высоты поперечного и диагонального треугольников совпадают ($h_\alpha = h_\gamma$), то основная высота граневого треугольника пирамиды, то есть апофема пирамиды, равна отношению произведения диаметров описанных вокруг поперечного и граневого треугольников окружностей к диаметру описанной вокруг диагонального треугольника окружности, то есть к диаметру описанной вокруг пирамиды сферы:

$$h_\beta = \frac{D_\alpha \cdot D_\beta}{D_\gamma}.$$

Также между тригонометрическими функциями вышеупомянутых углов присутствуют следующие взаимосвязи:

- Котангенс угла при основании граневого треугольника равен косинусу угла при основании поперечного треугольника:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \beta &= \operatorname{ctg} \angle BKL = \operatorname{ctg} \angle BLK = \frac{KS}{BS} = \frac{AD}{AB} = \cos \angle BAC = \\ &= \cos \angle BCA = \cos \alpha. \end{aligned}$$

- Тангенс угла при основании поперечного треугольника равен произведению тангенса угла при основании диагонального треугольника и квадратного корня из двух:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg} \angle BAC = \operatorname{tg} \angle BCA = \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{\left(\frac{DK}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{BD}{DK} \cdot \sqrt{2} = \\ &= \sqrt{2} \operatorname{tg} \angle BKM = \sqrt{2} \operatorname{tg} \angle BMK = \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma. \end{aligned}$$

- Разность квадратов тангенсов углов при основаниях граневого и поперечного треугольников равна единице:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}, \quad \text{поэтому получим, что}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \beta, \quad \text{или } \operatorname{tg}^2 \beta - \operatorname{tg}^2 \alpha = 1.$$

- Квадрат тангенса угла при основании граневого треугольника равен сумме удвоенного квадрата тангенса угла при основании диагонального треугольника и единицы:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \beta &= \operatorname{tg}^2 \angle BKL = \operatorname{tg}^2 \angle BLK = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + (\sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma)^2 = \\ &= 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \angle BKM = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \angle BMK = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \gamma. \end{aligned}$$

- Величина, обратная квадрату синуса угла при основании граневого треугольника, равна сумме квадрата косинуса угла при основании поперечного треугольника и единицы:

$$\frac{1}{\sin^2 \beta} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \beta, \quad \cos \alpha = \operatorname{ctg} \beta, \quad \text{поэтому имеем соотношение:}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \beta} &= \frac{1}{\sin^2 \angle BKL} = \frac{1}{\sin^2 \angle BLK} = 1 + \cos^2 \angle BAC = \\ &= 1 + \cos^2 \angle BCA = 1 + \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

- Величина, обратная квадрату синуса угла при основании диагонального треугольника, равна разности удвоенной величины, обратной квадрату синуса угла при основании поперечного треугольника, и единицы:

$$\frac{1}{\sin^2 \gamma} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma, \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} \operatorname{tg} \gamma, \quad (\operatorname{ctg}^2 \gamma = 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha), \quad \text{тогда}$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha, \quad \text{то } \frac{1}{\sin^2 \gamma} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma = 1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha =$$

$$= 2(\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) - 1 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} - 1, \quad \text{или } \frac{1}{\sin^2 \gamma} = \frac{1}{\sin^2 \angle BKM} =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \angle BMK} = \frac{2}{\sin^2 \angle BAC} - 1 = \frac{2}{\sin^2 \angle BCA} - 1 =$$

$$= \frac{2}{\sin^2 \alpha} - 1.$$

Представим соотношения между углами при основаниях поперечного, граневого и диагонального треугольников через квадраты значений синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов данных углов. Однако наиболее важной является третья по счету таблица, поскольку при доказательствах и расчетах, связанных с исследованиями геометрических свойств правильных четырехугольных пирамид, целесообразно использовать формулы взаимосвязи между тангенсами углов при основаниях входящих в правильную четырехугольную пирамиду равнобедренных треугольников в силу относительной простоты формул тангенсов двойного и половинного углов.

Таблица 41

Соотношения между квадратами синусов углов при основаниях основной тройки треугольников (поперечного, граневого и диагонального)

Соотношения	α	β	γ
α	1	$\sin^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sin^2 \beta}$	$\sin^2 \alpha = \frac{2 \sin^2 \gamma}{1 + \sin^2 \gamma}$
β	$\sin^2 \beta = \frac{1}{2 - \sin^2 \alpha}$	1	$\sin^2 \beta = \frac{1 + \sin^2 \gamma}{2}$
γ	$\sin^2 \gamma = \frac{\sin^2 \alpha}{2 - \sin^2 \alpha}$	$\sin^2 \gamma = 2 \sin^2 \beta - 1$	1

Таблица 42

Соотношения между косинусами углов при основаниях основной тройки треугольников (поперечного, граневого и диагонального)

Соотношения	α	β	γ
α	1	$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta}$	$\cos^2 \alpha = \frac{\cos^2 \gamma}{2 - \cos^2 \gamma}$
β	$\cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$	1	$\cos^2 \beta = \frac{\cos^2 \gamma}{2}$
γ	$\cos^2 \gamma = \frac{2 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$	$\cos^2 \gamma = 2 \cos^2 \beta$	1

Соотношения между квадратами тангенсов углов при основаниях основной тройки треугольников (поперечного, граневого и диагонального)

Соотношения	α	β	γ
α	1	$tg^2 \alpha = tg^2 \beta - 1$	$tg^2 \alpha = 2tg^2 \gamma$
β	$tg^2 \beta = tg^2 \alpha + 1$	1	$tg^2 \beta = 2tg^2 \gamma + 1$
γ	$tg^2 \gamma = \frac{tg^2 \alpha}{2}$	$tg^2 \gamma = \frac{tg^2 \beta - 1}{2}$	1

Таблица 44

Соотношения между квадратами котангенсов углов при основаниях основной тройки треугольников (поперечного, граневого и диагонального)

Соотношения	α	β	γ
α	1	$ctg^2 \alpha = \frac{ctg^2 \beta}{1 - ctg^2 \beta}$	$ctg^2 \alpha = \frac{ctg^2 \gamma}{2}$
β	$ctg^2 \beta = \frac{ctg^2 \alpha}{1 + ctg^2 \alpha}$	1	$ctg^2 \beta = \frac{ctg^2 \gamma}{2 + ctg^2 \gamma}$
γ	$ctg^2 \gamma = 2ctg^2 \alpha$	$ctg^2 \gamma = \frac{2ctg^2 \beta}{1 - ctg^2 \beta}$	1

Проведем исследование взаимосвязи между вписанной в правильную четырехугольную пирамиду и описанной вокруг нее сферами.

Для любой правильной четырехугольной пирамиды следует отметить, что вписанная в пирамиду сфера проецируется на плоскость поперечного треугольника во вписанную в него окружность, а

описанная вокруг пирамиды сфера проецируется на плоскость диагонального треугольника в описанную вокруг него окружность, то есть имеем равенство радиусов (диаметров) соответствующих сфер и окружностей.

Представленная ниже теорема показывает математическую взаимосвязь между радиусом вписанной в правильную четырехугольную пирамиду сферы и диаметром описанной вокруг пирамиды сферы, причем данная теорема имеет силу для любой правильной четырехугольной пирамиды.

Теорема 7: “О взаимосвязи сфер в правильной четырехугольной пирамиде”

Отношение суммы диаметра описанной вокруг правильной четырехугольной пирамиды сферы и высоты пирамиды к разности значений данных параметров равно квадрату отношения разности высоты пирамиды и радиуса вписанной в пирамиду сферы к величине указанного радиуса и равно квадрату тангенса угла при основании граневого треугольника пирамиды, или величине, обратной квадрату косинуса угла при основании поперечного треугольника пирамиды.

