Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского»

Т. М. Корикова, А. В. Ястребов

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

ПО ОБЩЕЙ МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Ярославль

2009

УДК 14.25.09+14.35.09
ББК 74.262.21
К 66

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук доцент Л. Б. Медведева,
кандидат физико-математических наук доцент Т. Л. Трошина

К 66 **Корикова Т. М., Ястребов А. В.**
Справочные материалы по общей методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 60 с.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей педагогических вузов, а также учителей школ. Оно достаточно полно и соответствует государственному образовательному стандарту в части, касающейся общей методики. Текст лаконичен, так как содержит преимущественно общепринятые термины, формулировки теоретических положений и минимальный набор основных примеров, иллюстрирующих их. Пособие ориентировано на изложение того и только того материала, который может быть реально изложен за один семестр обучения. Его рекомендуется использовать в сочетании с полномасштабными учебниками. Целесообразно использовать пособие для чтения *до* лекции или *во время* лекции.

Учебное пособие подготовлено к 60-летию кафедры теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского

УДК 14.25.09+14.35.09
ББК 74.262.21

ISBN 978–5–87555–489–5

© ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского», 2009
© Корикова Т.М., Ястребов А.В., 2009

Содержание

Введение

Настоящее учебное пособие отличается от известных руководств по общей методике преподавания математики. Оно не является учебником, так как содержит только терминологию и не содержит разъяснений, альтернативных точек зрения, развернутых примеров и контрпримеров. Оно не является задачником, так как не содержит задач, хотя некоторые элементы текста могут быть переформулированы в виде задач. Оно не является лабораторным практикумом, так как не содержит системы лабораторных работ. По существу пособие представляет собой в точности то, что указано в его названии, – это справочные материалы, которые содержат общепринятые термины, общие теоретические положения и минимальный набор основных примеров, иллюстрирующих их.

Указанные свойства пособия определяют его предназначение и способы применения. Пособие целесообразно использовать для чтения ***до*** лекции или ***во время*** лекции по общей методике преподавания математики. Благодаря наличию текста, сопровождающего лекцию, студент освобождается от значительной части рутинной работы по ее записи и может использовать освободившееся время для фиксации нюансов изложения, обдумывания информации по ходу ее поступления, формулировки вопросов и т.д. В свою очередь, преподаватель освобождается от необходимости заботиться о том, чтобы студенты имели достаточно времени для записи основных положений лекции, так как они уже зафиксированы в тексте пособия. Вместо этого он имеет возможность сосредоточиться на выразительных примерах, описать случаи из практики, сделать исторические экскурсы и т.д.

Пособие является предельно кратким и содержит только тот материал, который реально может быть изложен за один семестр обучения. Например, согласно учебным планам Ярославского государственного педагогического университета им. К. Д. Ушинского на общую методику отводится только 18 часов лекций и 18 часов лабораторных работ. Это отнюдь не много, во всяком случае, недостаточно для того, чтобы подробно изложить весь круг вопросов, традиционных для общей методики.

Из всего вышесказанного следуют два вывода, которые взаимно дополняют друг друга. Во-первых, пособие принесет пользу только *в сочетании* с другими видами литературы по общей методике. Во-вторых, содержание пособия подлежит полному, безусловному усвоению, вплоть до такого непопулярного действия, как заучивание наизусть.

В двух важных разделах, касающихся методики формирования понятий и методики изучения теорем, авторы сознательно отошли от стиля справочника и сделали текст достаточно подробным.

1. Первые представления о методике преподавания математики

Разъяснение смысла терминов «метод» и «методика» начнем с их общей трактовки, принятой в русском языке. Так, в «Словаре русского языка» С. И. Ожегова написано следующее: «Метод – это способ теоретического исследования или практического осуществления чего-нибудь». Например, исследование систем линейных уравнений, а также практическое решение конкретных систем, осуществляется с помощью метода Жордана-Гаусса. Другой пример – изучение функций, непрерывных на замкнутом отрезке и имеющих на концах отрезка разные знаки. Доказательство существования точки, в которой функция обращается в нуль, осуществляется с помощью метода дихотомии, то есть метода деления отрезка пополам. Тот же метод применяется для приближенного решения уравнений. Далее словарь говорит, что методика – это «совокупность методов обучения чему-нибудь, практического выполнения чего-нибудь, а также наука о методах обучения».

Научные представления о методике преподавания математики зародились в начале XIX века в трудах швейцарского педагога Г. Песталоцци, опубликовавшего в 1803 г. работу «Наглядное учение о числе».

Каждая научная дисциплина имеет объект исследования и предмет исследования. ***Объектом исследования*** методики преподавания математики является процесс передачи математических знаний от одного поколения к другому. ***Предметом исследования*** методики преподавания математики являются закономерности обучения математике, методы и приемы освоения отдельных тем и воспитание средствами математики. Разъясним смысл используемых терминов.

Объектом исследования всегда является нечто, существующее в природе или обществе, причем существующее независимо от исследователя, от его знаний, представлений, точек зрения, намерений и проч. Так, объектом исследования астронома может быть планета Марс, а объектом исследования географа – континент Австралия. Процесс передачи математических знаний от одного поколения к другому существовал с того момента, как появились эти знания, то есть за многие тысячелетия до того, как люди задумались о целесообразных способах передачи знаний.

Предметом исследования является тот или иной аспект объекта. Так, изучая Австралию, топограф составляет ее географическую карту, а геолог изучает месторождения полезных ископаемых. Изучая процесс передачи математических знаний от одного поколения к другому, можно, например, сосредоточиться на способах письменной фиксации этих знаний или на социальных институтах, осуществляющих эту передачу. Будучи интересными сами по себе, названные аспекты, тем не менее, не относятся к методике обучения математике.

В процесс передачи математических знаний от одного поколения к другому входят два взаимно дополняющих и взаимно обусловленных процесса: преподавание учителем математического материала и освоение этого материала учащимся.

Методика обучения математике является синтетической наукой, использующей идеи и результаты других наук: математики, логики, психологии, педагогики, философии, истории математики и математического образования.

Математика предоставляет методике тот исходный материал, который подлежит освоению учеником и с этой целью подвергается дидактической обработке. Суть дидактической обработки будет раскрываться постепенно по мере изучения методики. Здесь же мы отметим, что развитие математики как науки оказывает существенное влияние на содержание школьного образования и, следовательно, на методику преподавания математики. Так, развитие аксиоматического метода привело к его введению в школьный курс математики, а успехи векторного исчисления – к его введению в школьные курсы математики и физики.

Логика предоставляет методике общую идею о правильной, полноценной аргументации. Более конкретно, она формулирует правила логического вывода, с помощью которых можно получать новые суждения об изучаемых математических объектах, базируясь на ранее известных суждениях.

Психология играет особую роль в методике, поскольку всякое обучение, в том числе и математике, нацелено на развитие личности ученика. Это означает, что дидактическая обработка математического материала осуществляется с учетом данных психологии о структуре личности человека, о свойствах личности, ее возрастных особенностях и многом другом. В частности, для качественной дидактической обработки необходимо учитывать закономерности восприятия, внимания, памяти, мышления и других механизмов психики человека.

Педагогика вносит в методику теоретические основы общих методов и форм обучения, а также общедидактические принципы обучения. Естественно, что все эти положения используются с учетом специфики предмета «математика». Теория воспитания помогает определить содержание и методы воспитания в процессе обучения математике.

Философия предоставляет методике общие методы научного познания: анализ и синтез, индукцию и дедукцию, обобщение и конкретизацию и т.д. Суть этих методов будет раскрываться по мере изучения методики.

История математики и математического образования дает возможность оценить те взгляды на математику и методику ее преподавания, которые возникали в ряду поколений. В частности, она дает возможность усвоить прогрессивные и перспективные идеи, предвидеть трудности внедрения других идей, осознать основные тенденции развития математического образования.

Методику обучения математике можно условно разделить на две части:

- общую методику, или теорию обучения математике;
- частные методики, или способы изучения конкретных математических тем в конкретных возрастных группах учащихся.

2. Понятие методической системы

Приступая к обучению математике, учитель и педагогический коллектив должны иметь ответы, хотя бы приблизительные, на ряд основополагающих вопросов.

1. Для чего люди изучают математику? Каков тот образовательный результат, который естественно ожидать от изучения математики и который желательно получить? Обобщенно говоря, каковы *цели* изучения математики?

2. Каковы основные, исходные положения той педагогической концепции, которой будет придерживаться учитель в своей педагогической деятельности? Каковы его внутренние убеждения и взгляды на процесс преподавания, которые определяют норму поведения всех участников этого процесса? Каковы те положения, научные и нравственные, отступление от которых невозможно? Обобщенно говоря, каковы *принципы*, на которых строится учебный процесс?

3. Объем доступного школьнику математического материала намного больше того, что позволяют освоить его физические возможности. В связи с этим возникает вопрос: каким должен быть тот математический материал, который подлежит освоению? Какие разделы математики следует включать в программу? Почему следует оставить за пределами программы другие разделы математики, столь же интересные и столь же доступные? Каков список определений, теорем, базовых примеров, которые следует изучить? Обобщенно говоря, каково должно быть *содержание* математического образования?

4. Педагогическая наука и практика накопила большой арсенал организационных форм работы: уроки, лекции, семинары, коллоквиумы и т.д. Будут ли в процессе преподавания использоваться только/преимущественно уроки, или же будут подключаться другие формы организации занятий? Каково соотношение различных организационных форм работы? Как выбрать оптимальную форму работы для изучения конкретной темы? Обобщенно говоря, целесообразно иметь описание того, как используются различные *организационные формы* работы в процессе преподавания математики конкретным учителем.

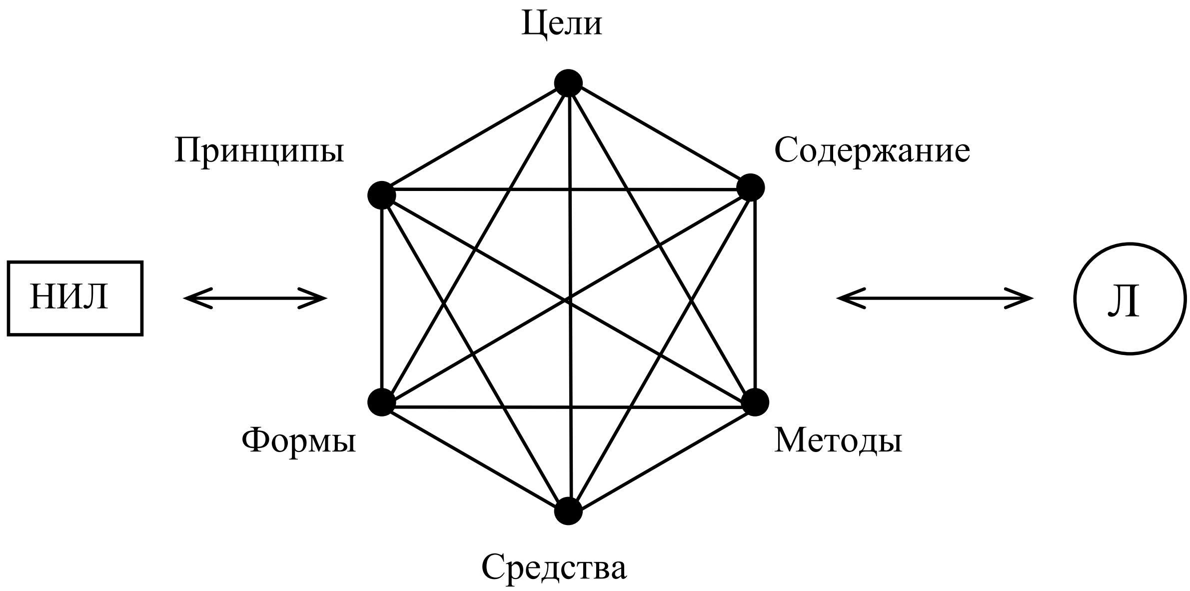
5. Педагогическая наука и практика накопила большой арсенал методов освоения математического материала: объяснение, выполнение домашнего задания, воспроизведение учеником освоенного материала, расчетная работа, измерения с последующей обработкой результатов, реализация проекта и проч. Будет ли в процессе преподавания использоваться только/преимущественно объяснение с последующим контролем, или же будут использоваться другие методы освоения математики? Как выбрать оптимальный метод изучения конкретной темы? Обобщенно говоря, целесообразно иметь описание того, как используются различные *методы* освоения математического материала в процессе преподавания математики конкретным учителем.

6. Педагогическая наука и практика накопила большой арсенал средств освоения математического материала: доска и чертежные инструменты, интерактивная доска, учебники и задачники, электронные учебники и проч. Естественно, что целесообразно иметь описание того, как используются различные

средства освоения математического материала в процессе преподавания математики конкретным учителем.

Если ответы на эти вопросы в достаточной мере точны и детализированы, то из них складывается ***методическая система.*** Ее общее определение таково: методическая система – это совокупность шести иерархически связанных компонентов: целей, принципов, содержания, форм, методов и средств обучения.

Методическая система и объект ее воздействия – личность учащегося – схематически изображены на рис. 1. Отметим два обстоятельства, которые пока



НИЛ – научная информация о личности; Л – личность учащегося

Рис. 1.

не обсуждались. Во-первых, каждый компонент системы связан с каждым, так что совокупность точек и линий на рисунке образует полный граф. Во-вторых, в основе системы лежит личность ученика с ее структурой, свойствами и возрастными особенностями (некоторые исследователи употребляют термин «динамическая структура личности»). При этом на разных этапах работы с системой личность ученика выступает в разных качествах. На этапе *проектирования* научная информация о динамической структуре личности (НИЛ на схеме) задает проектировщику те рамочные условиями, в которых он работает. Без информации о личности учащихся трудно рассчитывать на то, что проектируемая, но пока не существующая, методическая система будет действовать эффективно. На этапе *описания* методической системы вся информация о личности включается в текст описания и составляет, по существу, один из элементов методической системы. На этапе *применения* личность ученика выступает двояко. С одной стороны, ученик является *объектом* применения методической системы, поскольку методическая система изначально создается для того, чтобы с ее помощью воздействовать на учащихся. С другой стороны, ученик является *субъектом* педагогического процесса, поскольку без его активного участия в процессе обучения позитивный образовательный результат не может быть достигнут.

Первые представления о методической системе как о целостном объекте возникли примерно в 60-х годах XX в. в работах А. М. Пышкало. Естественно, что с течением времени эти представления эволюционируют. Так, в работах А. М. Пышкало отсутствовал блок, касающийся принципов обучения. Кроме того, личность учащегося стала рассматриваться как компонент методической системы лишь сравнительно недавно, после того, как в педагогической науке на первый план вышли представления о личностно-ориентированном обучении. Наконец, при проектировании и применении методической системы следовало бы рассматривать не только динамическую структуру отдельной личности, пусть даже и типической, но и динамическую структуру коллектива, поскольку конкретный человек практически всегда получает образование в условиях коллективного обучения.

В заключение отметим, что существуют другие взгляды на понятие методической системы, которые существенно отличаются от вышеизложенных.

3. Понятие педагогической технологии

Понятие педагогической технологии относится к числу сложных понятий, поскольку на современном этапе развития науки оно обладает противоречивыми свойствами. С одной стороны, это понятие весьма актуально и находится в центре внимания педагогической общественности. Действительно, огромные массы людей обучаются чему-либо, и вполне естественно, что преподаватели хотят *сделать учебный процесс полностью управляемым*. Естественно также требовать, чтобы конкретные педагогические подходы, методы, приемы и проч., разработанные *одним* специалистом, были усвоены и применены *другим* специалистом, то есть были бы технологичны. С другой стороны, отсутствуют согласованные представления о самом предмете: что есть «образовательная технология», «технология обучения», «технологический подход в обучении». В литературе имеется более ста определений этих понятий, следовательно, отсутствует общепринятое определение.

На рис. 2, заимствованном из книги [6], представлен специальный подход к анализу понятий, относящихся к технологическому подходу в обучении. Два нижних блока рисунка целесообразно рассматривать в качестве определений педагогической технологии.

Приведем названия некоторых технологий обучения, хорошо зарекомендовавших себя на разных предметах и у разных учителей. Их описание, а также подробная информация о технологическом подходе в обучении, содержится в книге [6]. Другие подходы к тем же понятиям можно найти в книге [13].

Семантико-генетический подход к анализу понятий «образовательная технология», «педагогическая технология», «технология обучения»

Рис. 2.

Предметно-ориентированные технологии обучения:

- технология полного усвоения;
- технология уровневой дифференциации;
- технология концентрированного обучения;
- технология модульного обучения;

- технология проблемно-модульного обучения;
- технология педагогического процесса по С. Д. Шевченко.

Личностно-ориентированные технологии обучения:

- технология обучения в школе С. Френе;
- технология педагогических мастерских;
- технология учебного проектирования;
- технология обучения «Мозговой штурм»;
- технология коллективной мыследеятельности;
- технология обучения как учебного исследования.

4. Структура обучения математике в школе

Полный длительный одиннадцатилетний курс обучения в школе естественно разбить на несколько этапов, причем сделать это можно различными способами, опираясь на разные основания. Нижеследующая таблица дает два таких разбиения. В ее левой части дано «административное» разбиение по ступеням образования. В правой части таблицы перечислены различные типы математических курсов.

Ступени образования		**Математические курсы**	
Названия ступеней	***Классы***	***Классы***	***Названия курсов***
Начальная школа	1–4	1–6	*Пропедевтический* курс: единый курс «Математика»
Основная школа	5–9	7–9	*Систематический* курс: базовое математическое образование
Полная средняя школа	10–11	10–11	*Систематический* курс: профильное математическое образование

Пропедевтический курс носит интегративный характер. Его цель – первоначальное накопление фактов в области математики с помощью методов, родственных естественно-научным: наблюдения, опыта, аналогии, обобщения, неполной индукции.

В систематическом курсе изучение единой математики подразделяется на несколько ветвей. В основной школе это геометрия и алгебра. В полной средней школе это геометрия и алгебра и начала анализа. Стохастика, то есть комбинаторика, теория вероятностей и статистика, в разных федеральных комплектах учебников относится к разным ступеням школы: в одних она изучается с 5 по 11 класс, в других – в 10–11 классах.

Базовый курс содержит материал, *обязательный для всех учащихся*, независимо от их способностей, вкусов и предпочтений, планов и проч. Он содержит такой материал, который является основой развития личности и не может быть опущен.

Профильный курс учитывает способности учащихся, их вкусы, профессиональные и социальные предпочтения, планы и проч. Существует несколько модификаций профильного курса математики. Детали описаны в государственных стандартах.

5. Цели обучения математике в школе

Будущее любого общества, его прогресс или регресс, во многом зависит от готовности школы участвовать в преобразованиях, происходящих в обществе. Очевидно, что школа должна удовлетворять запросы общества и быть нацелена на его развитие. При этом необходимо понимать, что в настоящее время главной ценностью общества считается человек, причем всестороннее развитие каждой личности считается необходимым условием развития общества в целом. В силу этого совершенствование системы образования должно идти в двух взаимно дополнительных направлениях: в направлении удовлетворения потребностей общества и в направлении удовлетворения потребностей личности. Вот что пишут об этом два крупных специалиста в этой области Б. М. Бим-Бад и А. В. Петровский: «Цели современного образования – предельно полно достижимое развитие тех способностей личности, которые нужны и ей и обществу, включение ее в социально ценную активность; обеспечение возможностей эффективного самообразования за пределами институциализированных образовательных систем».

Эти общие соображения положены в основу работы над проектом стандарта второго поколения. Его целевой принцип формулируется следующим образом: «Цель общего среднего образования – формирование разносторонне развитой личности, обладающей высоким уровнем общекультурного и личностного развития, способной к самостоятельному решению новых, еще не известных задач».

Поскольку математика входит в цикл базовых дисциплин школьного курса, при определении целей обучения математике исходят одновременно из нескольких отправных точек: из общих целей обучения, из специфики математики как научной дисциплины, из роли математики в науке, технике, производстве, жизни современного общества.

Научно-технический прогресс напрямую связан с развитием математики. Универсальность математических знаний проявляется в проникновении математических методов в другие области знания: естественные науки (физика, химия, биология и др.), гуманитарные науки (психология, лингвистика и др.), технику, экономику и т.д. Обучение математике, тесно связанное с обучением другим предметам, должно приводить учащихся к пониманию роли, которую математика играет в научной и философской концепции современного мира. С одной стороны, без знания математики невозможно создание адекватного представления о мире. С другой стороны, математически образованному человеку легче войти в любую новую для него проблематику.

Математическое образование является испытанным средством интеллектуального развития в условиях массового обучения. Такое развитие обеспечивается принятым в математическом образовании систематическим, дедуктивным *изложением теории* в сочетании с *решением* хорошо организованной *системы задач*. Процесс изучения теорем формирует навыки полноценной аргументации, доказательных рассуждений. Процесс решения задач требует постоянного использования таких методов научного исследования, как сравнение, анализ, синтез и др. Изучение геометрических объектов позволяет развивать пространственные представления и воображение. Наконец, успешное изучение математики облегчает и улучшает изучение других дисциплин.

Математика позволяет успешно решать задачи практического содержания: критически ориентироваться в статистической, экономической, логической информации; видеть математическую задачу в производственной или житейской ситуации; интерпретировать в содержательных терминах результаты решения чисто математических задач; правильно проводить технические расчеты для практических задач; оценивать риски возможных деловых предложений и многое другое. Значительный спектр математических знаний и свойственный математике стиль мышления становятся обязательным элементом общей культуры современного человека.

Математика обладает большим воспитательным потенциалом: воспитывает интеллектуальную корректность, критичность мышления, способность различать обоснованные и необоснованные суждения, приучает к продолжительной умственной деятельности, воспитывает настойчивость и привычку работать упорядоченно, формирует культуру общения.

Для значительной части учащихся школьная математика является необходимым компонентом предпрофессиональной подготовки.

Все вышесказанное означает, что цели обучения математике можно разделить на следующие группы:

- образовательные;
- развивающие;
- воспитательные;
- практические.

Естественно, что эти группы не изолированы друг от друга, а взаимосвязаны и взаимозависимы. Например, развитие ученика не является простым следствием приобретения новых знаний, однако невозможно говорить о достижении необходимого уровня развития без определенной суммы знаний. В то же время, процесс обучения конкретным знаниям, умениям и навыкам является составной частью воспитания, предполагающего высокую образованность, и должен стать важным средством воспитания.

6. Содержание обучения математике в школе

Школьное математическое образование включает в себя *семь* основных линий, которые осваиваются школьниками на протяжении всего процесса обучения. Ниже будут перечислены эти линии и дана общая характеристика каждой из них применительно к основной школе и полной средней школе.

1. Числа и выражения.

В основной школе приобретаются систематические сведения о рациональных числах и осваиваются навыки действий с ними. Дается элементарное представление об иррациональных числах.

В полной средней школе осваиваются навыки действий с иррациональными числами. Продолжается совершенствование вычислительной культуры за счет введения показательных, логарифмических и тригонометрических выражений.

2. Выражения и их преобразования.

В основной школе центральным является понятие рационального выражения. Осваиваются навыки преобразований целых и дробных выражений. Рассматриваются выражения, содержащие радикалы.

В полной средней школе сосредоточен материал о выражениях, которые более сложны, чем рациональные: об иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических выражениях.

3. Уравнения и неравенства.

В основной школе осваиваются алгоритмы решения основных видов рациональных уравнений, неравенств и их систем. Главные из них – линейные и квадратные уравнения.

В полной средней школе расширяется класс изучаемых уравнений и неравенств за счет введения новых видов функций – показательных, логарифмических и тригонометрических. Формируется представление об *общих методах* решения уравнений, неравенств и их систем.

4. Геометрические фигуры и измерение геометрических величин.

В основной школе даются систематические знания об основных плоских фигурах и основных геометрических отношениях. Осваивается синтетический, алгебраический, векторный и координатный метод решения геометрических задач.

В полной средней школе все освоенные методы применяются к изучению пространственных фигур.

5. Функции.

В основной школе рассматриваются простейшие элементарные функции – линейная, квадратичная, обратно пропорциональная зависимость. Строятся их графики и изучаются простейшие свойства.

В полной средней школе вводятся новые классы функций – показательные, логарифмические, тригонометрические. Строятся их графики и изучаются новые свойства функций – монотонность, экстремум, периодичность и проч. Изучение ведется различными средствами, в частности, средствами математического анализа.

6. Элементы математического анализа.

Элементы математического анализа изучаются только в полной средней школе. Основной целью их изучения является получение эффективного инструмента для исследования функций, следовательно, математический анализ – это продолжение функциональной линии школьного курса математики.

7. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и статистики.

Комбинаторика, теория вероятностей и статистика в разных федеральных комплектах учебников относятся к разным ступеням школы: в одних они изучаются с 5 по 11 класс, в других – в 10–11 классах. Однако, несмотря на это, цели изучения этой линии едины у разных авторов, поскольку они диктуются государственным стандартом. Эти цели таковы:

- формирование представлений о различных типах соединений предметов;
- формирование представлений о случайных событиях и их вероятностях;
- формирование умений/навыков решения простых вероятностных задач;
- формирование простейших умений по сбору, представлению, анализу и интерпретации данных.

Следует заметить, что все линии школьного курса математики существуют в неразрывном единстве. Они практически идеально скоординированы, и их совокупное содержание составляет единое поле математического знания.

7. Методы научного исследования в обучении математике, или Механизмы мыслительной деятельности

Очевидно, что в результате изучения математики в сознании учащегося должен возникнуть ее адекватный образ. В частности, это означает, что учащийся должен иметь представление о тех общих методах, которыми пользуется математика. В то же время наука создается как совокупный результат работы отдельных ученых, так что методы научного исследования одновременно выступают как характерные черты мыслительной деятельности конкретного человека. Именно этим обстоятельством объясняется двойное название раздела.

По поводу основных внутренних закономерностей мыслительной деятельности знаменитый психолог С. А. Рубинштейн писал следующее: «Процесс мышления – это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; это, затем, абстракция и обобщение, являющиеся производными от них. Закономерности этих процессов и их взаимоотношения друг с другом суть основные внутренние закономерности мышления».

7.1. Анализ и синтез

Анализ – совокупность мыслительных операций, логический прием, состоящий в *разложении* изучаемого объекта на характерные для него составные элементы, *выделении* в нем отдельных свойств, изучении каждого элемента или свойства объекта *в отдельности*.

Синтез – совокупность мыслительных операций, логический прием, состоящий в *соединении* элементов или свойств изучаемого объекта, полученных при анализе, в установлении *взаимосвязей* между частями и получении знания об этом объекте как о *едином целом*.

Анализ и синтез – две стороны единого мыслительного процесса, они взаимосвязаны и трудноотделимы друг от друга, так что в большинстве случаев целесообразно говорить о единой аналитико-синтетической деятельности.

Пусть нам нужно решить задачу, имеющую условие A и требование B. Говорят, что в доказательстве использован метод ***восходящего анализа,*** если применена следующая логическая схема:

$$B \overset{1}{\Leftarrow} A_1 \overset{2}{\Leftarrow} A_2 \overset{3}{\Leftarrow} \cdots \overset{n}{\Leftarrow} A_n = A. \tag{1}$$

Другими словами, сначала подбирают условие A_1, *достаточное* для выполнения свойства B, затем подбирают условие A_2, *достаточное* для выполнения свойства A_1, и так далее до тех пор, пока на последнем шаге не получим свойство A, являющееся условием задачи (здесь и далее числа над стрелками показывают порядок выполнения импликаций).

Говорят, что в доказательстве использован метод ***нисходящего анализа,*** если применена следующая логическая схема:

$$\begin{array}{c} B \overset{1}{\Rightarrow} A_1 \overset{2}{\Rightarrow} A_2 \overset{3}{\Rightarrow} \cdots \overset{n}{\Rightarrow} A_n = A \\ B \overset{2n}{\Leftarrow} A_1 \overset{2n-1}{\Leftarrow} A_2 \overset{2n-2}{\Leftarrow} \cdots \overset{n+1}{\Leftarrow} A_n = A \end{array}. \tag{2}$$

Иными словами, сначала из свойства B выводятся следствия A_1, A_2 и так далее до тех пор, пока не получится условие A, а затем обращаются все стрелки.

Очень часто, но не всегда, нисходящий анализ реализуется в виде цепи эквиваленций

$$B \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n = A, \tag{3}$$

поскольку обратимость каждой импликации бывает очевидна.

Говорят, что в доказательстве использован ***синтетический*** метод, если применена следующая логическая схема:

$$A \overset{1}{\Rightarrow} A_1 \overset{2}{\Rightarrow} A_2 \overset{3}{\Rightarrow} \cdots \overset{n}{\Rightarrow} A_n = B. \tag{4}$$

Другими словами, из условия A выводятся следствия до тех пор, пока не получится требование B.

Оба вида анализа объединяет то обстоятельство, что в процессе рассуждений преобразуется *требование* задачи. В отличие от анализа в процессе синтетического рассуждения преобразуется *условие* задачи.

Пример 1. Известен признак параллелограмма: если две стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом. Ниже будут даны три доказательства этого факта, соответствующие разным логическим схемам. Полезно выявить, если это возможно, аналитические элементы в синтетическом доказательстве и синтетические элементы в аналитическом доказательстве.

Доказательство 1 (*синтетическое, логическая схема* (4)). Пусть четырехугольник $ABCD$ таков, что

$$AD \parallel BC, \tag{*}$$

$$AD = BC. \tag{**}$$

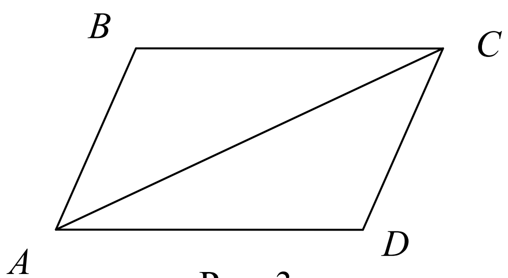


Рис. 3.

1) Из условия (*) *следует*, что $\angle BCA = \angle DAC$. 2) Из этого равенства, из условия (**) и того факта, что диагональ AC является общей стороной треугольников BCA и DAC, *следует*, что $\Delta BCA = \Delta DAC$. 3) Из равенства треугольников *следует*, что $\angle DCA = \angle BAC$. 4) Из равенства этих углов *следует*, что $AB \parallel CD$. 5) Из этого соотношения и условия (*) *следует*, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство 2 (*восходящий анализ, логическая схема* (1)). 1) Для доказательства «параллелограммности» четырехугольника $ABCD$ нужно доказать попарную параллельность противоположных сторон. В силу условия (*) *достаточно* доказать, что $AB \parallel CD$. 2) Для доказательства параллельности этих прямых *достаточно* доказать, что $\angle CAB = \angle ACD$. 3) Для доказательства равенства углов *достаточно* доказать, что они лежат против равных сторон в равных треугольниках. 4) В силу условия (**) эти углы действительно лежат против равных сторон BC и AD соответственно в треугольниках CAB и ACD. Теперь *достаточно* доказать равенство названных треугольников. 5) Равенство треугольников действительно имеет место, поскольку AC – их общая сторона, $AD = BC$ по условию (**), а из условия (*) следует, что $\angle ACB = \angle CAD$.

Заметим, что шаг 5 является чисто синтетическим, а шаги 1 и 4 – частично синтетическими, поскольку все они используют условия теоремы.

Доказательство 3 (*нисходящий анализ, логическая схема* (2)). 1) Если допустить, что $ABCD$ – параллелограмм, то получим, что $CB \parallel AD$ и $AB \parallel CD$. 2) Из параллельности сторон следует, что $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle ACD = \angle CAB$. 3) По признаку равенства треугольников получаем, что $\Delta ACB = \Delta CAD$. 4) Отсюда следует, в частности, что $CB = AD$ и $\angle ACB = \angle CAD$. 5) Сохраняя первое утверждение и преобразуя второе, получим, что $CB = AD$ и $CB \parallel AD$, то есть *мы пришли к условию теоремы. Теперь проверим, обратимы ли все шаги наших рассуждений.* 6) Из соотношений $CB = AD$ и $CB \parallel AD$ следует, что $CB = AD$ и $\angle ACB = \angle CAD$. 7) По признаку равенства треугольников получаем, что $\Delta ACB = \Delta CAD$. 8) Из равенства треугольников следует, что $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle ACD = \angle CAB$. 9) Из последних соотношений следует, что $CB \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, а это и означает, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Заметим, что шаги 6–9 можно считать синтетическими, так как они представляют собой преобразование условий теоремы.

Пример 2. Каждое из приведенных доказательств можно преобразовать так, чтобы оно приобрело логическую структуру (3), соответствующую нисходящему анализу. Дело в том, что все используемые теоремы – признаки параллельности прямых и признаки равенства треугольников – являются критериями, поэтому в доказательствах можно просто обратить все стрелки.

Полезно обсудить сравнительные достоинства трех доказательств. Первое из них кратко и понятно, однако остается неясным, каким образом возникла *последовательность* рассуждений. Второе несколько сложнее и требует опыта подбора достаточных условий, но зато все шаги имеют хорошее логическое и психологическое обоснование. Третье доказательство существенно длиннее первых двух, но зато дает больше, чем требуется в упражнении. Действительно, мы доказали *критерий* «параллелограммности», то есть необходимое и достаточное условие, а не просто признак, который является достаточным условием.