Исходные данные:

Правильная четырехугольная пирамида $BKLMN$, равнобедренные треугольники которой являются: $\triangle ABC = \triangle BRS$ – поперечными треугольниками ($\angle BAC = \angle BCA = \angle BRS = \angle BSR = \alpha$), $\triangle BKL = \triangle BLM$ – граневыми треугольниками ($\angle BKL = \angle BLK = \angle BLM = \angle BML = \beta$), а $\triangle BKM = \triangle BLN$ – диагональными треугольниками ($\angle BKM = \angle BMK = \angle BLN = \angle BNL = \gamma$); $BD = h$ – высота пирамиды; $DO_1 = TO_1 = UO_1 = VO_1 = WO_1 = FO_1 = r = r_\alpha$ ($DF = d = d_\alpha$) – радиусы (диаметр) вписанной в пирамиду сферы; $BO_2 = KO_2 = MO_2 = EO_2 = R = R_\gamma$ ($BE = D = D_\gamma$) – радиусы (диаметр) описанной вокруг пирамиды сферы (рис. 24).

Доказать:

$$\frac{D+h}{D-h} = \left(\frac{h-r}{r} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

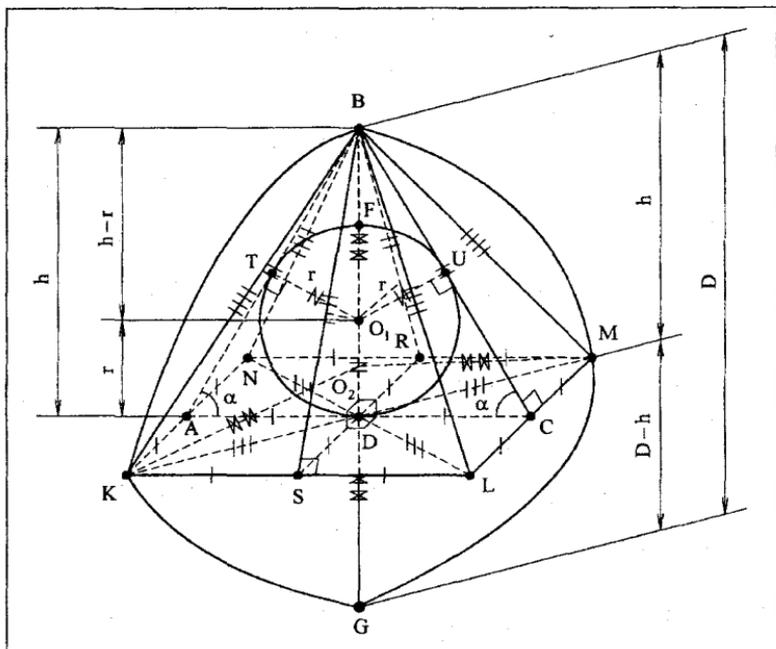


Рис. 24. К теореме “О взаимосвязи сфер в правильной четырехугольной пирамиде”

Доказательство:

Отношение разности между высотой пирамиды и радиусом вписанной в нее сферы к величине последнего равно отношению апофемы к половине стороны основания пирамиды или тангенсу угла при основании граневого треугольника пирамиды:

$$\frac{h-r}{r} = \left(\frac{h-r}{r} \right)_{\alpha} = \left(1 + \frac{l}{\cos \alpha} \right) - 1 = \frac{l}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta.$$

Согласно правилу суммирования дробей, имеем:

$$\frac{D+h}{D-h} = \frac{D}{D-h} + \frac{h}{D-h}.$$

Разложив данное выражение на отдельные дроби, получим:

$$\frac{D-h}{D} = 1 - \frac{h}{D} = 1 - \sin^2 \gamma = \cos^2 \gamma.$$

$$\frac{D}{D-h} = \frac{1}{\cos^2 \gamma} = 1 + \operatorname{tg}^2 \gamma, \quad \frac{D-h}{h} = \frac{D}{h} - 1 = \frac{1}{\sin^2 \gamma} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

$$\frac{h}{D-h} = \frac{l}{ctg^2 \gamma} = tg^2 \gamma.$$

$\frac{D+h}{D-h} = \frac{D}{D-h} + \frac{h}{D-h} = 1 + 2tg^2 \gamma = 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} = tg^2 \beta$, что и требовалось доказать.

3.2.2. Описание этапов проведения факультативных занятий

Факультативные занятия по реализации вычислений и визуализации различных параметров правильных четырехугольных пирамид в пространстве с последующим проведением необходимых сравнительных анализов вычислительных процедур с применением представленной в графическом калькуляторе программы "GEOPYRAM" могут быть разделены на два этапа.

1 этап – "Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров правильных четырехугольных пирамид в пространстве аналитическим методом"

На данном этапе преподаватель разделяет исходную группу студентов на определенное количество малых групп по 3-4 студента с целью организации коллективной деятельности с учетом различных личностных психологических особенностей студентов. Каждой из групп предлагаются различные численные значения угла при основании для одного из входящих в состав правильной четырехугольной пирамиды равнобедренного треугольника и координат середины основания пирамиды с целью нахождения численных значений необходимых угловых и линейных параметров остальных двух треугольников, при этом студентами в рамках малой группы осуществляется совместное нахождение значений собственно величин и геометрических функций углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального треугольников с вычислением линейных размеров пирамиды в целом (высоты, стороны основания, апофемы и боковых ребер), а затем предполагается проведение каждым из студентов в рамках малой группы комплексного анализа взаимосвязанных параметров для одного из указанных треугольников (например, соотношений между необходимыми линейными элементами полученных треугольников с использованием значений тригонометрических функций углов при основании, расчет размеров линейных элементов треугольников и т.д.) с последующей визуализацией полученных результатов.

Следует отметить, что необходимые расчеты обязательно отражаются на листе бумаге с отображением подробных промежуточных и итоговых расчетов, а также с визуализацией исследуемой совокупности объектов.

II этап – “Реализация расчетов и визуализация необходимых параметров равнобедренных треугольников на плоскости с использованием представленной в графическом калькуляторе программы “GEOTRIAN””

На данном этапе преподаватель для каждой из малых групп студентов, сформированных на первом этапе, предлагает различные варианты численных значений определенных углов для поперечных, граневых и диагональных треугольников и координат середины оснований для определенного количества правильных четырехугольных пирамид в рамках одной малой группы.

Студенты, прежде всего, проверяют правильность выполнения расчетов, реализованных на первом этапе, с проведением сравнительного визуального анализа полученных результатов на основе представленной в графическом калькуляторе программы “GEOPYRAM”, после чего осуществляют различные автоматические расчеты (указанные при описании первого этапа расчеты плюс поиск кратных соотношений между парами линейных элементов равнобедренных треугольников с адекватным выводом полученных результатов, реализация теорем взаимосвязи между равнобедренными треугольниками, входящими в состав правильной четырехугольной пирамиды, расчет линейных размеров пирамид в целом и т.д.) с последующей визуализацией, на основе которых формулируют необходимые выводы.

3.2.3. Описание программы с примером

Рассмотрим схему работы программы “GEOPYRAM”, предназначенной для проведения математического анализа правильных четырехугольных пирамид в рамках раздела “Элементарная геометрия в пространстве” курса элементарной геометрии.

Описание программы “GEOPYRAM” приведем на примере математического анализа правильной четырехугольной пирамиды, которую автор назвал “золотой пирамидой”.

При изучении данного вопроса также можно обратиться к изложенной ранее информации о золотой пропорции, которая имеет непосредственное отношение к процессу решения задачи.

$tg\beta = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\varphi}$, то есть граневые треугольники данной пирамиды являются золотыми треугольниками 1-го рода.

Таким образом, правильную четырехугольную пирамиду, удовлетворяющую условию $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, вполне можно считать золотой пирамидой.