7.2. Индукция и дедукция

Дедукция – логическое умозаключение от общего к частному, от общих суждений к частным или другим общим выводам. *Дедуктивный метод* – способ исследования, изложения, при котором частные положения логически выводятся из общих положений (из аксиом, постулатов, правил, законов).

Индукция – логическое умозаключение от частных, единичных случаев к общему выводу, от отдельных фактов к обобщениям. *Индуктивный метод* – способ исследования, изложения, при помощи которого от наблюдений частных фактов, от экспериментальных данных переходят к установлению общих положений, принципов и законов.

Неполная индукция – умозаключение, логический прием мышления, в результате которого информация о *некоторых* элементах множества распространяется на *все* элементы множества или на множество *в целом*.

Полная индукция – умозаключение, логический прием, при котором вывод о свойствах множества *в целом* делается на основании рассмотрения *всех* элементов множества.

Принцип математической индукции. Пусть дана последовательность математических утверждений $P(1)$, $P(2),\cdots$, $P(n),\cdots$, занумерованных натуральным параметром n. Пусть эта последовательность обладает двумя свойствами:

1) для некоторого r утверждение $P(r)$ истинно;

2) для любого натурального $n \geq r$ из истинности утверждений $P(k)$ при $r \leq k \leq n$ следует истинность утверждения $P(n+1)$.

Тогда утверждения $P(n)$ верны при всех $n \geq r$.

Пример 1 (дедукция). Докажите, что $\ln \pi + \log_{\pi} e > 2$.

Решение. Известно неравенство, связывающее два взаимно обратных положительных числа: $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$. При этом равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = 1$. Известно также, что $\log_v u = (\log_u v)^{-1}$. Если в неравенстве сделать замену переменных $a = \ln \pi$ и учесть, что $\ln \pi \neq 1$, то из этого неравенства получим требуемое. Итак, из двух известных фактов мы вывели третий.

Пример 2 (неполная индукция; верное умозаключение). Один из ярких примеров неполной индукции встречается в начальной школе. Дети проводят вычисления и видят, что 3 + 5 =5 + 3, 4 + 2 = 2 + 4 и т.п. После нескольких примеров такого типа, количество которых зависит от конкретных условий педагогического процесса в данном классе, они делают вывод, что для любых чисел верно равенство $a + b = b + a$.

Пример 3 (неполная индукция; неверное умозаключение). Если рассмотреть многочлен $f(n) = n^2 - n + 41$, зависящий от натурального параметра n, то нетрудно видеть, что числа $f(1)$, $f(2),\ldots$, $f(30)$ являются простыми. Можно предположить, что простыми являются следующие числа этого ряда, то есть $f(31)$ и $f(32)$. Это действительно так, более того, последующие числа

$f(33)$, $f(34),\ldots$, $f(40)$ тоже являются простыми. Можно предположить, что для всех натуральных n число $f(n)$ является простым. Между тем, это неверно, что показывает вычисление числа $f(41) = 41^2$.

Два предыдущих примера показывают, что умозаключения, сделанные на основе неполной индукции, могут быть как верными, так и неверными, следовательно, метод неполной индукции следует применять с большой осторожностью.

Пример 4 (полная индукция). Докажите, что для любых вещественных чисел справедливо неравенство $|a+b| \le |a| + |b|$.

Идея решения. 1) Докажите неравенство для случая, когда хотя бы одно из слагаемых равно нулю. 2) Докажите неравенство для случая, когда оба слагаемые положительны. 3) Докажите неравенство для случая, когда оба слагаемые отрицательны. 4) Докажите неравенство для случая, когда одно слагаемое положительно, а другое отрицательно. Эти четыре ситуации представляют собой перечень *всех* возможных сочетаний знаков.

Пример 5 (математическая индукция). Докажите, что все числа вида $x_n = 8^n - 1$ делятся на 7.

Решение. 1) При $n = 1$ утверждение справедливо, поскольку $x_1 = 7$. 2) Предположим, что утверждение справедливо при $n = k$, то есть, что число $x_k = 8^k - 1$ делится на 7. 3) Рассмотрим число x_{k+1} и преобразуем его:

$$x_{k+1} = 8^{k+1} - 1 = 8^{k+1} - 8 + 7 = 8(8^k - 1) - 7.$$

Выражение в круглых скобках делится на 7 по предположению индукции (пункт 2), число 7 также делится на 7, поэтому число x_{k+1} делится на 7. Согласно принципу математической индукции для всех натуральных n число вида $x_n = 8^n - 1$ делится на 7.

Правила дедуктивных умозаключений будут описаны в следующем разделе.

7.3. Правила логического вывода

Умозаключение, наряду с понятием и суждением, принадлежит к числу важнейших объектов изучения традиционной логики. Умозаключение представляет собой мыслительный процесс получения нового знания, выраженного в суждениях, из других знаний, также выраженных в суждениях. Исходные суждения называются *посылками* умозаключения, а получаемое суждение – *заключением* или *следствием*. Таким образом, посредством умозаключений мы получаем приращение знаний об окружающей нас действительности, не обращаясь к исследованию предметов и явлений самой действительности. Очевидно, однако, что процесс «переработки» посылок в следствия не может быть произвольным, а должен подчиняться некоторым строго обоснованным правилам. Такие правила называются правилами вывода.

Ниже мы рассмотрим некоторые правила дедуктивных умозаключений, формализуемые в логике высказываний. При этом следует учитывать ряд обстоятельств. Во-первых, мы рассмотрим только шесть правил вывода, которые, с точки зрения авторов, наиболее важны для математики. Полный список правил вывода существенно шире. Например, в книге [5, гл.4] приведено 26 правил вывода. Во-вторых, мы изложим их не в традиционной для курса логики форме, а выразим их в виде теорем. Для читателя полезно сопоставить разные точки зрения. В-третьих, существуют правила вывода, формализуемые в логике одноместных предикатов, или, другими словами, в логике свойств. Эту формализацию правил дедуктивных умозаключений мы опустим.

Теорема 1 (Правило условного силлогизма). Если высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$ оба истинны, то высказывание $A \Rightarrow C$ также является истинным.

Доказательство. Составим таблицу истинности, включив в нее высказывания *A, B,* и *C* и три импликации, фигурирующие в условии задачи:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Одновременная истинность импликаций $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$ имеет место в первой, второй, четвертой и восьмой строках, которые выделены жирной рамкой. Последний столбец таблицы показывает, что в этих случаях импликация $A \Rightarrow C$ также истинна, что и доказывает правило силлогизма.

В связи с доказанной теоремой можно дать следующую рекомендацию: для доказательства теоремы $A \Rightarrow C$ нужно (достаточно) доказать две другие теоремы: $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$. Возможно, что каждая из двух вспомогательных теорем доказывается существенно легче, чем требуемая теорема.

В дальнейшем условимся записывать данную теорему и теоремы подобного типа в сокращенном виде:

$$\frac{A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

Здесь над чертой записаны истинные высказывания, а под чертой – то высказывание, истинность которого обоснована правилом вывода.

Пример 1.

Если четырехугольник является параллелограммом, то точка пересечения его диагоналей делит их пополам.

Если точка пересечения диагоналей четырехугольника делит их пополам, то четырехугольник обладает центральной симметрией.

Если четырехугольник является параллелограммом, то он обладает центральной симметрией.

Теорема 2 (Правило заключения, или Утверждающий модус).

$$\frac{A, \quad A \Rightarrow B}{B}$$

Формульная запись означает следующее: если истинны высказывания A и $A \Rightarrow B$, то высказывание B тоже является истинным.

Доказательство этой теоремы, как и других подобных теорем, осуществляется методом таблиц истинности.

Пример 2.

Сумма цифр числа 256872 делится на 3.
Если сумма цифр числа делится на 3, то само число делится на 3.

Число 256872 делится на 3.

Теорема 3 (Правило отрицания, или Отрицающий модус).

$$\frac{A \Rightarrow B,\ \overline{B}}{\overline{A}}$$

Пример 3.

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
Треугольники ΔABC и $\Delta A'B'C'$ не являются подобными.

В ΔABC нет двух углов, которые были бы равны двум углам $\Delta A'B'C'$.

Теорема 4 (Правило разбора случаев, или Простая конструктивная дилемма).

$$\frac{A \Rightarrow C,\ \ B \Rightarrow C}{A \vee B \Rightarrow C}$$

Пример 4.

Если два числа положительны, то произведение чисел положительно.
Если два числа отрицательны, то произведение чисел положительно.

Произведение чисел одинакового знака положительно.

Теорема 5 (Метод доказательства от противного).

$$\frac{A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}}{A \Rightarrow B} \qquad \frac{A \wedge \overline{B} \Rightarrow B}{A \Rightarrow B} \qquad \frac{A \wedge \overline{B} \Rightarrow C \wedge \overline{C}}{A \Rightarrow B}$$

Пример 5. Приведем три теоремы и их схематические доказательства, соответствующие трем модификациям метода от противного.

а) Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис плоскости (A), то координаты вектора $\overline{x}$ определяются единственным образом (B). Допустим, что координаты определяются не единственным образом ($\overline{B}$). Тогда имеют место два равенства, $\overline{x} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ и $\overline{x} = \alpha'\overline{a} + \beta'\overline{b}$, где $\left[\begin{array}{l}\alpha - \alpha' \neq 0\\ \beta - \beta' \neq 0\end{array}\right.$. Вычтя из первого равенства второе, получим, что $(\alpha - \alpha')\overline{a} + (\beta - \beta')\overline{b} = \overline{0}$. Отличие от нуля хотя бы одного из коэффициентов означает, что векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ линейно зависимы и, следовательно, не образуют базис плоскости ($\overline{A}$).

б) Если множество состоит из простых чисел (A), то оно бесконечно (B). Допустим, что оно состоит из конечного числа элементов ($\overline{B}$). Докажем, что в него можно включить еще одно простое число, а затем еще одно, еще одно и т.д. до бесконечности (B). Для этого на первом шаге искомое число строится как сумма единицы с произведением всех чисел, содержащихся во множестве B, а затем построение числа повторяется.

в) Если на плоскости две прямые перпендикулярны третьей (A), то они параллельны (B). Допустим, что они не параллельны ($\overline{B}$). Тогда окажется, что из точки их пересечения к третьей прямой проведены *два* перпендикуляра ($\overline{C}$), в то время как известно, что из точки можно провести *только один* перпендикуляр к прямой (C).

Теорема 6 (Правило контрапозиции).

$$\frac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$

Пример 6.

Если радиус окружности проведен в точку касания окружности и прямой, то он перпендикулярен этой прямой.

Если радиус окружности не перпендикулярен касательной к окружности, то он проведен не в точку касания.

Существенно более полная информация о правилах вывода содержится, например, в книгах [1] и [5, гл. 4].

7.4. Конкретизация, обобщение и абстрагирование

В рамках данного пособия используется следующая терминология.

Конкретизацией называется логический прием, состоящий в переходе от более общего к менее общему или от общего к единичному. (Наряду с термином «конкретизация», в литературе используется равносильный ему термин «специализация».)

Обобщением называется логический прием, состоящий в переходе от единичного к общему или от менее общему к более общему.

Абстрагированием называется логический прием, состоящий в *отделении* общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных или необщих свойств рассматриваемых предметов или отношений и *отбрасывании* последних.

Из приведенных определений видно, что описанные логические приемы тесно связаны друг с другом и существуют только в неразрывном взаимодействии. Так, обобщение и конкретизация действуют, образно говоря, в «противоположных направлениях», а абстрагирование неотделимо от обобщения. Суть данных приемов может быть проиллюстрирована и выявлена в процессе решения задач.

Пример 1. Известна теорема Пифагора: если треугольник прямоуголен, то квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Другими словами, верно равенство $c^2 = a^2 + b^2$. *Обобщением* этого факта является теорема косинусов: для сторон треугольника, в частности для самой длинной стороны c, выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Эта общая формула имеет несколько *конкретизаций*. Во-первых, и это очевидно, из нее получается теорема Пифагора. Для этого достаточно положить $C = \pi/2$. Во-вторых, из нее вытекает неравенство, связывающее стороны остроугольного треугольника: $c^2 < a^2 + b^2$. Для доказательства достаточно учесть, что $0 < C < \pi/2$, и сравнить выражения $a^2 + b^2$ и $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. В-третьих, из нее вытекает неравенство, связывающее стороны тупоугольного треугольника: $c^2 > a^2 + b^2$. Для доказательства достаточно учесть, что $\pi/2 < C < \pi$, и сравнить выражения $a^2 + b^2$ и $a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Пример 2. Школьникам известны формулы сокращенного умножения, с помощью которых можно вычислить квадрат суммы двух чисел и куб суммы двух чисел. *Обобщением* этих соотношений является формула бинома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$. Эта общая формула имеет несколько *конкретизаций*. Во-первых, если положить $a = b = 1$, то получим, что $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, то есть мы найдем сумму биномиальных коэффициентов. Во-вторых, если положить $a = 1$ и $b = -1$, то формула примет вид $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$. Отсюда следует, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Пример 3. Формула бинома Ньютона верна для любых вещественных чисел a и b. Мы можем *абстрагироваться* от некоторых свойств системы вещественных чисел (например, от ее непрерывности) и доказать, что формула верна для любых полей (например, для поля комплексных чисел или для поля классов вычетов по простому модулю). Мы можем *абстрагироваться* от некоторых свойств поля (например, от обратимости ненулевых элементов) и доказать, что формула верна для любых коммутативных колец (например, для кольца целых чисел или для кольца многочленов). Однако мы не можем абстрагироваться от свойства коммутативности кольца, поскольку для некоммутативных колец формула бинома Ньютона перестает быть истинной. Попробуйте, например, вычислить $(A+B)^2$ для квадратных матриц A и B.

Пример 4. Многочисленные примеры абстрагирования дает математический анализ. Так, абстрагируясь от конкретных свойств большого числа физических задач, мы приходим к фундаментальным понятиям математики: производная функции, определенный интеграл, дифференциальное уравнение. Рекомендуем перечитать соответствующие главы учебников по математическому анализу.

7.5. Аналогия

Аналогия – это умозаключение, в котором на основе сходства объектов в некоторых свойствах и отношениях высказывается суждение о сходстве этих объектов в других свойствах и отношениях.

Схема *умозаключения по аналогии* выглядит следующим образом:

Объект A обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y$.
Объект B обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Вероятно, объект B обладает свойством Y.

Пример 1. Известно, что на плоскости все точки серединного перпендикуляра к отрезку, и только они, равноудалены от концов отрезка. Пространственный аналог этого утверждения таков: если отрезок расположен в пространстве, то множество точек, равноудаленных от концов отрезка, представляет собой плоскость, перпендикулярную к отрезку и проходящую через его середину.

Два аналогичных утверждения этого примера сформулированы в нарочито разных стилях. Переформулируйте их так, чтобы в максимальной степени выявить аналогию между ними.

Пример 2. Свойство параллельности прямых в пространстве и свойство подобия треугольников аналогичны друг другу. Действительно, прямая параллельна сама себе (рефлексивность). Если первая прямая параллельна второй, то вторая параллельна первой (симметричность). Если первая прямая параллельна второй, а вторая параллельна третьей, то первая прямая параллельна третьей (транзитивность). Подобие треугольников обладает *теми же* свойствами.

Интересно, что школьный курс математики насыщен примерами взаимосвязей между фигурами, которые обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Кроме параллельности прямых и подобия треугольников, этими свойствами обладают параллельность плоскостей, сонаправленность лучей, конгруэнтность треугольников, гомотетичность треугольников относительно общего центра, равенство (чисел, векторов, функций), равносильность уравнений, равносильность систем уравнений.

7.6. Сравнение

Сравнение – это мыслительная операция, метод познания, состоящий в установлении сходных/различных свойств в предметах и явлениях.

Глубокое, полноценное сравнение объектов должно выявлять как сходные, так и различные свойства объектов, те и другие в возможно большем количестве.

Нахождение признаков сходства сравниваемых объектов называется ***сопоставлением,*** а нахождение признаков различия – ***противопоставлением.***

Пример. Если сравнивать треугольник и трапецию, то, прежде всего, в глаза бросаются *отличия* этих фигур друг от друга. У них разное количество сторон, разное количество вершин. У треугольника нет диагоналей, а у трапеции есть. Окружность можно вписать в любой треугольник, но далеко не в любую трапецию. Окружность можно описать около любого треугольника, а в отношении трапеций это утверждение неверно. Однако более подробный анализ выявляет *сходство* этих фигур. Боковые стороны каждой из фигур равны тогда и только тогда, когда равны углы при основаниях. Средняя линия в обоих случаях параллельна основанию. Длина средней линии в обоих случаях равна полусумме оснований (при этом одна сторона треугольника считается равной нулю). Площадь фигуры в обоих случаях равна произведению средней линии на высоту. Обе фигуры являются выпуклыми многоугольниками. Если треугольник и трапецию считать графами с тремя и четырьмя вершинами соответственно, то оба графа имеют одинаковую эйлерову характеристику, равную двум. Если считать, что треугольник и трапеция – это часть плоскости, то с точки зрения топологии обе фигуры являются связными, односвязными, линейно связными пространствами.

7.7. Систематизация и классификация

Определение 1. Пусть во множестве A математических объектов выделено тем или иным способом некоторое *подмножество B*. В этом случае будем говорить, что во множестве A выделены объекты специального ***типа.***

Пример 1. Во множестве движений плоскости можно выделить подмножество параллельных переносов. Другими словами, параллельный перенос является движением специального типа.

Определение 2. Пусть во множестве A математических объектов выделена *система подмножеств*. В этом случае можно сказать, что во множестве A выделены объекты нескольких специальных типов. Перечень этих типов будем называть ***типологией.***

Пример 2. Во множестве движений плоскости можно выделить следующие подмножества: подмножество параллельных переносов, подмножество осевых симметрий, подмножество центральных симметрий, подмножество поворотов на различные углы, подмножество скользящих симметрий. Другими словами, типология движений такова: параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, скользящая симметрия.

Определение 3. ***Классификацией*** математических объектов из множества A называется разбиение множества A на классы, то есть выделение семейства подмножеств, обладающего следующими свойствами: 1) каждое из подмножеств семейства не пусто; 2) каждый объект из множества A попадает хотя бы в одно из подмножеств семейства; 3) два различных подмножества семейства не имеют общих элементов.

Пример 3. Примитивная типология из примера 1 не является классификацией, поскольку существуют движения, отличные от параллельного переноса. Типология из примера 2 также не является классификацией, но совсем по другой причине: поворот на угол 180° является центральной симметрией. Если убрать центральную симметрию из списка примера 2, то получим следующую классификацию движений: параллельный перенос, осевая симметрия, поворот, скользящая симметрия.

Существуют другие точки зрения на понятие классификации, которые отражают другие математические реалии, отличные от вышеописанных.

Определение 4. ***Дихотомической классификацией*** называют разбиение множества на два класса с помощью некоторого свойства.

Пример 4. а) Вещественные числа делятся на рациональные и иррациональные. б) Квадратные матрицы делятся на обратимые и необратимые. Таким образом, членами дихотомической классификации являются противоречащие друг другу понятия.

Определение 5. **М*ногоступенчатой дихотомической классификацией*** называется многократное разбиение множества на два класса с помощью некоторого свойства.

Пример 5. а) Треугольники делятся на разносторонние и равнобедренные. В свою очередь равнобедренные треугольники делятся на равносторонние и неравносторонние. Здесь основанием для деления является равенство или неравенство длин некоторых сторон треугольника. б) Уравнения делятся на совместные и несовместные. В свою очередь совместные уравнения делятся на определенные (то есть имеющие единственное решение) и неопределенные. Здесь основанием для деления является количество решений уравнения.

Определение 6. ***Последовательной классификацией*** называется результат последовательного применения двух классификаций с *разными* основаниями.

Пример 6. Последовательная классификация параллелограммов выглядит следующим образом:

По сторонам / **По углам**	**Ромбы**	**Не ромбы**
Прямоугольники	Квадраты	Прямоугольники с разными сторонами
Не прямоугольники	Ромбы с непрямыми углами	Параллелограммы общего вида

8. Понятие, суждение, умозаключение и их отражение в математике

Понятие – это форма абстрактного мышления, результат обобщения свойств единичных конкретных предметов/явлений и выделения в них существенных признаков.

В каждом понятии различают содержание (совокупность существенных признаков предмета) и объем (множество предметов, каждому из которых принадлежат все признаки, относящиеся к содержанию).

Пример 1. Натуральное число называется ***четным***, если оно делится на 2 нацело. Здесь содержание понятия – это делимость на 2 нацело. Объем понятия – это множество чисел 2, 4, 6, 8, …

Суждение – это форма абстрактного мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о существовании предметов, связях между предметом и его свойствами или об отношениях между предметами.

Суждение как форма абстрактного мышления является весьма сложным объектом. Его можно анализировать, в частности классифицировать, с самых различных точек зрения. Приведем объединенную классификацию суждений по количеству и качеству.

Суждение называется ***общеутвердительным***, если оно имеет структуру «Все S суть P». Например: «Для любых двух вещественных чисел справедливо неравенство $|a+b| \le |a| + |b|$».

Суждение называется ***частноутвердительным***, если оно имеет структуру «Некоторые S есть P». Например: «Для некоторых вещественных чисел справедливо равенство $|a|=-a$».

Суждение называется ***общеотрицательным***, если оно имеет структуру «Ни одно S не есть P». Например: «Ни одно положительное число не удовлетворяет неравенству $a+\frac{1}{a}<2$».

Суждение называется ***частноотрицательным***, если оно имеет структуру «Некоторые S не есть P». Например: «Некоторые вещественные числа не удовлетворяют неравенству $a+\frac{1}{a}\geq 2$». (Таково, например, число -5.)

Умозаключение – это форма абстрактного мышления, в которой из одного или нескольких суждений получается новое суждение, с необходимостью или определенной степенью вероятности следующее из них.

Общенаучные термины «понятие», «суждение» и «умозаключение» имеют свои проявления в математике (рис. 4). Дадим их краткие описания.

Основные неопределяемые понятия используются при аксиоматическом построении математической теории. Например, при построении аксиоматики Гильберта евклидовой геометрии основными неопределяемыми понятиями являются точка и прямая. При построении аксиоматики Вейля евклидовой геометрии такими понятиями являются точка и вектор. За исключением основных неопределяемых понятий остальные понятия математики являются *определяемыми*. О них будет рассказано в разделах 9 и 10.

Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно утверждать, истинно оно или ложно. Например, предложение «Москва является столицей России» является истинным высказыванием. Предложение «Число π рационально» также является высказыванием, хотя и ложным. Предложение «Который час?» не является высказыванием, поскольку не является повествовательным. Высказывания подробно изучаются в курсе математической логики; несколько менее подробно они изучаются в курсе алгебры.

Аксиома – это основное положение, самоочевидный принцип. В дедуктивных научных теориях аксиомами называются основные положения той или иной теории, из которых путем дедукции, то есть чисто логическими средствами, извлекается все остальное ее содержание. Например, одна из аксиом евклидовой геометрии такова: «Для любых двух различных точек существует и единственна прямая, инцидентная им». Очевидно, что в этом утверждении содер-

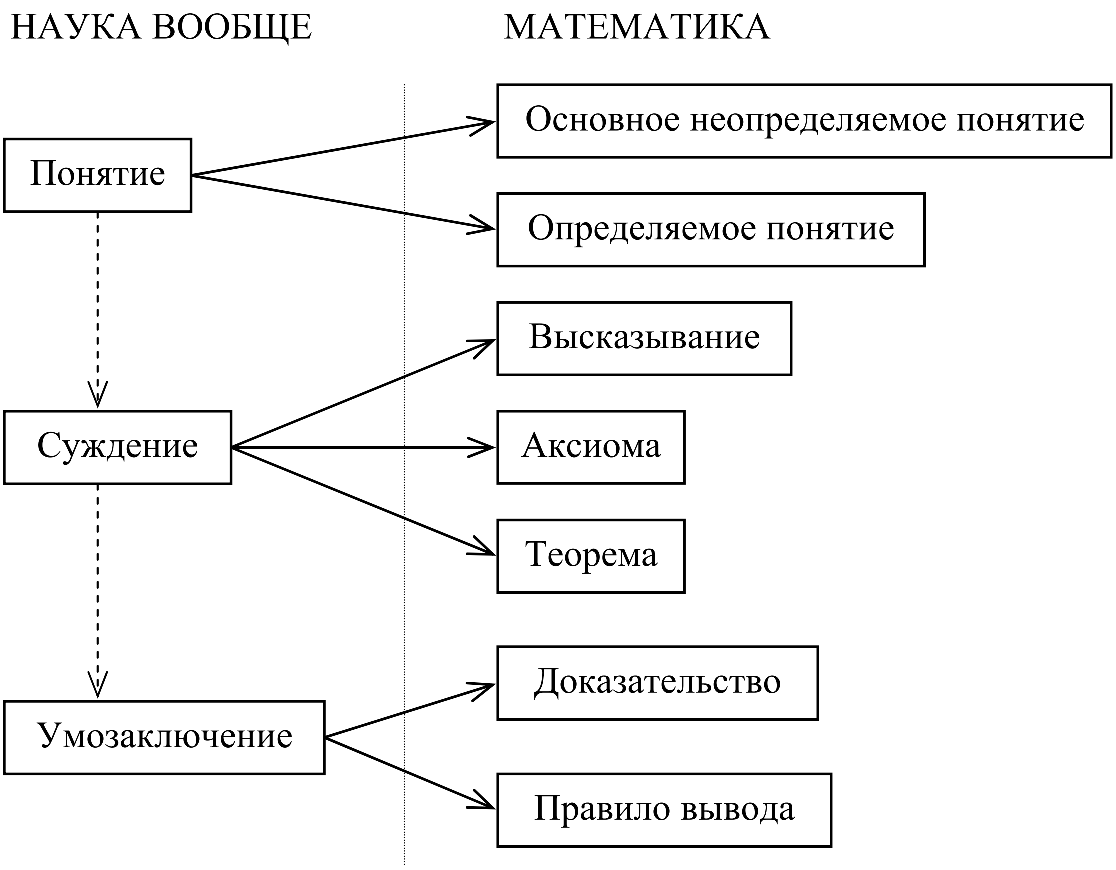


Рис. 4.

жится суждение о точках, прямых и особой связи между ними – инцидентности.

Теорема – это математическое утверждение, истинность которого установлена путем доказательства. Теорема отличается от высказывания тем, что она «обязана» быть истинной. В то же время истинность вовсе не делает высказывание теоремой. Вопрос о том, принадлежит ли истинное высказывание к классу теорем, можно ставить только в том случае, когда высказывание сформулировано на языке математической теории, состоит из математических и логических терминов и не содержит других терминов. Парадоксальный пример: «Если Москва – столица России, то число π иррационально». Это высказывание является истинным, поскольку оно имеет вид импликации, у которой истинны и посылка, и заключение. Оно не является теоремой, поскольку содержит два термина из политической географии – «Москва» и «Россия». Кстати, это высказывание не относится и к политической географии.

Вопрос о принадлежности высказывания к классу теорем может оказаться чрезвычайно сложным. Переформулируем в форме высказывания одно из мнений, которое длительное время господствовало среди математиков: «Пятый постулат Евклида может быть выведен из остальных аксиом Евклида в качестве логического следствия». Потребовалось примерно две с половиной тысячи лет, чтобы опровергнуть это утверждение.

Доказательство – это рассуждение по определенным правилам, обосновывающее какое-либо предложение (утверждение, теорему). Основанием доказательства служат исходные утверждения (аксиомы). Конкретное доказательство не обязательно начинается с аксиом, оно может опираться на ранее доказанные предложения. Правила, по которым ведутся рассуждения, а также методы доказательств изучает логика.

Правило вывода – способ рассуждения, с помощью которого из нескольких истинных высказываний можно получить новое истинное высказывание. Правила вывода являются предметом изучения математической логики. Более подробно о правилах вывода было рассказано в разделе 7.3.

9. Математическое понятие и его определение

Способы определения математических понятий. В разделе 8 были введены общенаучные термины «понятие», «содержание понятия», «объем понятия». Обсудим их применительно к математике и начнем наше обсуждение с описания способов определения математических понятий. Сразу оговоримся: в научно-методической литературе нет единого подхода к классификации способов определения математических понятий. Тем не менее, некоторые способы можно выделить достаточно отчетливо.

1. ***Указание рода и видовых отличий*** является одним из наиболее распространенных способов определения математических понятий, а быть может, и самым распространенным. Знакомство с ним начнем с анализа двух определений из различных разделов математики.

Средней линией треугольника называется *отрезок*, который соединяет середины двух его сторон.

Корнем уравнения называется *число*, которое при подстановке вместо неизвестного обращает уравнение в верное числовое равенство.

У этих двух определений, совершенно *не связанных* друг с другом, выявляется *общая* структура, поскольку каждое из них содержит следующее:

- определяемый термин (жирный курсив);
- связующее слово «называется»;
- определяющий термин, выбранный из некоторого множества (курсив);
- отличительное свойство определяющего термина (подчеркнутый шрифт).

Говоря языком теории множеств, мы называем множество, которому принадлежит определяющий термин, и выделяем из него подмножество путем указания некоторого отличительного свойства.

Логическая структура приведенных и им подобных определений может быть записана в следующем виде:

$$x \in B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ P(x) \end{cases}.$$

Прочтение этой структуры, быть может несколько утяжеленное по сравнению с привычным, таково: объект x принадлежит *виду* B тогда и только тогда, когда он принадлежит ближайшему *роду* A и обладает свойством P – *видовым отли-*

чием. Например, объект является параллелограммом тогда и только тогда, когда он является четырехугольником, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Структура текста приведенных и им подобных определений изображена на рис. 5.

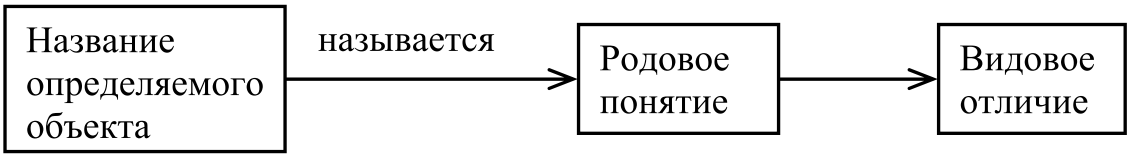


Рис. 5

2. ***Конструктивный способ*** определения понятий, называемый также генетическим, состоит в том, что указывается способ построения объекта или его происхождение.

Примеры. 1) Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки.

2) Во многих учебниках геометрии понятие цилиндрической поверхности также является конструктивным.

3. ***Индуктивные определения*** применяются в тех случаях, когда определяемым объектом является *последовательность*, причем каждый член этой последовательности, начиная с некоторого, представляет собой функцию одного или нескольких предыдущих членов.

Примеры. 1) Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

2) Аналогично дается определение арифметической прогрессии.

3) По определению $1!=1$ и $n!=(n-1)!\cdot n$.

4. ***Определения-соглашения*** применяются в тех случаях, когда они нужны для единообразного использования формул.

Примеры. 1) Для того, чтобы формулы $a^{n}:a^k=a^{n-k}$ и $a^n a^k=a^{n+k}$ можно было применить к любым целым числам n и k, необходимы и полезны два определения-соглашения: $a^0=1$ и $a^{-n}=1:a^n$ при $a\neq 0$ и натуральном n.

2) Биномиальные коэффициенты вычисляются по формулам $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Для того, чтобы эта формула была справедлива при $k=0$ и $k=n$, нам необходимо определение-соглашение $0!=1$.

5. ***Косвенное определение*** понятий используется в тех случаях, когда понятия выступают как первичные, а связи между ними описываются системой аксиом (отсюда другое название данного способа определения – аксиоматический).

Примеры. 1) При аксиоматическом построении курса геометрии по Гильберту первичными понятиями выступают точка, прямая и плоскость, а основными связями – инцидентность, конгруэнтность и отношение «лежать между». Тексты аксиом представляют собой косвенное определение этих понятий.

2) В школьном курсе геометрии аксиоматически определены понятия длины, площади и объема.

3) В вузовском курсе математики многие объекты определены аксиоматически. Таковы, например, определения группы, кольца, векторного пространства.

Следует подчеркнуть, что косвенное определение приобретает смысл только после того, как доказано существование объекта, удовлетворяющего системе аксиом. Например, при аксиоматическом построении геометрии необходимо построить модель системы аксиом, а при построении теории групп необходимо привести примеры групп, возможно более многочисленные.

6. ***Описательные определения*** часто встречаются на начальных этапах изучения математики, когда строгие определения вводить невозможно или нецелесообразно, однако необходимо дать учащимся достаточно точные представления об изучаемом объекте.

Примеры. В школьном курсе геометрии даются описательные определения луча, биссектрисы угла, призмы, угла между векторами. В курсе алгебры к описательным определениям относится понятие натуральной степени числа.

Отметим, что приведенный перечень способов формулировки математических определений *не является их классификацией.* Во-первых, существуют другие способы определения понятий, не входящие в приведенный список. Впрочем, в школьной практике они встречаются не часто. Во-вторых, существуют понятия, метод введения которых можно трактовать одновременно с разных точек зрения. Так, определение натуральной степени числа очевидным способом относится к классу определений-соглашений. При этом на начальном этапе оно вводится описательно, однако впоследствии может быть введено индуктивно с помощью рекуррентных соотношений $a^1 = a$ и $a^n = a^{n-1} \cdot a$ при $n > 1$.