В таблице 45 представлены значения тригонометрических функций углов при основаниях основной тройки равнобедренных треугольников, входящих в состав золотой пирамиды.

Таблица 45

Значения тригонометрических функций углов пирамиды для случая

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

x	α	β	γ
Значение угла в град. (рад)	$\approx 38^\circ 10'$ ($\approx 0,6662$)	$\approx 51^\circ 49'$ ($\approx 0,9046$)	$\approx 29^\circ 04'$ ($\approx 0,5073$)
$\sin x$	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{1}{\varphi\sqrt{\varphi}}$
$\cos x$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\frac{1}{\varphi}$	$\frac{\sqrt{2}}{\varphi}$
tgx	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\sqrt{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{2\varphi}}$
$ctgx$	$\sqrt{\varphi}$	$\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$	$\sqrt{2\varphi}$

Перейдем непосредственно к описанию программы "GEOPYRAM" на примере проведения математического анализа золотой пирамиды в сопровождении логически расположенных на рис. 26 копий с экрана графического калькулятора.

Для начала работы необходимо из окна главного меню войти в режим программирования "ProGram" при помощи активации

соответствующей пиктограммы нажатием клавиши "EXE". Затем из представленного списка выбрать программу с наименованием "GEOPYRAM" и активизировать ее аналогичным способом. Началом работы программы является окно приветствия (рис. 26А).

При работе с рассматриваемыми меню программы активация определенного пункта осуществляется с помощью последовательного ввода необходимого числа и нажатия клавиши "EXE", при этом в случае ввода ошибочного числа, символа или сочетания чисел и символов с последующей активацией выводится сообщение об ошибке ввода с предложением возврата в данное меню после нажатия клавиши "EXE" для корректного ввода и активации необходимой позиции.

После вывода указанного информационного окна последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню установки угловой системы мер со следующими позициями (рис. 26В):

- **SELECT ANGLES SYSTEM** – выбор устанавливаемой угловой системы мер:
 - **DEGREES (Deg) (1)** – выбор градусной угловой системы мер.
 - **RADIANS (Rad) (2)** – выбор радианной угловой системы мер.
 - **GRADS (Gra) (3)** – выбор градусной угловой системы мер.
 - **OR QUIT (4)** – выход из программы с предварительно отображающимся прощальным информационным окном.

После выбора определенной угловой системы мер в результате последовательного ввода необходимой цифры и нажатия клавиши "EXE" осуществляется вывод соответствующего информационного окна о выбранной системе угловой меры (рис. 26С).

После вывода указанного информационного окна последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню выбора способа загрузки значения угла со следующими позициями (рис. 26D):

- **SELECT OPER ANGLES** – выбор алгоритма получения значения необходимого угла:
 - **DIRECT ENTER ANG (1)** – непосредственный ввод значения угла с последующим отображением следующих окон:
 - ✓ Окна меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 26H).
 - ✓ Окна ввода значения выбранного угла в указанной ранее угловой системе мер.
 - **SOLVE EQUATION (2)** – получение значения угла в ходе решения вводимого уравнения с последовательным отображением следующих окон:
 - ✓ Окна последовательного ввода левой и правой частей уравнения, при этом в качестве неизвестной принимается значение угла (рис. 26E).
 - ✓ Окна последовательного ввода нижней и верхней границ значений угла (рис. 26F).

- ✓ Окна вывода значения угла, рассчитанного в ходе решения искомого уравнения в указанной ранее угловой системе мер (рис. 26G).
- ✓ Окно меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 26H).
- **IMPORT TRIAN ANG (3)** – импорт значения угла из программы “*GEOTRIAN*” при непосредственном переходе из указанной программы вследствие предварительного экспорта значения соответствующего угла с отображением окна меню выбора вида угла, описанного ниже (рис. 26H).
- **OR PREVIOUS (4)** – возврат в предыдущее меню.

Указанное выше меню выбора вида угла представлено следующими позициями (рис. 26H):

- **SELECT ENTER ANGLE** – выбор вида угла, для которого рассчитывается значение в указанной ранее угловой системе мер:
- **D = TRANSVERSE (1)** – угол при основании поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды.
- **E = VERGE (2)** – угол при основании граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды.
- **F = DIAGONAL (3)** – угол при основании диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды.

Активировав в данном случае позицию для нахождения значения угла через решение вводимого тригонометрического уравнения, необходимо осуществить последовательный ввод левой и правой частей тригонометрического уравнения.

В нашем случае необходимо отразить равенство углов $\alpha = 90 - \beta$, или $\beta = 90 - \alpha$. Учитывая равенство $\tan^2 \beta = \tan^2 \alpha + 1$, вводим левую $(\tan^2(90 - X))$, то есть $[(\tan(90 - X))^2]$, и правую $(\tan^2 X + 1)$, то есть $[(\tan X)^2 + 1]$, части уравнения (рис. 26E), при этом необходимо учитывать, что в качестве решения уравнения выступает значение угла при основании поперечного треугольника в установленной ранее угловой системе мер, то есть $X = \alpha$, что и указывается в меню выбора вида угла (рис. 26H).

После реализации описанных выше пунктов в результате очередного нажатия клавиши “*EXE*” осуществляется математическая обработка полученного значения угла в соответствии с указанным его видом с поочередным отображением следующих окон:

- Окна последовательного вывода значений углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального равнобедренных треугольников (D , E и F соответственно) правильной четырехугольной пирамиды с указанием наименования угла и его значения в заявленной ранее угловой системе мер (рис. 26I).
- Окна вывода в виде матрицы "A" значений углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального равнобедренных треугольников (D , E и F соответственно) правильной четырехугольной пирамиды в градусах и радианах, а также основных тригонометрических функций для данных углов в соответствии с таблицей 46 (рис. 26J).

После вывода указанных информационных окон последующее нажатие клавиши "EXE" приводит к появлению меню выбора расчета соотношений между основными линейными элементами поперечного, граневого и диагонального равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основаниях D , E и F соответственно, поиска и вывода найденных кратных из полученных соотношений со следующими позициями (рис. 26K):

- **CALCUL CORRELATIONS** – расчет соотношений:
- **IN TRIANGLE D (1)** – в поперечном равнобедренном треугольнике правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D с последовательным отображением следующих окон (рис. 26L):
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "B" значений соотношений между основными линейными элементами поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D на основе тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 47.
 - ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D .
 - ✓ Окна вывода в виде матрицы "C" значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при

основании D на основе обработки представленных в матрице “ B ” значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 48.

➤ **IN TRIANGLE E (2)** – в граневом равнобедренном треугольнике правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E с последовательным отображением следующих окон (рис. 26M):

- ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ D ” значений соотношений между основными линейными элементами граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E на основе тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 49.
- ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ E ” значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E на основе обработки представленных в матрице “ D ” значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 50.

➤ **IN TRIANGLE F (1)** – в диагональном равнобедренном треугольнике правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F с последовательным отображением следующих окон (рис. 26N):

- ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе значений расчетных соотношений между основными линейными элементами диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ F ” значений соотношений между основными линейными элементами диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F на основе

тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 51.

- ✓ Информационного окна сообщения о последующем выводе кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы " G " значений кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F на основе обработки представленных в матрице " F " значений тригонометрических соотношений в соответствии с таблицей 52.

➤ **OR NEXT (4)** – переход в последующее меню.

➤ **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора позиции перехода в последующее меню с помощью последовательного нажатия клавиш " 4 " и " EXE " отображается меню выбора возможностей построения поперечного, граневого и диагонального равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основаниях D , E и F соответственно со следующими позициями (рис. 260):

▪ **DRAW PICTURE** – сформировать изображение:

➤ **TRIANGLE D (1)** – поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D с последовательным отображением следующих окон (рис. 26P):

- ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D со следующими позициями:

▪ **PARAMS OF TRIANGLE D** – выбор исходного расчетного линейного элемента поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D :

❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D по вводимому значению основной высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты " H ", абсциссы " X_0 " и ординаты " Y_0 " середины основания.

- ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания “ A ”, абсциссы “ $X0$ ” и ординаты “ $Y0$ ” середины основания.
- ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ H ” значений координат основных точек поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D в соответствии с таблицей 53.
- ✓ Окна параллельной визуализации сторон и основной высоты поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D с указанием середины основания (точки D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).
- **TRIANGLE E (2)** – граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E с последовательным отображением следующих окон (рис. 26Q):
 - ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E со следующими позициями:
 - **PARAMS OF TRIANGLE E** – выбор исходного расчетного линейного элемента граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E ;
 - ❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E по вводимому значению основной

высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты " H ", абсциссы " XO " и ординаты " YO " середины основания.

- ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания " A ", абсциссы " XO " и ординаты " YO " середины основания.
- ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы " I " значений координат основных точек граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E в соответствии с таблицей 54.
- ✓ Окна параллельной визуализации сторон и основной высоты граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E с указанием середины основания (точки D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).
- **TRIANGLE F (1)** – диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F с последовательным отображением следующих окон (рис. 26R):
 - ✓ Окна меню выбора способа расчета значений линейных элементов диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F со следующими позициями:
 - **PARAMS OF TRIANGLE F** – выбор исходного расчетного линейного элемента диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F :

- ❖ **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F по вводимому значению основной высоты с отображением окна последовательного ввода значений основной высоты “ H ”, абсциссы “ XO ” и ординаты “ YO ” середины основания.
- ❖ **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F по вводимому значению половины основания с отображением окна последовательного ввода значений половины основания “ A ”, абсциссы “ XO ” и ординаты “ YO ” середины основания.
- ❖ **OR NOT DRAW TRN (3)** – отказ от выполнения расчетов линейных размеров и построения диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F .
- ✓ Окна вывода в виде матрицы “ J ” значений координат основных точек диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F в соответствии с таблицей 55.
- ✓ Окна параллельной визуализации сторон и основной высоты диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F с указанием середины основания (точки D), последующей параллельной визуализацией вписанной в треугольник окружности и радиусов вписанной окружности с указанием центра вписанной окружности (точки O_1), последующей параллельной визуализацией описанной вокруг треугольника окружности и радиусов описанной окружности с указанием центра описанной окружности (точки O_2).
- **OR NEXT (4)** – переход в последующее меню.
- **OR PREVIOUS (5)** – возврат в предыдущее меню.

После выбора позиции перехода в последующее меню с помощью последовательного нажатия клавиш “4” и “EXE” отображается меню выбора возможности геометрической интерпретации правильной четырехугольной пирамиды со следующими позициями (рис. 26S, 26T):

- **PARAMS OF PYRAMID** – выбор исходного расчетного линейного элемента правильной четырехугольной пирамиды:
- **CALCUL ON HEIGHT H (1)** – выполнение расчетов координат основных точек правильной четырехугольной пирамиды по вводимому значению высоты пирамиды с последовательным отображением следующих окон (рис. 26U):
 - ✓ Окна последовательного ввода значений высоты пирамиды “ H ” и абсциссы “ X_0 ” середины основания правильной четырехугольной пирамиды.
 - ✓ Окна последовательного ввода значений ординаты “ Y_0 ” и аппликаты “ Z_0 ” середины основания пирамиды.
 - ✓ Описанных ниже окон отображения результатов расчетов координат основных точек правильной четырехугольной пирамиды и формирования изображений основных составляющих правильной четырехугольной пирамиды.
- **CALCUL ON ENTER SIDE/2 A (2)** – выполнение расчетов координат основных точек правильной четырехугольной пирамиды по вводимому значению половины стороны основания пирамиды с последовательным отображением следующих окон (рис. 26V):
 - ✓ Окна последовательного ввода значений половины стороны основания пирамиды “ A ” и абсциссы “ X_0 ” середины основания правильной четырехугольной пирамиды.
 - ✓ Окна последовательного ввода значений ординаты “ Y_0 ” и аппликаты “ Z_0 ” середины основания пирамиды.
 - ✓ Описанных ниже окон отображения результатов расчетов координат основных точек правильной четырехугольной пирамиды и формирования изображений основных составляющих правильной четырехугольной пирамиды.
- **OR NEXT (3)** – переход в последующее меню.
- **OR PREVIOUS (4)** – возврат в предыдущее меню.

Указанные выше окна отображения результатов расчетов координат основных точек правильной четырехугольной пирамиды и формирования изображений основных составляющих правильной четырехугольной пирамиды отображаются в следующей последовательности:

- Окно вывода в виде матрицы “ K ” значений координат в пространстве основных точек правильной четырехугольной пирамиды в соответствии с таблицей 56.
- Окно вывода в виде матрицы “ L ” значений координат на плоскости основных точек правильной четырехугольной пирамиды в соответствии с таблицей 57.

- Окно параллельной визуализации для двух поперечных равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основании D сторон и общей основной высоты (высоты пирамиды) с указанием середины оснований треугольников (точки D), то есть середины основания пирамиды.
- Окно параллельной визуализации для двух граневых равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основании E сторон и общей основной высоты (высоты пирамиды) с указанием середины оснований треугольников (точки D), то есть середины основания пирамиды.
- Окно параллельной визуализации для двух диагональных равнобедренных треугольников правильной четырехугольной пирамиды с углами при основании F сторон и общей основной высоты (высоты пирамиды) с указанием середины оснований треугольников (точки D), то есть середины основания пирамиды.
- Окно параллельной визуализации для правильной четырехугольной пирамиды (для двух поперечных равнобедренных треугольников) радиусов вписанной сферы (радиусов вписанных окружностей) с указанием центра вписанной сферы (центра вписанных окружностей), то есть точки O_1 .
- Окно параллельной визуализации для правильной четырехугольной пирамиды (для двух диагональных равнобедренных треугольников) радиусов описанной сферы (радиусов описанных окружностей) с указанием центра описанной сферы (центра описанных окружностей), то есть точки O_2 .

После выбора позиции перехода в последующее меню с помощью последовательного нажатия клавиш "3" и "EXE" отображается меню выбора значения угла, предназначенного для экспорта в программу "GEOTRIAN", со следующими позициями (рис. 26W):

- **SELECT ANGLE EXPORT TO PROGRAM GEOTRIAN** – выбор наименования угла для экспорта значения в программу "GEOTRIAN":
- **ANGLE D (1)** – экспорт значения угла D с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 26X).

- **ANGLE E (2)** – экспорт значения угла E с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 26Y).
- **ANGLE F (3)** – экспорт значения угла F с последующим выводом окна с указанием обозначения угла и его численного значения в установленной ранее угловой системе мер (рис. 26Z).
- **OR PREVIOUS (4)** – возврат в предыдущее меню.

В ходе выполнения программы итоговые результаты проецируются в указанные ниже соответствующие матрицы (доступ возможен только после окончательного выполнения программы и осуществляется через главное меню в режиме выполнения арифметических и матричных расчетов “*RUN.MATrix*”):

- ❖ Данные о значениях углов при основаниях поперечного, граневого и диагонального равнобедренных треугольников (D , E и F соответственно) правильной четырехугольной пирамиды в градусах и радианах, а также основных тригонометрических функций для данных углов проецируются в матрицу “ A ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D проецируются в матрицу “ B ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D проецируются в матрицу “ C ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E проецируются в матрицу “ D ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E проецируются в матрицу “ E ”.
- ❖ Данные о значениях соотношений между основными линейными элементами диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F проецируются в матрицу “ F ”.
- ❖ Данные о значениях кратных расчетных соотношений между парами основных линейных элементов диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F проецируются в матрицу “ F ”.