Требования, предъявляемые к определениям. Определения математических понятий не формулируются произвольно, а подчиняются определенным требованиям. *Безусловные требования* таковы.

1. В определении должны быть признаки, необходимые и достаточные для того, чтобы отличить определяемое понятие от всех других понятий.
2. Определение не должно содержать ссылок на еще не определенные понятия.
3. Определение не должно содержать порочного логического круга. (Пример: прямым углом называется угол, стороны которого перпендикулярны; стороны называются перпендикулярными, если угол между ними является прямым.)
4. При введении с помощью определений *системы* понятий нельзя использовать один и тот же термин в разных смыслах.

Как правило, к определениям предъявляют требование *эстетической* природы: определение должно быть минимальным, то есть не должно содержать излишних видовых отличий. Впрочем, от этого требования иногда отходят из соображений удобства для учащихся. Так, прямоугольником называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

И логика, и психология требуют, чтобы определение понятия сопровождалось как примерами объектов, удовлетворяющих понятию, так и примерами объектов, не удовлетворяющих ему. Примеры первого типа показывают, что объем изучаемого понятия не пуст, а примеры второго типа – что в объеме родового понятия действительно выделены объекты специального вида.

О терминах «видовой» и «родовой». Уточним использование терминов «видовой» и «родовой». Если объем одного понятия входит в объем другого понятия, то первое понятие будем называть видовым по отношению ко второму, а второе – родовым по отношению к первому. Например, объем понятия «равносторонний треугольник» является частью объема понятия «треугольник», поэтому понятие «равносторонний треугольник» является видовым для понятия «треугольник», а понятие «треугольник» – родовым для понятия «равносторонний треугольник».

Важно отметить, что термины «видовое понятие» и «родовое понятие» не употребляются в абсолютном значении. Они имеют смысл только в тех случаях, когда обсуждаются *два* понятия, причем такие, объемы которых связаны отношением включения. Так, понятие целого числа является родовым по отношению к понятию натурального числа, и оно же является видовым по отношению к понятию рационального числа. Другой пример, нарочито парадоксальный: обсуждая понятия рационального числа и параллелограмма, бессмысленно говорить о родовидовых отношениях между понятиями, поскольку объемы этих понятий не пересекаются.

Свойства и характеристические свойства понятия. Из определения понятия всегда можно извлечь некоторые необходимые следствия, которые называются свойствами понятия. Так, параллелограмм обладает длинным списком свойств: 1) противоположные стороны равны; 2) противоположные углы равны; 3) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника; 4) диагонали в точке пересечения делятся пополам; 5) параллелограмм имеет центр симметрии; и т.д.

Необходимые следствия определения можно назвать существенными свойствами понятия в следующем смысле: если объект не обладает хотя бы одним свойством из числа необходимых следствий определения, то он не принадлежит объему понятия. Так, если у четырехугольника не равны противоположные углы, то это не параллелограмм.

Достаточно часто бывает, что понятие можно определить разными способами. Опишем это обстоятельство более подробно.

Свойство (группа свойств) понятия называется ***характеристическим*** (характеристической), если оно (она) достаточно (достаточна) для доказательства каждого из видовых отличий понятия. Очевидно, что характеристическое свойство понятия может быть положено в основу другого способа его определения, эквивалентного первоначальному способу.

Пример. 1) Понятие параллельных прямых обладает двумя свойствами: а) если две прямые параллельны, то при пересечении этих прямых третьей прямой внутренние накрест лежащие углы равны; б) если две прямые параллельны, то фигура из этих прямых имеет более двух осей симметрии. Первое свойство является характеристическим, о чем свидетельствует один из признаков параллельности. Второе свойство не является характеристическим, о чем свидетельствует контрпример: две прямые, пересекающиеся под прямым углом, имеют четыре оси симметрии.

2) Понятие средней линии треугольника обладает двумя свойствами: а) средняя линия треугольника параллельна третьей стороне; б) средняя линия треугольника равна половине третьей стороны. Ни одно из этих свойств не является характеристическим для понятия средней линии. Более того, их совокупность также не является характеристическим свойством. Добавим третье свойство: в) концы отрезка лежат на двух первых сторонах треугольника. Группа, состоящая из трех свойств а), б), в), является характеристической. Действительно, если отрезок соединяет точки, лежащие на двух сторонах треугольника, параллелен третьей стороне и равен ее половине, то он является средней линией треугольника.

10. Методика формирования понятий

<u>Общие положения.</u> В формировании математических понятий большую роль играют механизмы математической деятельности, такие как сравнение, анализ, синтез, конкретизация, обобщение, абстрагирование. Уровень сформированности умственных действий зависит от возраста учащихся. В силу этого методика изучения конкретного математического понятия зависит от того, в каком классе изучается данное понятие, в какой мере его восприятие подготовлено жизненным опытом учащихся, велась ли пропедевтика данного понятия в предшествующих классах, насколько сложным является определение понятия, насколько трудным для учащихся является изучаемое понятие.

В процессе формирования понятия *образуются*, *определяются и систематизируются*. Процесс формирования понятия можно разделить на несколько этапов:

1. мотивация изучения понятия;
2. выявление существенных свойств понятия, формулировка определения;
3. использование понятия в конкретных ситуациях;
4. установление связей и отношений нового понятия с другими.

Рассмотрим сущность каждого этапа.

На этапе ***мотивации*** учитель может использовать следующие методические приемы:

- решение задач, подводящих к новому понятию;
- наблюдение и/или проведение практической работы, подготавливающей материал для индуктивных умозаключений, связанных с новым понятием;
- отыскание ярких практических примеров, показывающих важность изучения нового понятия;

- использование исторического материала, раскрывающего истоки развития понятия и способствующего проявлению интереса к новому;
- обзор изученного и показ аналогии в изучении старого и нового материала.

На втором этапе – ***выявление существенных свойств понятия, формулировка определения*** – возможны следующие методические приемы:

- обсуждение свойств математического объекта и выявление существенных свойств понятия, выявление существующих соотношений ближайшего родового понятия и видовых отличий, самостоятельная формулировка определения учащимися;
- введение термина, формулировка определения, введение символьной записи;
- рассмотрение частных и особых случаев, если они имеются;
- рассмотрение упражнений на усвоение понятия.

При конструировании упражнений, направленных на усвоение определения понятия, необходимо исходить из того, что среди них должны быть упражнения на выделение существенных и несущественных признаков понятия; на подведение объекта под понятие; на приведение контрпримеров; на отыскание ошибок в определении.

На третьем этапе – ***использование понятия в конкретной ситуации*** – активно используются упражнения. Среди них должны быть упражнения на выведение следствий из определения понятия; на доказательство равносильности двух различных определений; на переход от определения понятия к его существенным свойствам и наоборот.

На четвертом этапе – ***установление связей и отношений нового понятия с другими*** – проводится включение нового понятия в систему уже существующих понятий; классификация этого понятия; решение упражнений на обобщение понятия, его конкретизацию; составление родословной понятия. (Здесь под родословной понимается сведение изучаемого понятия к основным неопределяемым понятиям.)

Естественно, что не все приведенные этапы формирования нового понятия должны присутствовать при работе с каждым вновь вводимым понятием. По мере того как учащиеся накапливают опыт работы с определениями понятий, умственными действиями, связанными с определением понятий, они будут легче воспринимать те определения, которые сформулированы учителем или прочитаны в учебнике. Поэтому некоторые этапы при работе с понятиями могут опускаться при их изучении с учащимися старших возрастных групп.

<u>Пример формирования конкретного понятия.</u> Проиллюстрируем общие положения о методике формирования на примере понятия осевой симметрии из курса математики шестого класса.

На первом этапе, касающемся мотивации изучения симметрии, полезно провести беседу, базирующуюся на жизненном опыте учащихся. В ней целесообразно показать, что симметрия часто встречается как в природе, так и во многих областях человеческой деятельности – в искусстве, науке, технике и т.д. Чтобы понять, как создаются красивые узоры, здания и проч., надо научиться понимать закономерности симметрий. В математике рассматривают специальные виды симметрий, один из которых – осевая симметрия.

На втором этапе, доводящем учащихся до точной формулировки определения, необходимо отметить, что при построении симметричных фигур важную роль играют основные геометрические фигуры на плоскости – точки и прямые. Можно обратиться к следующей практической работе: перегнуть лист бумаги, выколоть точку, раскрыть лист, отметить линию сгиба, соединить прямой две выколотые точки. Рассмотрев полученный рисунок, учащиеся могут выявить его существенные особенности: 1) линия сгиба – прямая линия l; 2) точки A и A_1 расположены на прямой, перпендикулярной прямой l, по разные стороны от нее; 3) точки A и A_1 расположены на одинаковом расстоянии от прямой l. Теперь учащиеся и логически, и психологически готовы к восприятию формального определения.

Определение. Точка A_1 называется симметричной точке A относительно прямой l, если выполняются два свойства: 1) точки A и A_1 лежат на прямой, перпендикулярной l и пересекающей прямую l в точке O; 2) точки A и A_1 одинаково удалены от этой прямой, то есть $AO = A_1O$. Прямую l называют осью симметрии.

В предложенном определении указан способ построения точки, симметричной данной относительно некоторой прямой, поэтому оно является конструктивным. Важно добиться, чтобы ученики грамотно обосновывали построение точки симметричной данной.

Любая фигура есть множество точек, поэтому следующий шаг – научиться строить фигуры (отрезок, треугольник, произвольный четырехугольник…), симметричные друг другу относительно прямой. Естественным образом возникает следствие: *симметричные фигуры равны*.

Для усвоения определений понятий рассматриваются различные упражнения: на построение симметричных относительно прямой точек и фигур; на подведение под определение. При выполнении упражнений второго типа необходимо выделить существенные свойства понятия, выявленные в определении, а затем проверить их наличие в предлагаемых объектах и сделать соответствующие выводы.

Примеры. 1) Симметричны ли точки A и B, изображенные на рис. 6, относительно прямой p? Свой ответ обоснуйте.

2) Симметричны ли фигуры, изображенные на рис. 7, относительно прямой p?

Выполнение таких заданий способствует как осознанию определения, так и его непроизвольному запоминанию.

Третий этап – использование понятия в конкретных ситуациях при решении задач – проиллюстрируем примерами.

Примеры. 1) Постройте отрезок A_1B_1, симметричный отрезку AB относительно некоторой прямой p, если известно, что точки A и A_1 симметричны относительно этой прямой (рис. 8).

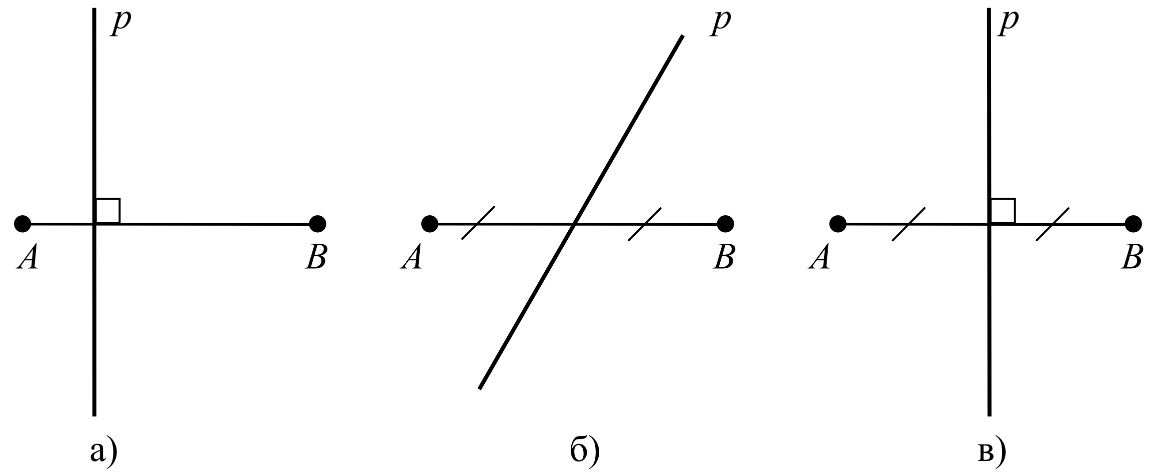


Рис. 6.

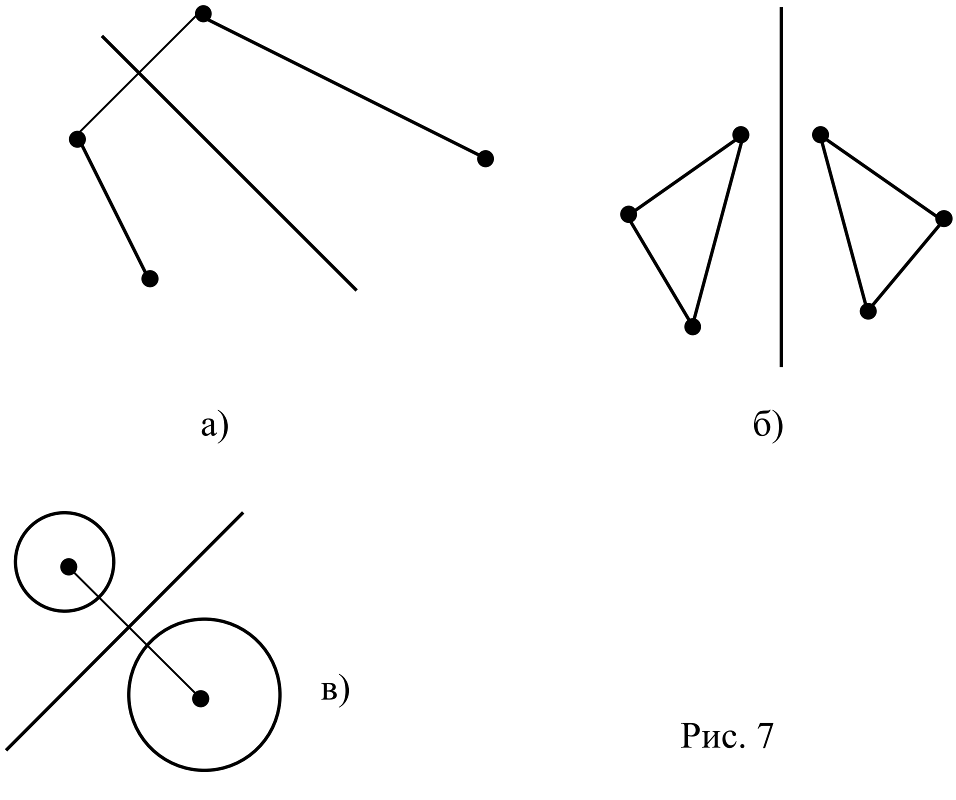
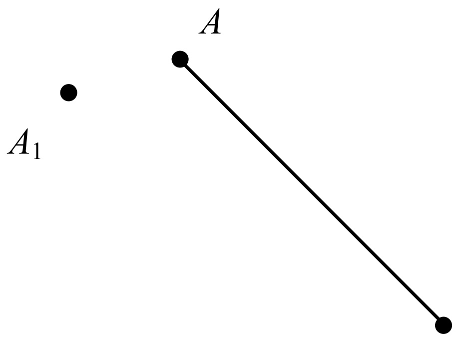
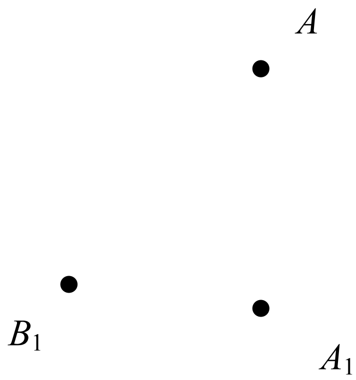


Рис. 7



а)



б)

Рис. 8.

2) Даны две прямые m и n. Постройте прямую, относительно которой они симметричны, если: а) прямые параллельны; б) прямые пересекаются. Сколько решений имеет задача?

Четвертый этап – установление связей и отношений нового понятия с другими – также проиллюстрируем примерами.

Примеры. 1) Можно ли провести прямую, которая разбивает квадрат на две симметричные относительно нее части? Сколькими способами это можно сделать?

2) Ответьте на те же вопросы применительно к окружности; прямоугольнику, не являющемуся квадратом.

Можно также предложить учащимся составить родословную изученного понятия.

О сформированности математического понятия можно судить по тому, какие действия с понятием может выполнять ученик, а именно:

- выделяет понятие среди других;
- знает определение понятия, понимает значение каждого слова входящего в определение, четко выделяет существенные свойства;
- может привести свои примеры объектов, подпадающих под определение;
- может обосновать, почему один объект входит в объем понятия, а другой нет;
- может использовать понятие при решении простейших задач;
- может использовать понятие в неочевидных ситуациях.