пирамиды с углом при основании F проецируются в матрицу " G ".

- ❖ Данные о значениях координат основных точек поперечного равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании D проецируются в матрицу " H ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек граневого равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании E проецируются в матрицу " I ".
- ❖ Данные о значениях координат основных точек диагонального равнобедренного треугольника правильной четырехугольной пирамиды с углом при основании F проецируются в матрицу " J ".
- ❖ Данные о значениях координат в пространстве основных точек правильной четырехугольной пирамиды проецируются в матрицу " K ".
- ❖ Данные о значениях координат на плоскости основных точек правильной четырехугольной пирамиды проецируются в матрицу " L ".

Таблица 46

Содержимое матрицы " A "

Значение	1	2	3
1	D	E	F
2	$\sin D$	$\cos E$	$\sin F$
3	$\cos D$	$\cos E$	$\cos F$
4	$\operatorname{tg} D$	$\operatorname{tg} E$	$\operatorname{tg} F$
5	$\operatorname{ctg} D$	$\operatorname{ctg} E$	$\operatorname{ctg} F$

Таблица 47

Содержимое матрицы "B"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_D$	$\left(\frac{h}{b}\right)_D$	$\left(\frac{h}{r}\right)_D$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{h}{R}\right)_D$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_D$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_D$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_D$	$\left(\frac{a}{r}\right)_D$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{a}{R}\right)_D$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_D$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_D$	$\left(\frac{b}{a}\right)_D$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_D$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{b}{R}\right)_D$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_D$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_D$	$\left(\frac{r}{a}\right)_D$	$\left(\frac{r}{b}\right)_D$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{r}{R}\right)_D$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_D$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_D$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_D$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_D$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_D$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_D$	$\left(\frac{R}{a}\right)_D$	$\left(\frac{R}{b}\right)_D$	$\left(\frac{R}{r}\right)_D$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_D$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_D$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_D$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_D$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_D$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_D$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_D$	1

Таблица 48

Содержимое матрицы "C"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el_1^1)_D$	$(el_1^2)_D$	$(el_1^3)_D$	$(el_1^4)_D$	$\frac{(el_1^1)_D / (el_1^2)_D}{(el_1^3)_D / (el_1^4)_D}$
2	$(el_2^1)_D$	$(el_2^2)_D$	$(el_2^3)_D$	$(el_2^4)_D$	$\frac{(el_2^1)_D / (el_2^2)_D}{(el_2^3)_D / (el_2^4)_D}$
...
N-1	$(el_{N-1}^1)_D$	$(el_{N-1}^2)_D$	$(el_{N-1}^3)_D$	$(el_{N-1}^4)_D$	$\frac{(el_{N-1}^1)_D / (el_{N-1}^2)_D}{(el_{N-1}^3)_D / (el_{N-1}^4)_D}$
N	$(el_N^1)_D$	$(el_N^2)_D$	$(el_N^3)_D$	$(el_N^4)_D$	$\frac{(el_N^1)_D / (el_N^2)_D}{(el_N^3)_D / (el_N^4)_D}$

Содержимое матрицы "D"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_E$	$\left(\frac{h}{b}\right)_E$	$\left(\frac{h}{r}\right)_E$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{h}{R}\right)_E$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_E$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_E$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_E$	$\left(\frac{a}{r}\right)_E$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{a}{R}\right)_E$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_E$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_E$	$\left(\frac{b}{a}\right)_E$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_E$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{b}{R}\right)_E$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_E$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_E$	$\left(\frac{r}{a}\right)_E$	$\left(\frac{r}{b}\right)_E$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{r}{R}\right)_E$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_E$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_E$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_E$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_E$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_E$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_E$	$\left(\frac{R}{a}\right)_E$	$\left(\frac{R}{b}\right)_E$	$\left(\frac{R}{r}\right)_E$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_E$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_E$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_E$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_E$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_E$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_E$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_E$	1

Таблица 50

Содержимое матрицы "E"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el_1^1)_E$	$(el_1^2)_E$	$(el_1^3)_E$	$(el_1^4)_E$	$\frac{(el_1^1)_E / (el_1^2)_E}{(el_1^3)_E / (el_1^4)_E}$
2	$(el_2^1)_E$	$(el_2^2)_E$	$(el_2^3)_E$	$(el_2^4)_E$	$\frac{(el_2^1)_E / (el_2^2)_E}{(el_2^3)_E / (el_2^4)_E}$
...
N-1	$(el_{N-1}^1)_E$	$(el_{N-1}^2)_E$	$(el_{N-1}^3)_E$	$(el_{N-1}^4)_E$	$\frac{(el_{N-1}^1)_E / (el_{N-1}^2)_E}{(el_{N-1}^3)_E / (el_{N-1}^4)_E}$
N	$(el_N^1)_E$	$(el_N^2)_E$	$(el_N^3)_E$	$(el_N^4)_E$	$\frac{(el_N^1)_E / (el_N^2)_E}{(el_N^3)_E / (el_N^4)_E}$

Содержимое матрицы "F"

%	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	$\left(\frac{h}{a}\right)_F$	$\left(\frac{h}{b}\right)_F$	$\left(\frac{h}{r}\right)_F$	$\left(\frac{h}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{h}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{h}{R}\right)_F$	$\left(\frac{h}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{h}{D-h}\right)_F$
2	$\left(\frac{a}{h}\right)_F$	1	$\left(\frac{a}{b}\right)_F$	$\left(\frac{a}{r}\right)_F$	$\left(\frac{a}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{a}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{a}{R}\right)_F$	$\left(\frac{a}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{a}{D-h}\right)_F$
3	$\left(\frac{b}{h}\right)_F$	$\left(\frac{b}{a}\right)_F$	1	$\left(\frac{b}{r}\right)_F$	$\left(\frac{b}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{b}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{b}{R}\right)_F$	$\left(\frac{b}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{b}{D-h}\right)_F$
4	$\left(\frac{r}{h}\right)_F$	$\left(\frac{r}{a}\right)_F$	$\left(\frac{r}{b}\right)_F$	1	$\left(\frac{r}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{r}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{r}{R}\right)_F$	$\left(\frac{r}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{r}{D-h}\right)_F$
5	$\left(\frac{h-r}{h}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{a}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{b}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{r}\right)_F$	1	$\left(\frac{h-r}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{R}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{h-r}{D-h}\right)_F$
6	$\left(\frac{h-d}{h}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{a}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{b}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{r}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{h-r}\right)_F$	1	$\left(\frac{h-d}{R}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{h-d}{D-h}\right)_F$
7	$\left(\frac{R}{h}\right)_F$	$\left(\frac{R}{a}\right)_F$	$\left(\frac{R}{b}\right)_F$	$\left(\frac{R}{r}\right)_F$	$\left(\frac{R}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{R}{h-d}\right)_F$	1	$\left(\frac{R}{h-R}\right)_F$	$\left(\frac{R}{D-h}\right)_F$
8	$\left(\frac{h-R}{h}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{a}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{b}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{r}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{h-R}{R}\right)_F$	1	$\left(\frac{h-R}{D-h}\right)_F$
9	$\left(\frac{D-h}{h}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{a}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{b}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{r}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{h-r}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{h-d}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{R}\right)_F$	$\left(\frac{D-h}{h-R}\right)_F$	1

Таблица 52

Содержимое матрицы "G"