Описанный выше метод введения понятия симметрии называется эвристическим. Он способствует активному участию школьников в получении новых знаний, но требует определенных затрат учебного времени. Возможен и другой способ введения нового понятия, когда учитель сам формулирует определение нового понятия без какой-либо дополнительной подготовки. Однако какой бы способ ни выбрал учитель, важно добиться, чтобы учащиеся хорошо усвоили определение и научились применять его к решению задач.

11. Первоначальные сведения о теоремах

Суждения о математических объектах могут быть сформулированы в форме теорем. Простейшие представления о термине «теорема» изложены в разделе 7. Там же приведена объединенная классификация суждений, в частности, теорем, по количеству и качеству: общеутвердительные, частноутвердительные, общеотрицательные, частноотрицательные.

Как каждое сложное явление, множество теорем может изучаться с различных точек зрения. Ниже мы приведем несколько типологий теорем, использующих разные основания. Сразу сделаем две оговорки: а) список оснований, с точки зрения которых вводятся разные типы теорем, может быть расширен или изменен; б) при использовании того или иного основания типологии список типов зачастую тоже может быть расширен. Быть может, отсутствие определенности неудобно для читателя, но такова природа знания в той области, которой посвящена эта книга: при переходе от математики к методике ее преподавания полная однозначность терминов и суждений сменяется на различные трактовки, точки зрения и проч.

Говоря о *роли теорем в структуре математического знания*, целесообразно выделять следующие их типы:

- теоремы существования;
- теоремы-свойства;
- теоремы-формулы.

Теоремой существования называется верное суждение, в котором утверждается существование математического объекта с определенными свойствами.

Пример 1. а) Многочлен степени больше нуля с комплексными коэффициентами имеет корень.

б) Если функция непрерывна на отрезке и ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то существует точка на этом отрезке, в которой функция обращается в нуль.

Приведенные примеры характерны тем, что в процессе доказательства *не дается алгоритм нахождения* числа, наличие которого утверждается. Однако отсутствие алгоритма отнюдь не снижает значения теорем существования, поскольку само наличие того объекта, который вводится с помощью теоремы, часто имеет весьма важные следствия.

Каково бы ни было происхождение математического объекта, следует изучать его свойства. В школьной геометрии это свойства фигур, выражаемые теоремами, а в школьной алгебре – свойства чисел и операций над ними, выражаемые формулами.

Пример 2. а) Любой параллелограмм центрально-симметричен относительно точки пересечения его диагоналей.

б) Для любых вещественных чисел a и b и любого натурального числа n справедлива формула бинома Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

С точки зрения *логики изложения* того или иного раздела математики целесообразно выделять следующие типы теорем:

- основные теоремы;
- теоремы-следствия;
- леммы.

Пример 3. а) Свойство биномиальных коэффициентов, выражаемое формулой $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, практически никогда не рассматривается как самостоятельная теорема. Она легко получается в виде *следствия* из формулы бинома Ньютона, если в этой последней положить $a = b = 1$.

б) Тот факт, что внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, также не рассматривается в качестве самостоятельной теоремы. Он всегда получается как *следствие* из теоремы о том, что сумма углов треугольника равна 180°.

Леммой называется вспомогательное утверждение, необходимое в цепи логических умозаключений для доказательства некоторой теоремы.

Пример 4. а) В одном из учебников геометрии (А. В. Погорелов) в процессе вывода формулы площади прямоугольника используется следующая лемма: площади прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты.

б) В одном из учебников математического анализа (В. А. Зорич) в процессе доказательства существования предела последовательности $x_n = \left(1 + 1/n\right)^n$ в качестве вспомогательного утверждения используется неравенство Бернулли: $(1+h)^n \geq 1 + nh$ при $h > -1$.

Следует отметить, что отнесение конкретного математического утверждения к числу основных теорем или к числу лемм во многом зависит от точки зрения автора изложения и тех целей, которые он ставит перед собой. Так, принцип Коши-Кантора о вложенных отрезках «используется во всевозможных доказательствах теорем анализа». В силу этого его следует считать одной из основных теорем. Тем не менее, авторы учебников разных поколений, Г. М. Фихтенгольц и В. А. Зорич, называют принцип Коши-Кантора «леммой». По-видимому, это означает, что основной целью авторов является изложение теорем анализа, а принцип Коши-Кантора служит «всего лишь» звеном в цепи логических умозаключений.

Характер связи между предметами и их свойствами отражается в различных *способах записи* теорем, среди которых целесообразно выделить две формы записи:

- категоричная форма;
- условная форма.

Пример 5. а) В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

б) Если четырехугольник – параллелограмм, то его противоположные углы равны.

Каждая из форм записи имеет свои достоинства и недостатки. Категоричная форма кратка, выразительна, удобна для запоминания. Однако в ней не разделены условие и заключение, а также бывает трудно понять, к какому классу объектов применяется теорема. Условная форма, как правило, более велика по объему, но зато в ней в явном виде присутствуют все важные элементы формулировки. Так, в примере 5(б) явно сказано, что теорема применяется к множеству четырехугольников, ее условием является «параллелограммность» четырехугольника, а ее заключением – равенство противоположных углов.

Весьма часто один и тот же факт может быть выражен как в категоричной, так и в условной форме. Например, теорему Пифагора можно записать в категоричной форме, как это сделано в примере 5(а), а можно сделать это более подробно: «Если треугольник является прямоугольным, то квадрат его гипотенузы (наибольшей стороны) равен сумме квадратов катетов (двух других сторон)». На первый взгляд приведенная запись теоремы Пифагора может показаться чересчур подробной, однако именно она удобна для дальнейшей работы с теоремой. Например, с помощью условной формы легко сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора. Кроме того, условная форма порождает естественные вопросы, например такой: каков вид треугольника, если квадрат наибольшей стороны меньше, чем сумма квадратов двух других его сторон?

Достаточно часто встречаются ситуации, когда условная форма записи теоремы либо невозможна, либо весьма неестественна.

Пример 6. а) Число $\sqrt{2}$ иррационально.

б) Множество простых чисел бесконечно.

Работая с теоремой, нужно добиваться от учащихся полного понимания следующего: 1) к какому классу объектов или индивидуальному объекту применяется теорема (объяснительная часть); 2) каково условие теоремы; 3) каково заключение теоремы.

Пример 7. В школе теорема Виета формулируется следующим образом: «Если приведенное квадратное уравнение имеет корни, то их сумма противоположна второму коэффициенту, а произведение равно свободному члену». Объяснительная часть теоремы состоит в том, что она применяется к множеству приведенных квадратных уравнений, условие состоит в том, что уравнение имеет корни, а заключение представляет собой две формулы.

Если теорема имеет вид импликации $A \Rightarrow B$, то на ее основе можно построить еще три высказывания, образующие в совокупности с исходным так называемый «логический квадрат»:

(1) $A \Rightarrow B$ (2) $B \Rightarrow A$

(3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ (4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Высказывания (1) и (2) называются ***взаимно обратными,*** высказывания (1) и (3) – ***взаимно противоположными,*** а высказывания (1) и (4) – ***контрапо-***

зитивными. В каждой паре высказываний имеет место взаимосвязь между элементами пары, которая выражается следующей теоремой.

Теорема. 1) Взаимно обратные высказывания не бывают одновременно ложными. 2) Взаимно противоположные высказывания не бывают одновременно ложными. 3) Контрапозитивные высказывания равносильны, то есть либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Доказательство осуществляется методом таблиц истинности. Приведем такую таблицу для высказывания 2). Она показывает, что взаимно противоположные высказывания либо оба истинны (первая и четвертая строки), либо одно из них истинно, а другое ложно (вторая и третья строки).

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Пример 8. В разделе 7.3 приведены два истинных контрапозитивных высказывания (пример 6). Приведем теперь два ложных контрапозитивных высказывания. 1) Если одна из диагоналей четырехугольника разбивает его на два равных треугольника, то этот четырехугольник является параллелограммом. 2) Если четырехугольник не является параллелограммом, то ни одна из диагоналей не разбивает его на два равных треугольника. Для опровержения обоих утверждений достаточно рассмотреть дельтоид. Под дельтоидом понимается четырехугольник, который составляется из двух равных разносторонних треугольников следующим образом: берут равные стороны треугольников и соединяют их так, чтобы равные стороны исходили из одной вершины.

12. Необходимое следствие, достаточное условие и критерий

Многие математические теоремы имеют вид импликации $A \Rightarrow B$. Примем ряд соглашений, касающихся названия частей теоремы и форм ее прочтения.

1) Высказывание A называется *условием,* или *посылкой* теоремы. Высказывание B называется заключением теоремы.

2) Высказывание B называется *необходимым следствием* высказывания A. Высказывание A называется *достаточным условием* для высказывания B.

3) Теорема $A \Rightarrow B$ имеет несколько *равноправных* форм прочтения. Различие между формами прочтения состоит в употреблении различных союзов, связывающих высказывания A и B. Назовем их условной формой прочтения, НД-формой (две модификации) и ТТ-формой (две модификации).

Условная форма: «<u>Если</u> A, <u>то</u> B»;
«Из A следует B»;
«Из A вытекает B»;
«A влечет B».

Здесь и далее подчеркнуты союзы, связывающие высказывания A и B.

НД1-форма: «Для того чтобы A, <u>необходимо</u>, чтобы B».

НД2-форма: «Для того чтобы B, <u>достаточно</u>, чтобы A».

Очевидно, что название «НД-форма» происходит от слов «необходимо» и «достаточно», употребляемых при прочтении теоремы.

ТТ1-форма: «A только тогда, когда B».

ТТ2-форма: «B тогда, когда A».

Очевидно, что название «ТТ-форма» происходит от «тогда» и «только тогда», употребляемых при прочтении теоремы.

Пример 1. Рассмотрим следующую теорему: «Общий член сходящегося ряда стремится к нулю». Запишем ее в каждой из пяти форм, описанных выше. Для этого введем два высказывания: A: «Числовой ряд сходится» и B: «Общий член ряда стремится к нулю». Тогда теорему можно записать в виде $A \Rightarrow B$ и выразить словесно одним из следующих способов.

Условная форма: «Если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю».

НД-формы: 1) Для того, чтобы числовой ряд сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю.

2) Для того, чтобы общий член числового ряда стремился к нулю, достаточно, чтобы ряд сходился.

ТТ-формы: 1) Числовой ряд сходится только тогда, когда его общий член стремится к нулю.

2) Общий член числового ряда стремится к нулю тогда, когда ряд сходится.

Отметим, что различные формы прочтения теоремы $A \Rightarrow B$ являются не более чем *соглашениями*, правда, достаточно удобными и хорошо согласованными с нормами русского языка. Они употребляются с различной частотой: универсальной является условная форма, гораздо реже применяется НД-форма, и совсем редко – ТТ-форма. Отметим также, что исходная формулировка теоремы имела так называемую ***категоричную*** форму, в которой не выделены условие и заключение теоремы.

Очень часто встречается такая ситуация, когда оба взаимно обратных высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ истинны. Для сжатой словесной передачи этого факта в математике употребляются «парные» союзы: «необходимо и достаточно» и «тогда и только тогда» (в английском языке употребляется союз «если и только если» – if and only if).

Пример 2. 1) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы два его угла были равны. 2) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные углы попарно равны.

Одновременная истинность взаимно обратных высказываний $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ означает, что истинным является высказывание $A \Leftrightarrow B$. В этом случае говорят, что свойства A и B являются *критериями* друг для друга. Так, в примере 1) равенство двух углов треугольника является критерием его равнобедренности. В примере 2) равенство противоположных углов четырехугольника является критерием того, что он является параллелограммом.

Заметим, что существует широкий класс важных математических теорем, которые не имеют вида импликации. Приведем десяток таких теорем, касающихся чисел и выбранных в соответствии со вкусами авторов.

1) Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетом. Благодаря этой теореме в математику вошли иррациональные числа.

2) Отношение длины окружности к ее диаметру постоянно, то есть не зависит от окружности. Благодаря этой теореме в математику вошло число π.

3) $\pi \approx 3{,}14$. Так число π вошло в инженерные расчеты.

4) Число π трансцендентно. Тем самым выявлена его природа.

5) Последовательность $x_n = (1 + 1/n)^n$ имеет предел. Благодаря этой теореме в математику вошло число e.

6) Число e трансцендентно. Тем самым выявлена его природа.

7) Множество простых чисел бесконечно.

8) Любое натуральное число, большее 1, либо является простым, либо разлагается на простые множители. Эту теорему даже называют основной теоремой арифметики.

9) Множество рациональных чисел счетно, а множество вещественных чисел несчетно.

10) Многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень.

Советуем найти другие примеры.

13. Методика изучения теорем

Плохой учитель преподносит истину, а хороший – учит ее находить. А. Дистервег

<u>Общие положения.</u> Умение доказывать математические утверждения является одним из ключевых при изучении математики. При этом основными целями обучения доказательству являются следующие:

- формирование навыков полноценной аргументации, способности обосновывать и доказывать свои рассуждения;
- формирование представлений о дедуктивном компоненте математики;
- усвоение учащимися теоретических знаний по курсу математики;
- обеспечение осознанности, глубины и оперативности знаний.

При изучении теоретического материала учителя, как правило, интересуют два фактора: какое количество учебного материала усвоено учеником (мера обученности); какими методами получения знаний, приемами и способами их использования владеет ученик (характер обученности). При обучении доказательствам первый фактор выполняет информационную функцию, а второй – развивающую. Отсюда следует, что в процессе работы над доказательствами теорем усилия учителя должны быть направлены как на усвоение новых теоретических фактов, так и на овладение общими методами и конкретными приемами, способами их доказательств.

Работа по формированию умения доказывать математические утверждения начинается задолго до того, как учащиеся явно познакомятся с понятием теоремы. Пропедевтическая подготовка к проведению доказательств начинается уже при изучении математики в V–VI классах. В этот период у учащихся закладывается потребность в обосновании своих суждений, начала дедуктивного мышления, умение подмечать закономерности.

При изучении геометрии в VII классе появляются новые для школьника понятия – аксиома, теорема, доказательство. Первоначально учащиеся знакомятся с доказательствами теорем, которые предлагает учитель, не вовлекая пока учащихся в самостоятельный поиск. Готовые доказательства в данном случае выступают как образцы, на которых школьники обучаются приемам умственной деятельности, лежащим в основе умения доказывать. На этом этапе необходимо показать правильное построение умозаключений (силлогизмов): большая посылка – малая посылка – вывод.

Следующий этап в обучении доказательствам состоит в том, что учащиеся привлекаются к активной работе по поиску доказательств теорем, выбору рациональных методов и способов аргументации, выдвижению гипотез, поиску доказательства их истинности или опровержения. Однажды начавшись, этот этап продолжается в течение всего периода изучения математики в школе.

При обучении учащихся доказательству теорем могут быть использованы различные методы: объяснительно-иллюстративный, эвристический, исследовательский и т.д. Выбор метода диктуется теми конкретными обстоятельствами, в которых происходит изучение теоремы: содержанием теоремы, методом ее доказательства, возможностями тех учащихся, которым она предлагается, и т.п. Поскольку изучение теоремы может происходить в самых разных условиях, учитель должен владеть возможно более широким арсеналом методов изучения теорем.

Работы методистов-математиков показывают, что полноценное освоение теоремы включает в себя несколько этапов:

1. мотивация изучения теоремы;
2. ознакомление с фактом, изложенным в формулировке теоремы;
3. выделение условия и заключения теоремы, а в более широком плане – усвоение ее содержания;
4. запоминание формулировки теоремы;
5. построение аналитического рассуждения, помогающего осознанию доказательства;
6. проведение доказательства и оформление его записи;
7. закрепление формулировки теоремы и ее доказательства, поиск других способов доказательства;
8. применение теоремы;
9. установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами.

Естественно, что при доказательстве того или иного утверждения отдельные этапы могут опускаться. Это зависит от сложности или простоты конкретного этапа применительно к изучаемой тереме, от новизны приемов рассуждения или хорошего знакомства с ними и от многого другого.

<u>Пример изучения конкретной теоремы.</u> Рассмотрим одну из теорем школьного курса геометрии и покажем, как может быть организовано ее изучение на уроке. При этом мы будем придерживаться пунктов 1–9 вышеизложенного плана, выделяя сущность каждого этапа ***жирным курсивом.*** Отметим, что для некоторых этапов мы предложим несколько способов реализации. Выбор того или иного способа реализации плана на конкретном уроке предоставляется читателю.

Теорема 1 (свойство биссектрисы). Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на два отрезка, пропорциональные прилежащим сторонам.

Мотивация-1. В качестве мотивации изучения теоремы учащимся можно дать следующее измерительно-вычислительное задание: «Постройте произвольный треугольник и биссектрису одного из углов. Сравните отношение сторон угла и отношение длин отрезков, на которые биссектриса разбивает третью сторону».