Значение	1	2	3	4	5
1	$(el_1^1)_F$	$(el_1^2)_F$	$(el_1^3)_F$	$(el_1^4)_F$	$\frac{(el_1^1)_F / (el_1^2)_F}{(el_1^3)_F / (el_1^4)_F}$
2	$(el_2^1)_F$	$(el_2^2)_F$	$(el_2^3)_F$	$(el_2^4)_F$	$\frac{(el_2^1)_F / (el_2^2)_F}{(el_2^3)_F / (el_2^4)_F}$
...
N-1	$(el_{N-1}^1)_F$	$(el_{N-1}^2)_F$	$(el_{N-1}^3)_F$	$(el_{N-1}^4)_F$	$\frac{(el_{N-1}^1)_F / (el_{N-1}^2)_F}{(el_{N-1}^3)_F / (el_{N-1}^4)_F}$
N	$(el_N^1)_F$	$(el_N^2)_F$	$(el_N^3)_F$	$(el_N^4)_F$	$\frac{(el_N^1)_F / (el_N^2)_F}{(el_N^3)_F / (el_N^4)_F}$

Таблица 53

Содержимое матрицы "H"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_D$	$(Y_A)_D$	$(X_C)_D$	$(Y_C)_D$
2	$(X_B)_D$	$(Y_B)_D$	$(X_D)_D$	$(Y_D)_D$
3	$(X_{O1})_D$	$(Y_{O1})_D$	$(X_{O2})_D$	$(Y_{O2})_D$
4	$(X_K)_D$	$(Y_K)_D$	$(X_L)_D$	$(Y_L)_D$
5	$(X_F)_D$	$(Y_F)_D$	$(X_E)_D$	$(Y_E)_D$

Таблица 54

Содержимое матрицы "I"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_E$	$(Y_A)_E$	$(X_C)_E$	$(Y_C)_E$
2	$(X_B)_E$	$(Y_B)_E$	$(X_D)_E$	$(Y_D)_E$
3	$(X_{O1})_E$	$(Y_{O1})_E$	$(X_{O2})_E$	$(Y_{O2})_E$
4	$(X_K)_E$	$(Y_K)_E$	$(X_L)_E$	$(Y_L)_E$
5	$(X_F)_E$	$(Y_F)_E$	$(X_E)_E$	$(Y_E)_E$

Таблица 55

Содержимое матрицы "J"

Значение	1	2	3	4
1	$(X_A)_F$	$(Y_A)_F$	$(X_C)_F$	$(Y_C)_F$
2	$(X_B)_F$	$(Y_B)_F$	$(X_D)_F$	$(Y_D)_F$
3	$(X_{O1})_F$	$(Y_{O1})_F$	$(X_{O2})_F$	$(Y_{O2})_F$
4	$(X_K)_F$	$(Y_K)_F$	$(X_L)_F$	$(Y_L)_F$
5	$(X_F)_F$	$(Y_F)_F$	$(X_E)_F$	$(Y_E)_F$

Содержимое матрицы "K"

Значение	1	2	3	4	5	6
1	X_D	Y_D	Z_D	X_B	Y_B	Z_B
2	X_A	Y_A	Z_A	X_C	Y_C	Z_C
3	X_S	Y_S	Z_S	X_R	Y_R	Z_R
4	X_K	Y_K	Z_K	X_M	Y_M	Z_M
5	X_L	Y_L	Z_L	X_N	Y_N	Z_N
6	X_{O1}	Y_{O1}	Z_{O1}	X_{O2}	Y_{O2}	Z_{O2}
7	X_F	Y_F	Z_F	X_G	Y_G	Z_G
8	X_T	Y_T	Z_T	X_U	Y_U	Z_U
9	X_V	Y_V	Z_V	X_W	Y_W	Z_W

Таблица 57

Содержимое матрицы "L"

Значение	1	2	3	4
1	X'_D	Y'_D	X'_B	Y'_B
2	X'_A	Y'_A	X'_C	Y'_C
3	X'_S	Y'_S	X'_R	Y'_R
4	X'_K	Y'_K	X'_M	Y'_M
5	X'_L	Y'_L	X'_N	Y'_N
6	X'_{O1}	Y'_{O1}	X'_{O2}	Y'_{O2}
7	X'_F	Y'_F	X'_G	Y'_G
8	X'_T	Y'_T	X'_U	Y'_U
9	X'_V	Y'_V	X'_W	Y'_W

<p style="text-align: center;">- Disp -</p> <p style="text-align: center;">PROGRAM GEOMETRY OF PYRAMIDS</p>	<p style="text-align: center;">SELECT ANGLES SYSTEM</p> <p>DEGREES (Deg) (1) RADIANS (Rad) (2) GRADS (Gra) (3) OR QUIT (4)?</p> <p style="text-align: center;">1</p>	<p style="text-align: center;">- Disp -</p> <p style="text-align: center;">DEGREES (Deg) ANGLES SYSTEM</p>	<p style="text-align: center;">SELECT OPER ANGLES?</p> <p>DIRECT ENTER ANG (1) SOLVE EQUATION (2) SOLVE TRIANG (3) OR PREVIOUS (4)?</p> <p style="text-align: center;">2</p>
<p style="text-align: center;">A</p> <pre> INPUT EQU V1? (Lan E)=Lan D^2+1= =2(Lan F)^2+1 INPUT V1? (Lan (90-X))^2 INPUT X? (Lan X)^2+1 </pre>	<p style="text-align: center;">B</p> <pre> INPUT LOWER ANG X1? INPUT UPPER ANG X2? </pre>	<p style="text-align: center;">C</p> <p style="text-align: center;">ANGLE X= 38.17270763</p> <p style="text-align: center;">- Disp -</p>	<p style="text-align: center;">D</p> <p style="text-align: center;">SELECT ENTER ANGLE</p> <p>D = TRANSVERSE (1) E = VERSE (2) F = ORIGINAL (3) OR PREVIOUS (4)?</p> <p style="text-align: center;">1</p>
<p style="text-align: center;">E</p> <pre> S= E= 38.17270763 F= 29.06937488 - Disp - </pre>	<p style="text-align: center;">F</p>	<p style="text-align: center;">G</p>	<p style="text-align: center;">H</p> <pre> A 1 2 3 4 1 0.9999 54.821 29.069 2 0.618 0.783 0.4058 3 0.7861 0.618 0.4794 4 0.1961 1.872 0.5538 5 1.872 0.1961 1.1994 38.17270763 - Disp - </pre>
<p style="text-align: center;">I</p>	<p style="text-align: center;">J</p>		<p style="text-align: center;">K</p>
<p style="text-align: center;">CALCUL CORRELATIONS</p> <p>IN TRIANGLE D (1) IN TRIANGLE E (2) IN TRIANGLE F (3) OR NEXT (4) OR PREVIOUS (5)?</p>			
<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE D</p> <pre> S 1 2 3 4 1 0.9999 0.1961 0.618 0.4794 2 1.872 1 0.7861 0.4058 3 0.618 0.7861 1 0.5538 4 0.1961 0.4058 0.5538 1 5 0.2538 0.4081 0.516 1.272 </pre> <pre> S C E A T 1 -0.976 0.1878 1.011 0.286 2 -0.981 0.1878 -0.078 3 -0.82 1 -0.286 0.833 4 0.851 -0.225 1 -0.15 5 13.51 1.035 -0.286 </pre>	<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE E</p> <pre> S 1 2 3 4 5 1 0.9999 1.872 0.7861 0.618 2 1.872 1 0.7861 0.4058 3 0.7861 0.7861 1 0.5538 4 0.618 0.4058 0.5538 1 5 0.618 0.7861 0.4058 1.618 </pre> <pre> S C E A T 1 -0.618 0.7838 3.236 1 2 -0.981 1.288 -0.831 3 -0.407 1 0.238 1.038 4 -0.408 0.238 1 0.339 5 2.618 0.7838 3.238 </pre>	<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE F</p> <pre> S 1 2 3 4 5 1 0.9999 0.5538 0.4058 0.1961 2 1.1994 1 0.878 0.833 3 0.4058 0.878 1 0.4182 4 0.4058 0.2082 0.2082 1 5 0.5538 0.2082 0.2082 1.1994 </pre> <pre> S C E A T 1 -0.538 0.2019 -0.277 0.1848 2 1 -0.201 0.538 -0.53 3 0.201 1 -1.084 0.8342 4 0.201 -0.201 1 -0.343 5 0.4814 1.5578 -0.834 </pre>	
<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE D</p> <pre> S 1 2 3 4 5 1 1 2 2 2 3 2 1 2 2 2 3 3 1 2 2 2 3 4 1 3 3 3 1 5 1 3 3 3 1 </pre> <pre> S C E A T 1 2 2 2 3 1 2 2 2 2 3 1 3 2 2 2 3 1 4 3 3 3 1 1 5 3 3 3 1 1 </pre>	<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE E</p> <pre> S 1 2 3 4 5 1 1 2 2 2 3 2 1 2 2 2 3 3 1 2 2 2 3 4 1 3 3 3 1 5 1 3 3 3 1 </pre> <pre> S C E A T 1 2 2 2 3 1 2 2 2 2 3 1 3 2 2 2 3 1 4 3 3 3 1 1 5 3 3 3 1 1 </pre>	<p style="text-align: center;">CORRELATIONS IN TRIANGLE F</p> <pre> S 1 2 3 4 5 1 1 2 2 2 3 2 1 2 2 2 3 3 1 2 2 2 3 4 1 3 3 3 1 5 1 3 3 3 1 </pre> <pre> S C E A T 1 2 2 2 3 1 2 2 2 2 3 1 3 2 2 2 3 1 4 3 3 3 1 1 5 3 3 3 1 1 </pre>	
<p style="text-align: center;">L</p>	<p style="text-align: center;">M</p>	<p style="text-align: center;">N</p>	

Рис. 26. Скриншоты из программы "GEOPYRAM" (начало)

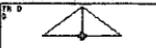
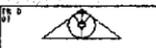
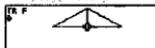
O		
<pre> PARAMS OF TRIANGLE D CALC ON HEIGHT H (1) CALC ON SIDE/2 A (2) OR NOT DRAW TRN (3)? 1 INPUT PAR OF TRIAN D INPUT HEIGHT H? 200 INPUT BEGIN X0? 30 INPUT BEGIN Y0? 20 H A B C S 1 30 200 200 20 2 30 100.00 100.00 57.73 3 -30 216.53 39.024 61.53 4 30 600.36 30 100.00 5 288.0849124 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=100.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=100.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=100.000000 </pre> <p style="text-align: center;">P</p>	<pre> PARAMS OF TRIANGLE E CALC ON HEIGHT H (1) CALC ON SIDE/2 A (2) OR NOT DRAW TRN (3)? 1 INPUT PAR OF TRIAN E INPUT HEIGHT H? 100 INPUT BEGIN X0? 70 INPUT BEGIN Y0? 0 H A B C S 1 100 0 100.015 0 2 0 0 100 0 3 0 0 100 0 4 -10.02 61.002 50.028 31.002 5 0 70.000 0 10.0 6 -50.6151718 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=0.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=0.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=0.000000 </pre> <p style="text-align: center;">Q</p>	<pre> PARAMS OF TRIANGLE F CALC ON HEIGHT H (1) CALC ON SIDE/2 A (2) OR NOT DRAW TRN (3)? 2 INPUT PAR OF TRIAN F INPUT SIDE/2 A? 100 INPUT BEGIN X0? -70 INPUT BEGIN Y0? -50 H A B C S 1 100 100 100 100 2 -25 89.383 -25 -50 3 -25 11.11 -25 100.0 4 -48.89 25.88 9.104 25.88 5 -25 27.775 -25 110.0 6 11.75 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=-50.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=-50.000000 </pre>  <pre> H=100.000000 Y=-50.000000 </pre> <p style="text-align: center;">R</p>
<pre> DRAW PICTURE TRIANGLE D (1) TRIANGLE E (2) TRIANGLE F (3) OR NEXT (4) OR PREVIOUS (5)? 1 </pre>		

Рис. 26. Скриншоты из программы "GEOPYRAM" (продолжение)

S		T																																																																
PARAMS OF PYRAMID CALC ON HEIGHT H (1) OR ON SIDE/2 A (2) OR HEIGHT (3) OR PREVIOUS (4)? 1		PARAMS OF PYRAMID CALC ON HEIGHT H (1) OR ON SIDE/2 A (2) OR HEIGHT (3) OR PREVIOUS (4)? 2																																																																
PYRAMID PARAMETERS INPUT HEIGHT H? 140 INPUT BEGIN X0? 20		PYRAMID PARAMETERS INPUT SIDE/2 A? 8 INPUT BEGIN X0? 0																																																																
PYRAMID PARAMETERS INPUT BEGIN Y0? 10 INPUT BEGIN Z0? 50		PYRAMID PARAMETERS INPUT BEGIN Y0? 0 INPUT BEGIN Z0? 0																																																																
<table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> <th>W</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10</td> <td>50</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-100</td> <td>50</td> <td>20</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>10</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>100</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>100</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>100</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table>	X	Y	Z	W	0	10	50	20	0	-100	50	20	0	100	10	50	0	100	100	50	0	100	100	50	0	100	100	50		<table border="1"> <thead> <tr> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> <th>W</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-100</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>0</td> <td>-100</td> </tr> </tbody> </table>	X	Y	Z	W	0	0	0	0	0	-100	0	0	0	100	0	-100	0	100	0	-100	0	100	0	-100	0	100	0	-100								
X	Y	Z	W																																																															
0	10	50	20																																																															
0	-100	50	20																																																															
0	100	10	50																																																															
0	100	100	50																																																															
0	100	100	50																																																															
0	100	100	50																																																															
X	Y	Z	W																																																															
0	0	0	0																																																															
0	-100	0	0																																																															
0	100	0	-100																																																															
0	100	0	-100																																																															
0	100	0	-100																																																															
0	100	0	-100																																																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th>C</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>50</td> <td>-100</td> <td>-100</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>111.81</td> <td>0</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>173.20</td> <td>0</td> <td>10</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100.00</td> <td>0</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100.00</td> <td>-100.00</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>100.00</td> <td>-100.00</td> <td>100.00</td> </tr> </tbody> </table>	C	X	Y	Z	0	50	-100	-100	0	111.81	0	10	0	173.20	0	10	0	100.00	0	100.00	0	100.00	-100.00	100.00	0	100.00	-100.00	100.00		<table border="1"> <thead> <tr> <th>S</th> <th>C</th> <th>X</th> <th>Y</th> <th>Z</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> <td>-100</td> <td>-100</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>66.601</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>-66.60</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>66.602</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>-66.60</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>61.880</td> <td>0</td> <td>61.880</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>61.880</td> <td>-61.88</td> <td>0</td> <td>61.880</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>61.880</td> <td>-61.88</td> <td>0</td> <td>61.880</td> </tr> </tbody> </table>	S	C	X	Y	Z	0	0	-100	-100	0	0	66.601	0	0	-66.60	0	66.602	0	0	-66.60	0	61.880	0	61.880	0	0	61.880	-61.88	0	61.880	0	61.880	-61.88	0	61.880	
C	X	Y	Z																																																															
0	50	-100	-100																																																															
0	111.81	0	10																																																															
0	173.20	0	10																																																															
0	100.00	0	100.00																																																															
0	100.00	-100.00	100.00																																																															
0	100.00	-100.00	100.00																																																															
S	C	X	Y	Z																																																														
0	0	-100	-100	0																																																														
0	66.601	0	0	-66.60																																																														
0	66.602	0	0	-66.60																																																														
0	61.880	0	61.880	0																																																														
0	61.880	-61.88	0	61.880																																																														
0	61.880	-61.88	0	61.880																																																														
<table border="1"> <thead> <tr> <th>I</th> <th>Y</th> <th>Z</th> <th>W</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>100.000</td> <td>0.000</td> <td>100.000</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-176.1</td> <td>40.000</td> <td>101.81</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-200.00</td> <td>00.00</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-200.1</td> <td>-20.00</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>111.81</td> <td>-20.00</td> <td>-100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>111.81</td> <td>-20.00</td> <td>-100.00</td> </tr> </tbody> </table>	I	Y	Z	W	0	100.000	0.000	100.000	0	-176.1	40.000	101.81	0	-200.00	00.00	100.00	0	-200.1	-20.00	100.00	0	111.81	-20.00	-100.00	0	111.81	-20.00	-100.00		<table border="1"> <thead> <tr> <th>I</th> <th>Y</th> <th>Z</th> <th>W</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>100</td> <td>0</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-76.99</td> <td>-20.00</td> <td>99.999</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>-100.0</td> <td>-20.00</td> <td>100.00</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>64.624</td> <td>-33.75</td> <td>-34.64</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>64.624</td> <td>-33.75</td> <td>-34.64</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>64.624</td> <td>-33.75</td> <td>-34.64</td> </tr> </tbody> </table>	I	Y	Z	W	0	100	0	100.00	0	-76.99	-20.00	99.999	0	-100.0	-20.00	100.00	0	64.624	-33.75	-34.64	0	64.624	-33.75	-34.64	0	64.624	-33.75	-34.64								
I	Y	Z	W																																																															
0	100.000	0.000	100.000																																																															
0	-176.1	40.000	101.81																																																															
0	-200.00	00.00	100.00																																																															
0	-200.1	-20.00	100.00																																																															
0	111.81	-20.00	-100.00																																																															
0	111.81	-20.00	-100.00																																																															
I	Y	Z	W																																																															
0	100	0	100.00																																																															
0	-76.99	-20.00	99.999																																																															
0	-100.0	-20.00	100.00																																																															
0	64.624	-33.75	-34.64																																																															
0	64.624	-33.75	-34.64																																																															
0	64.624	-33.75	-34.64																																																															
U		V																																																																
EXPORT ANGLE EXPORT TO PROGRAM GEOPYR? (1) EXPORT D (2) EXPORT W (3) OR PREVIOUS (4)? 1																																																																		
X		Y		Z																																																														
EXPORT ANGLE 39.17270763 - Disp -		EXPORT ANGLE 51.82729237 - Disp -		EXPORT ANGLE 29.86937488 - Disp -																																																														