В результате выполнения практической работы в классе будет рассмотрено большое количество треугольников, у которых изучаемые отношения равны, несмотря на различие типов треугольников, размеров треугольников и другие отличия. Это дает веские основания считать, что эти отношения равны в любом произвольно взятом треугольнике. Тем не менее, сделанный вывод нельзя считать точно установленным фактом, причем по двум причинам сразу. Во-первых, вывод получен с помощью измерений, которые всегда имеют погрешность. Во-вторых, он сделан по аналогии на основании метода неполной индукции, а эти методы, как мы знаем, могут приводить к ошибкам. Тем самым перед учащимися встает учебная задача – дать точную формулировку сделанному наблюдению – и исследовательская задача – найти метод доказательства сформулированного утверждения.

Очевидно, что при проведении практической работы одновременно происходит ***ознакомление с фактом,*** изложенным в теореме.

Мотивация-2. Иногда для «изобретения» теоремы самими учениками удобно использовать набор упражнений или задач. Приведем набор таких упражнений для изучаемой теоремы. В скобках будем давать ответ на поставленный вопрос.

1) Внимательно изучите рис. 9.

2) Выделите пары подобных треугольников. ($\Delta ABH \sim \Delta CBK$, $\Delta AHE \sim \Delta CKE$.)

3) Укажите коэффициент подобия для каждой пары подобных треугольников. Можно ли утверждать, что коэффициенты подобия можно выразить через длины одних и тех же отрезков? (Оба коэффициента подобия равны отношению $AH : CK = k$.)

4) Выразите коэффициенты подобия каждой пары подобных прямоугольных треугольников через отрезки, являющиеся их гипотенузами. ($k = BA : BC = EA : EC$.)

5) Рассмотрите треугольник ABC, в котором BE – биссектриса угла B. Учитывая соотношение, полученное в пункте 3, сформулируйте свойство биссектрисы угла треугольника. (Формулировка теоремы.)

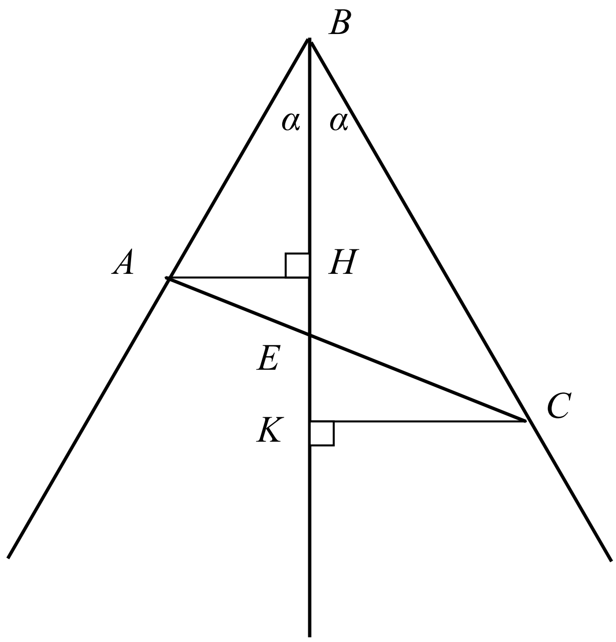


Рис. 9.

Очевидно, что в результате выполнения заданий 1–4 происходит ***ознакомление с фактом,*** изложенным в теореме. Очевидно также, что формальное доказательство теоремы может повторять приведенное выше рассуждение. В силу этого мы можем сказать, что методом доказательства является метод подобия.

Для учителя важно следующее: если ученик самостоятельно обнаруживает закономерность, самостоятельно дает или пытается дать ее словесное выражение, то это позволяет избавиться от формализма при формулировке теорем.

Мотивация-3. Еще один подход – это создание проблемной ситуации. Учащимся может быть предложена задача, для решения которой потребуется новое знание – свойство биссектрисы угла треугольника.

Выделению условия и заключения в рассматриваемой теореме следует уделять внимание, поскольку каждый ученик должен отчетливо осознавать как то, что требуется доказать, так и то, на основании каких данных будет вестись доказательство. В нашем случае имеем следующее.

Дано: ABC – треугольник; BE – биссектриса; $E \in AC$.

Доказать: $BA : BC = EA : EC$.

Важным элементом работы с теоремой является ***актуализация необходимых знаний,*** то есть понятий, аксиом, теорем, на которых строится доказательство. Она может быть проведена непосредственно перед доказательством теоремы. Для этого с учащимся полезно рассмотреть либо систему вопросов для фронтальной работы, либо специально организованный набор задач. По мнению авторов, повторение материала целесообразнее осуществлять через задачный материал, поскольку это часто облегчает восприятие трудных моментов доказательств.

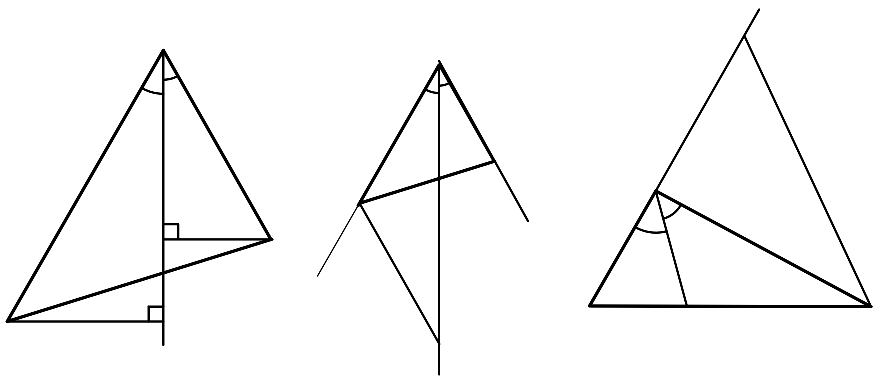
Применительно к рассматриваемой теореме анализ ее *формулировки* показывает, что при проведении доказательства мы будем пользоваться следующими основными понятиями и их свойствами: треугольник, биссектриса угла, равные углы, отношение длин отрезков. Анализ *доказательства* показывает, что мы дополнительно будем использовать признак подобия прямоугольных треугольников.

В методическом плане самым сложным этапом работы с теоремой является поиск ***аналитического рассуждения,*** помогающего осознанию доказательства. Именно этот этап помогает ученикам уяснить последовательность шагов доказательства, необходимость выполнения дополнительных построений, выявить идею способа (приема) проведения рассуждений.

Можно предложить *несколько аналитических рассуждений,* приводящих к доказательству рассматриваемой теоремы.

Первое аналитическое рассуждение приводит нас к доказательству, основанному на методе подобия. С отношением длин отрезков мы встречаемся при рассмотрении подобных треугольников. Выясним, нельзя ли увидеть или получить с помощью дополнительного построения подобные треугольники, в которые отрезки *AB*, *CB*, *AE*, *CE* входят как стороны. По условию теоремы *BE* – это биссектрисы угла, поэтому $\angle ABE = \angle CBE$. Попытаемся получить с помощью дополнительного построения подобные треугольники, в которые вышеназванные отрезки и равные углы входят как элементы. Для этого включим отрезки в прямоугольные треугольники с равными острыми углами, а для этого проведем перпендикуляры *AK* и *CH* из вершин *A* и *C* к прямой, содержащей биссектрису угла *B* (рис. 10). Получим две пары прямоугольных треугольников *ABK*, *CBH* и *AKE*, *CHE*, подобие которых в каждой паре легко доказывается. Теперь из подобия первой пары треугольников получим, что $BA : BC = AH : CK$, а из подобия второй пары получим, что $AH : CK = EA : EC$. Отсюда следует требуемое соотношение.

Второе аналитическое рассуждение. Другой способ получения подобных треугольников – проведение прямой, параллельной одной из сторон треугольника. Например, проведем *AM* параллельно *BC*, где точка *M* лежит на *BE* (рис. 11).



В этом случае проблема сводится к доказательству подобия треугольников *MAE* и *BCE*, из которого следует пропорция $AE : CE = AM : BC$. Для доказательства истинности утверждения теоремы достаточно убедиться, что отрезок *AM* в полученной пропорции можно заменить на равный ему отрезок *AB*. Для этого достаточно доказать, что *ABM* – равнобедренный треугольник, используя определение биссектрисы угла, свойство углов при параллельных прямых и секущей, признак равнобедренности треугольника.

Заметим, что при работе со вторым аналитическим рассуждением актуализации подлежит несколько иной набор понятий и фактов, чем при работе с исходным доказательством.

Когда анализ поиска доказательства теоремы проведен, с учащимися обсуждается план доказательства. Теперь это легко сделать, поскольку все шаги доказательства логически и психологически обоснованы, а учащиеся имеют серьезные мотивы для поиска доказательства.

Краткая ***запись доказательства*** может быть представлена по логическим шагам согласно плану, с кратким обоснованием сделанных выводов (сделаны ссылки на определения, аксиомы, теоремы, либо на результаты предыдущих шагов). Запись доказательства по логическим шагам удобна, так как легко прослеживается схема рассуждений.

После проведения доказательства теоремы необходимо выделить основные утверждения, на базе которых строилось доказательство. Это даст возможность проследить с учащимися ***связь*** нового теоретического факта с ранее изученными определениями понятий, аксиомами, теоремами, заложить основы для осознания системности знаний.

Поиск ***других способов доказательства*** теорем является существенным моментом в обучении доказательству. Важно показать учащимся, что новый способ доказательства мы получаем тогда, когда меняем набор понятий, аксиом, теорем, который логически предшествует данной теореме в данном курсе геометрии. Обобщенно говоря, мы должны показать *другую идею* доказательства.

Второе доказательство использует не метод подобия, а теорему Фалеса. Такой шаг является вполне естественным, поскольку учащиеся уже знакомы с ней.

Идея состоит в следующем. Так как в заключении теоремы используется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (отрезки *AE* и *EC*), то попытаемся получить ситуацию, соответствующую теореме Фалеса. Для этого выделим две прямые *AC* и *AB*, на которых расположены три из отрезков, указанных в заключении теоремы (*AE*, *EC* и *AB*), и пересечем их двумя параллельными прямыми. Выбор таких прямых очевиден: это *BE* и параллельная ей *CD*, где точка *D* лежит на *AB*. Согласно теореме Фалеса можно записать соотношение $AE : EC = AB : BD$. Чтобы получить требуемое соотношение, достаточно доказать равенство отрезков *BC* и *BD*. Это следует из свойств углов при параллельных прямых и секущей и признака равнобедренности треугольника (рис. 12).

Третье доказательство использует метод площадей. Рассматривают треугольник *ABC* с биссектрисой *BE* и выражают площади треугольников

ABE и CBE двумя способами: во-первых, через сторону и высоту, проведенную из вершины B, и, во-вторых, через две стороны, исходящие из вершины B, и углы между ними. Если в каждой паре выражений поделить одно равенство на другое, то получим соотношение $\frac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = \frac{AE}{CE} = \frac{BA}{BC}$.

Итак, мы имеем несколько доказательств, проводимых различными методами. Естественно, что для работы на уроке можно использовать любой из них.

Работа по отысканию различных способов доказательства теоремы на основе имеющихся знаний обогащает опыт учащихся по поиску доказательства теорем, способствует осознанности и оперативности знаний.

Подбор упражнений, направленных на ***закрепление и применение*** доказанной теоремы, осуществляется на двух уровнях: первоначально предлагаются задачи на прямое применение полученного знания, с использованием типичных ситуаций; далее включаются задачи, при решении которых новая теорема используется в различных комбинациях с другими, ранее изученными, то есть, новое знание встраивается в систему ранее приобретенных.

Формулирование утверждения, обратного доказанному, и установление его истинности позволяет привлечь учащихся к самостоятельному пополнению знаний. Так, для изучаемой теоремы можно предложить сформулировать обратное утверждение и проверить его истинность. Убедившись в истинности полученного утверждения, учащиеся приходят к выводу, что имеет место обратная теорема – признак биссектрисы угла треугольника.

Теорема 2, обратная (признак биссектрисы). Если на стороне AC треугольника ABC взята точка E такая, что выполняется соотношение $BA : BC = AE : EC$, то BE является биссектрисой угла B треугольника.

После этого полезно обсудить вопрос о возможности *дальнейшего расширения* доказанной в теореме-свойстве закономерности. Для этого заменим биссектрису угла треугольника на биссектрису внешнего угла. Можно предложить учащимся сделать чертеж. Самостоятельное выполнение чертежа особенно значимо в данном случае, так как учащиеся фиксируют для себя основные элементы и соответствие между ними. В данной конфигурации весьма существенно выяснить следующее: *для любого ли треугольника биссектриса внешнего угла пересекает противолежащую сторону?* Затем возникает потребность сформулировать новое утверждение, пользуясь приемом аналогии.

Теорема 3 (аналогия с теоремой-свойством). Если биссектриса внешнего угла треугольника или ее продолжение пересекает продолжение противоположной стороны, то точка пересечения отстоит от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон.

Краткая запись теоремы такова:

Дано: ΔABC; BE – биссектриса внешнего угла при вершине B;
$BE \cap AC = E$.

Доказать: $EA : EC = BA : BC$.

Здесь важно понять, что указанные прямые не пересекаются в том и только в том случае, когда стороны, исходящие из вершины *B*, не равны.

Работа над доказательством этого утверждения важна, так как в процессе доказательства проявится степень осознанности способов доказательства исходной теоремы и способность переносить усвоенные приемы рассуждения на аналогичную ситуацию. Любой из предложенных способов доказательства, использованных в первом случае, можно использовать и во втором.

Приведенное описание работы с теоремой показывает, что учащиеся могут не только принимать активное участие в получении знаний о геометрических фигурах, но одновременно с этим овладевать методологией поиска этих знаний.

14. Задачи в обучении математике

В процессе обучения математике задачи занимают особое место, поскольку именно через решение разнообразных по виду и содержанию задач происходит как усвоение уже имеющихся знаний, так и приобретение новых.

До настоящего времени в научной литературе нет общего определения понятия «задача». По-видимому, одна из причин такой неопределенности состоит в том, что этот термин носит общенаучный характер, поскольку используется во многих науках, весьма далеких друг от друга по объектам, методам и целям исследования.

В психологической литературе встречаются разнообразные подходы к трактовке понятия «задача». Изложим некоторые из них в форме определений.

Задача – это цель, заданная при определенных условиях.

Задача – это более или менее определенные системы информационных процессов, несогласованное или даже противоречивое отношение между которыми вызывает потребность в их преобразовании.

Задача – это знаковая модель проблемной ситуации, выраженная с помощью знаков естественного и/или искусственного языков.

В школьном курсе математики мы имеем дело с задачами, адаптированными для достижения учебных целей. Адаптация означает, что проблемные ситуации переведены на математический язык, так что учебная задача может отражать не все условия конкретной проблемной ситуации.

Поскольку решение любой задачи тесно связано с мыслительной деятельностью, то в следующем определении понятия «задача» это обстоятельство выделено как главное звено: «***Задача*** – объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами».

Анализируя каждое из приведенных определений, можно сказать, что все вместе они наиболее полно отражают сущность понятия «задача».

В процессе обучения математике учащийся решает чрезвычайно много задач, причем они весьма сильно отличаются друг от друга как по содержанию, так и по дидактическому назначению. Тем не менее, их объединяет компонентный состав и общая структура. Опишем их.

- ***Условие задачи*** – это множество данных задачи и отношений между объектами, указанными в тексте задачи. Сюда же относятся не названные явно, но предполагаемые отношения между ними.
- ***Требование задачи*** – то, что должно быть найдено или установлено, что необходимо объяснить, доказать, вычислить и т.д. (Требование задачи часто называют заключением задачи.)
- ***Базис задачи*** – теоретический и/или практический материал, на котором основано движение от условия задачи к ее заключению. (Базис задачи часто называют обоснованием задачи.)

Решить задачу **–** это значит найти такую теорию, такую совокупность операций, действий, применяя которые к условиям задачи, можно, в конечном счете, ответить на вопрос задачи, то есть выполнить ее требование.

При изучении различных типологий задач в школьной практике чаще всего рассматриваются следующие *основания* типологии:

- по характеру требований (на вычисление, на доказательство, на построение, на преобразование и др.);
- по математическому содержанию (арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические, комбинаторные и др.);
- по способу выражения условия и требования задачи (текстовые, графические, по готовому чертежу и др.);
- по основной дидактической цели (задачи на усвоение содержания понятия; задачи на усвоение объема понятия; задачи на установление связей между понятиями; задачи на усвоение правил, теорем, научных фактов; задачи на мотивацию введения нового понятия, изучения теоремы и др.);
- по наличию алгоритма решения (стандартные – задачи, алгоритм решения которых известен учащемуся; нестандартные – задачи, алгоритм решения которых неизвестен учащемуся).

Отметим, что никакая самая подробная типология, никакой самый длинный список оснований типологии не может исчерпать всего разнообразия математических задач. Выше были перечислены только самые употребительные основания, для каждого из которых приведена типология разумного, с точки зрения авторов, уровня детализации.