Рис. 26. Скриншоты из программы "GEOPYRAM" (окончание)

Заключение

В качестве заключения предлагаем изложение краткого содержания настоящего пособия и сформулированный общий вывод.

Во введении представлена общая информация о графических калькуляторах, их месте в рамках информационно-коммуникационных технологий, наряду с персональными компьютерами и ноутбуками; выявлены положительные стороны непосредственного использования графических калькуляторов при проведении занятий по математике в качестве информационно-коммуникационного средства. Также во введении представлена определенная информация о графическом калькуляторе *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS* в целом и краткое описание режимов работы рассматриваемого графического калькулятора.

В первой главе приведено описание лабораторного практикума по численным методам в математике с использованием графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*, суть которого заключается в рассмотрении широко распространенных разделов численных методов, имеющих непосредственное отношение к решению таких основных задач математического анализа, как определение предела числовой последовательности, вычисление определенного интеграла, решение трансцендентных и дифференциальных уравнений. В данной главе в развернутом виде представлены необходимые доказательства, а также инструкции по проведению лабораторных занятий и эксплуатации разработанных В.В. Богуном программ.

Содержание второй главы представлено описанием дидактического материала для проведения практических занятий в рамках изучения аналитической геометрии на плоскости, суть которых сводится к определению и визуализации геометрических параметров произвольных треугольников на плоскости исходя из заданных пользователем координат вершин треугольника с использованием графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0 PLUS*. В данной главе также в развернутом виде представлены необходимые доказательства, инструкции по проведению практических занятий и эксплуатации разработанных В.В. Богуном программ.

На протяжении третьей главы излагается описание дидактического материала для проведения факультативных занятий, направленных на исследование геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве с использованием графического калькулятора *CASIO ALGEBRA FX 2.0*

PLUS. В данной главе широко представлен оригинальный теоретический материал, включающий формулировку и доказательство необходимых теорем и следствий из них, решение отдельных задач на основе данных теорем, а также в развернутом виде приведены необходимые доказательства, инструкции по проведению факультативных занятий и эксплуатации разработанных В.В. Богуном программ.

Таким образом, в настоящем пособии, предназначенном для студентов педагогических вузов, обучающихся по специальности “Математика”, представлены необходимые дидактические материалы для проведения лабораторных, практических и факультативных занятий по математике через призму таких соответствующих разделов математики, как численные методы с точки зрения изучения природы основных математических понятий, аналитическая геометрия на плоскости в рамках определения и визуализации различных параметров произвольных треугольников на плоскости, элементарная геометрия на плоскости и в пространстве в русле ее интеграции с тригонометрией с точки зрения исследования геометрических свойств равнобедренных треугольников на плоскости и правильных четырехугольных пирамид в пространстве.

Несомненно, учебное пособие будет полезно всем категориям участников учебного процесса с дидактической, математической и информационной точек зрения, занимающихся проблемами внедрения различных форм информатизации в процесс обучения математике, будь то учителя математики, студенты педвузов или школьники.

Более того, использование графического калькулятора в процессе обучения математике выполняет мотивационную, обучающую, развивающую и контролирующую функции, повышая эффективность процесса формирования математических, информационных и методических умений будущего учителя математики.

Библиографический список

1. Богун, В.В. Методика использования графического калькулятора в обучении математике студентов педагогических вузов [Текст]: дис. ... канд. пед. наук. – Ярославль, 2006. – 245 с.
2. Богун, В.В. Исследование предельных процессов для числовых последовательностей с применением графических калькуляторов [Текст] // Ярославский педагогический вестник. – 2004. – № 4. – С. 179–189.
3. Богун, В.В. Геометрия Древнего Египта [Текст]. – М.: Компания Спутник+, 2003. – 203 с.
4. Богун, В.В., Смирнов, Е.И. Использование графического калькулятора в обучении математике [Текст] // Труды третьих Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. – С. 238–249.
5. Богун, В.В. Геометрические свойства равнобедренных треугольников [Текст] // Ярославский педагогический вестник. – 2002. – № 2 – С. 119–124.
6. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст]: учеб. пособие / под ред. Е. И. Смирнова. – Ярославль, 2007. – 454 с.
7. Вострокнутов, И. Е. “Школьный калькулятор” – новый образовательный проект фирмы CASIO в России [Текст] // Математика в школе. – 2003. – № 5. – С. 74–76.
8. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике [Текст]. – М.: Большая Медведица, 2001. – 864 с.
9. Дьяконов, В. П. Современные зарубежные микрокалькуляторы [Текст]. – М.: СОЛОН-Р, 2002. – 400 с.
10. Исаков, В.Н. Элементы численных методов [Текст]: учеб. пособие для студ. – М.: Академия, 2003. – 192 с.
11. Корнилов, П.А. Численные методы [Текст]: методические указания. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ. – Ярославль, 1989. – 32 с.
12. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст]: учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.
13. Смирнов, Е. И. Наглядно-модельное обучение математике [Текст]: монография. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ. – Ярославль, 1998. – 313 с.

Учебное издание

Виталий Викторович Богун
Евгений Иванович Смирнов

**Использование графического калькулятора
в обучении математике**

Учебное пособие

Редактор М. А. Кротова
Текст на иностранном языке в авторской редакции.

Подписано в печать 11.01.2008. Формат 60x92/16.
Объем 14,5 п.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1

Издательство Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльская наб., 44
Тел.: (4852) 32-98-69, 72-64-05