Выделим *функции* математических задач в обучении:

- обучающая;
- развивающая;
- воспитывающая;
- прикладная;
- контролирующая.

Решение задач способствует развитию мотивации учебной деятельности, формированию системы математических знаний, формированию умений применять знания в конкретных ситуациях, формированию логического мышления, алгебраической техники, пространственного мышления школьников. Нередко одна и та же задача может выполнять различные функции, это зависит от ее роли в процессе обучения и места в наборе задач, предлагаемых для усвоения знаний.

Выделим сущность *процесса решения задач*. Обсуждению вопросов, касающихся процесса решения задач, уделяется достаточно внимания в учебно-методической литературе по математике (Д. Пойа, Ю. М. Колягин, И. И. Ильясов, Л. М. Фридман, Г. И. Саранцев, В. А. Гусев, Я. И. Груденов и др.). И исследователи, и педагоги-практики обращают внимание на следующее обстоятельство: с одной стороны, в процессе обучения математике ученики решают огромное количество задач; с другой стороны, большинство из них испытывают затруднения, встречаясь с новой задачей. Причина заключается в том, что общий подход к решению задач *не формируется у учащихся самопроизвольно*, даже если они решали большое количество задач. Деятельность по решению задачи должна быть организована педагогом и осознана учащимися, только тогда можно добиться ощутимых результатов.

Процесс решения задачи можно разбить на следующие этапы:

1) Анализ текста задачи.
2) Поиск идеи (способа, метода) решения, составление плана решения.
3) Выполнение плана решения задачи.
4) Математический анализ проведенного решения.
5) Исследование задачи.
6) Рефлексия.

В реальном процессе решения задач не все указанные этапы рассматриваются для каждой из них. Основными являются первые четыре этапа.

Анализ текста задачи необходим при решении любой задачи. Ученику необходимо выявить условие и требование задачи, выполнить чертеж, сделать краткую символьную запись и т.д. Далее анализируется условие задачи, а именно, ведется поиск неявно заданных условий – следствий. Они могут быть получены разными способами: путем замены термина понятия его определением; путем переосмысления данного понятия с точки зрения другого понятия; путем выявления связей между понятиями, входящими в условие задачи; путем перевода условия на другой математический язык. Анализ требования задачи также сводится к его переосмыслению, то есть к переформулировке требования и замене его на равносильное. Проведенный анализ позволяет глубже осознать постановку задачи с одной стороны, а с другой – обеспечивает выполнение следующего этапа решения.

Поиск идеи (способа, метода) решения состоит в отыскании взаимосвязи между явными данными условия и привнесенными данными (следствиями из условия) с требованием задачи. Поиск чаще всего начинается с вопросов следующего типа: «Что необходимо знать, чтобы ответить на вопрос задачи?» или «На основании какого утверждения можно было бы сделать вывод, что заключение задачи истинно?». Поиск действий, обеспечивающих движение к заключению, приводит к рассмотрению вспомогательных задач, которые разбивают всё рассуждение на отдельные логические шаги. Результатом поиска способа решения является план проведения рассуждений. Он может быть представлен в виде схемы, краткой записи логических шагов, произнесен устно и т.п.

При выполнении плана решения задачи необходимо следить, чтобы все шаги решения были обоснованы, все данные задачи использованы.

Проводя математический анализ решения, весьма полезно выделять базис задачи. Далее следует выяснить, какие другие способы решения можно получить, и выявить среди них наиболее рациональный.

Исследование задачи предполагает обобщение задачи, рассмотрение частных случаев, составление и решение обратной задачи.

На этапе рефлексии необходимо понять, какие новые знания и способы рассуждений, полученные в результате решения, целесообразно запомнить и использовать при решении новых задач.

Естественно, что в процессе работы с конкретной задачей перечисленные этапы решения могут объединяться и пересекаться.

Важно, чтобы решение задачи осуществлялось учеником не «вслепую», наугад. Для этого необходимо проводить целенаправленную работу по формированию умений анализировать условие и заключение задачи, выводить следствия, подбирать приемы решения задач. Эти умения будут приобретены учащимися, если педагог будет использовать специально разработанную систему упражнений.

15. Системы задач

Общепринятое представление о единстве математики находит свое естественное отражение в области методики ее преподавания, в частности, при составлении и изучении отдельных задач и систем задач. Системами задач, рассматриваемыми с разных точек зрения, занимались многие исследователи, например, П.М.Эрдниев [14]. Процитируем одного из них [3].

«Каждая задача, рассматриваемая сама по себе, обычно представляет некоторое изолированное утверждение или требование и предполагает выполнение определенных действий для ее решения. Между тем учитель, ставящий задачу перед учащимися, … преследует, как правило, более общие цели, для него конкретная задача является лишь одной из многих, узкочастным средством для достижения более общих целей – формирования или закрепления нового понятия, получения новых или активизации старых знаний, демонстрации определенного метода рассуждений … и т.п.»

<…> «Каждая конкретная задача имеет определенный набор связанных с ней задач, определенную окрестность – по содержанию, по методам рассуждений, кругу используемых понятий. Более того, каждая задача входит в некоторый *букет окрестностей*, связанных с той или иной ее особенностью …»

<…> «Невозможно, очевидно, сформулировать какие-либо достаточно определенные «алгоритмы» построения окрестности конкретной задачи, и поэтому важной представляется систематизация разнообразных приемов варьирования задач, достаточно общая в теоретическом плане и в то же время эффективная в плане практическом. Такая систематизация является … необходимым

средством обучения учителей … умению видеть взаимосвязи отдельных внешне разрозненных задач, самостоятельно составлять циклы задач, объединенные общими идеями.»

Перечислим ряд *методов*, с помощью которых отдельные разрозненные задачи могут быть объединены в группы:

- методы обобщения и конкретизации;
- метод замены переменных;
- метод тождественных преобразований;
- метод оценки выражений;
- метод геометризации;
- метод следствий;
- метод классификации математических объектов;
- метод объединения задач в группы по методу решения;
- метод углубленного изучения математического объекта.

Примеры систем задач, построенных с помощью каждого из этих методов, можно найти в книге [16, раздел 5]. При этом следует помнить, что величина системы задач может и должна варьироваться в зависимости от особенностей обучения в конкретной педагогической ситуации. Кроме того, никакой список, подобный приведенному, не может быть полным.

Пример. Рассмотрим в совокупности семь нижеследующих задач.

1) Пусть A, B, C, D – различные точки окружности. Если хорды AB и CD пересекаются в точке P внутри круга, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

2) Пусть A, B, C, D – различные точки окружности. Если секущие AB и CD пересекаются в точке P, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

3) Диаметр AB и перпендикулярная к нему хорда CD пересекаются в точке P. Докажите, что $PA \cdot PB = PC^2$. Переформулируйте полученный результат, введя в рассмотрение прямоугольный треугольник и используя его элементы.

4) Пусть A, B, T – различные точки окружности. Если хорда AB и касательная в точке T пересекаются в точке P, то $PA \cdot PB = PT^2$.

5) Докажите, что отрезки касательных к окружности, заключенные между точками касания и точкой пересечения касательных, равны между собой.

6) Рассматриваются отрезки PA, PB и PT из задачи 4). Из них строится треугольник следующим образом: а) на прямой выбирается точка P; б) на прямой откладываются отрезки PA и PB по разные стороны от точки P; в) через точку P проводится перпендикуляр к прямой; г) на перпендикуляре откладывается отрезок PT. Каков вид треугольника ABT?

7) Пусть A, B, C, D – точки окружности. Если секущие AB и CD различны и пересекаются в точке P, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Взаимосвязи между задачами могут быть описаны с помощью графа, изображенного на рис. 13. Важно заметить, что задачи этой группы отличаются друг от друга по своему значению. Так, задача 1 является базовой, *ключевой*, потому что все другие задачи связаны с ней непосредственно или опосредовано. Задачи 3 и 6 устанавливают связь между изучением хорд и секущих окружности с изучением прямоугольных треугольников. Важно также, что один и тот же метод, применяемый в различных ситуациях, может приводить к различным по значению результатам. Так, переход от задачи 1 к задаче 2 является обобщением и приводит к появлению важного геометрического факта, из которого проистекает целый ряд следствий. Переход от задачи 2 к задаче 7 также является обобщением, однако полученный факт неинтересен, поскольку не имеет следствий и практически ничего не добавляет к той информации, которая уже содержится в утверждениях 1 и 2.

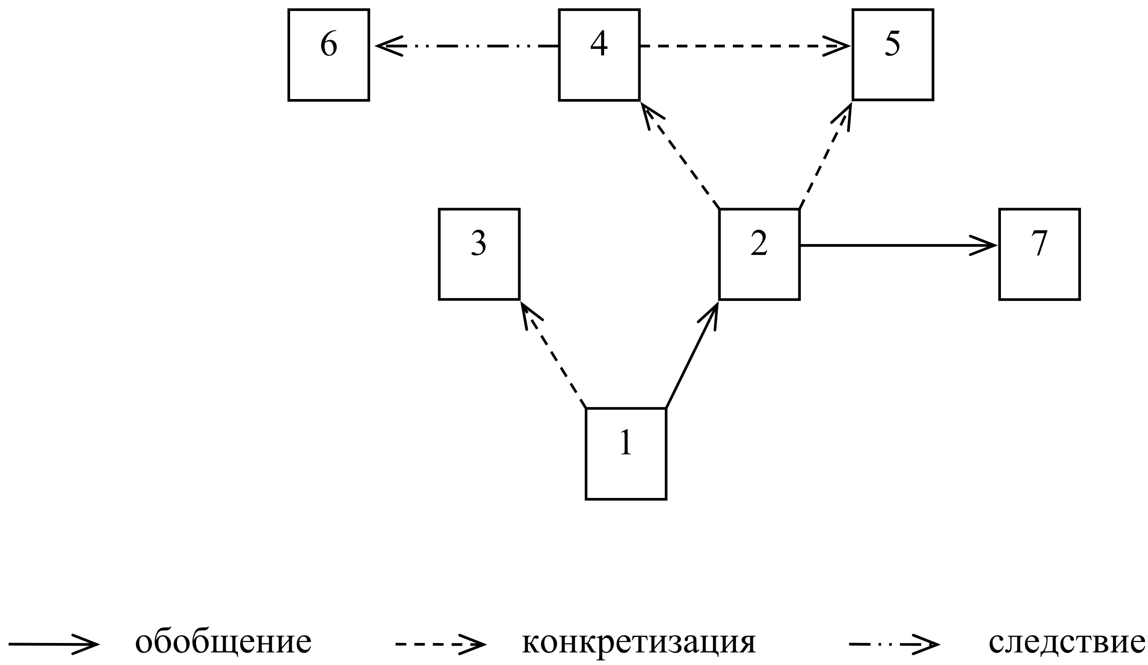


Рис. 13.

16. Урок математики

В течение последних нескольких сот лет урок является основной формой организации обучения в школе. По-видимому, он сохранит за собой эту роль в обозримом будущем. До сих пор все попытки найти эквивалент уроку, заменить его другой формой организации обучения не имели успеха ни в России, ни за рубежом.

Существуют различные точки зрения на сущность понятия «урок». Изложим некоторые из них в форме определений.

Урок – это законченный в смысловом, временном и организационном отношении отрезок (этап, звено, элемент) учебного процесса.

Урок – это логически законченный, целостный, ограниченный определенными временными рамками отрезок учебно-воспитательного процесса.

Урок рассматривается в единстве двух его сторон: и как отрезок целостного учебно-воспитательного процесса, ограниченный рамками времени, и как основная форма организации обучения.

Современный урок является вариативной, постоянно развивающейся формой организации коллективно-индивидуального обучения математике.

Каждый урок имеет свои *элементы* (этапы урока, компоненты урока). Под *структурой* урока понимается совокупность различных вариантов взаимодействия между элементами урока, возникающая в процессе обучения и обеспечивающая его целенаправленную действенность.

С *дидактической* точки зрения урок имеет следующие элементы:

- актуализация прежних знаний и способов действий;
- формирование новых знаний и способов действий;
- применение и формирование умений и навыков.

С *методической* точки зрения урок имеет следующие элементы:

- постановка цели урока;
- проверка домашнего задания;
- воспроизведение и коррекция знаний учащихся, необходимых для восприятия новых знаний;
- объяснение нового материала;
- первичное осознание нового материала, осознание связей между объектами изучения;
- обобщение изученного на уроке и введение его в *систему* ранее усвоенных знаний;
- контроль результатов учебной деятельности, осуществляемый учителем и учащимися;
- подведение итогов урока и сообщение домашнего задания.

Здесь перечислены все возможные этапы современного урока, на котором проводится полностью законченный процесс обучения какому-то конкретному вопросу математической теории. Очевидно, однако, что не каждый урок должен содержать все указанные структурные элементы. Часто они реализуются в процессе изучения целостной темы или даже ряда близких тем, при проведении нескольких уроков. В рамках же одного урока могут быть использованы лишь некоторые вышеперечисленные этапы. В связи с этим целесообразно говорить о ***типологии*** уроков.

При изучении различных типологий уроков чаще всего рассматриваются два *основания* типологии:

- по ведущей дидактической цели;
- по основному способу проведения урока.

Наиболее часто используется первое из двух оснований типологии.

По *основной дидактической цели* выделяются следующие типы уроков:

- урок ознакомления с новым материалом;
- урок закрепления изученного;
- урок применения знаний и умений;

- урок обобщения и систематизации знаний;
- урок проверки и коррекции знаний;
- комбинированный урок.

По *способу проведения* выделяются следующие типы уроков:

- урок-лекция;
- урок-семинар;
- урок-практикум;
- урок-зачет и др.

Важно отметить, что особенности *учебного предмета* «математика» порождают характерные особенности *урока* математики. Можно выделить следующие его значимые черты:

- курс математики служит опорным предметом для изучения других дисциплин, а это требует эффективно построенного процесса обучения;
- при обучении математике должны быть созданы условия для того, чтобы *каждый* ученик мог усвоить на уроке главное в изучаемом материале, поскольку без базовой математической подготовки невозможна постановка образования современного человека;
- строгая логика построения *курса* математики приводит к тому, что содержание *урока* математики разворачивается с опорой на ранее изученный материал, подготавливая базу для освоения новых знаний;
- в процессе овладения системой математических знаний в большей степени, чем в других предметах, уделяется внимание развитию логического мышления, умений рассуждать и доказывать;
- в процессе обучения математике теоретический материал осознается и усваивается преимущественно в процессе решения задач, поэтому на уроках математики теория не изучается в отрыве от практики.
- в процессе овладения знаниями по математике происходит разделение учащихся по склонностям и способностям, что выдвигает необходимость проведения дифференциации обучения.

Главными, с точки зрения авторов, являются свойства 2–4 из приведенного списка.

К уроку математики, как и к урокам по другим дисциплинам, предъявляются определённые требования. Укажем наиболее существенные из них, которые можно назвать ключевыми:

1. целенаправленность процесса изучения математики;
2. мотивация учения и формирование у учащихся умения учиться;
3. построение и дифференциация содержания материала урока направлены на усвоение изучаемого;
4. включение учащихся в активную учебную деятельность с учетом их способностей, интересов и потребностей;
5. обоснованный выбор средств, методов и приёмов обучения, направленный на решение учебно-воспитательных задач.

Подготовка учителя к уроку математики является частью более общей *системы* подготовки, состоящей из трех компонентов:

- подготовка к новому учебному году;
- подготовка к каждой теме;
- подготовка к конкретному уроку.

Важно, что качество подготовки на каждом из уровней определяет качество конечного продукта – урока.

Подготовка к *учебному году* складывается из следующих действий учителя: изучение программ, учебников по математике, учебно-методической литературы, подготовка годового или полугодового планирования материала. В настоящее время такое планирование рекомендательно предлагается учителю математики либо в методическом пособии для учителя, либо в журнале «Математика в школе».

Подготовка к *учебной теме* предполагает следующие действия: выделение цели и задач изучения темы; планирование последовательности уроков по теме в соответствии с количеством часов, отведенных на ее изучение; выделение знаний и способов действий, которые необходимо повторить (актуализировать); выделение новых понятий и теорем, умений и навыков, которые должны быть усвоены в процессе изучения темы; проведение анализа задачного материала; планирование самостоятельных работ и их типов для формирования умений и навыков. Тематический план позволит регулировать процесс формирования системы знаний, развитие мыслительных способностей и самостоятельности учащихся.

Остановимся подробнее на подготовке учителя к *конкретному уроку*. Готовясь к каждому уроку, необходимо опираться на знания психологических и педагогических закономерностей восприятия и усвоения знаний, учитывать объективные условия организации обучения.

Подготовка к уроку – это его прогнозирование, продумывание в деталях, связанных друг с другом. Выделим основные действия по подготовке учителя к уроку.

- Определить место урока в системе уроков, его цели и задачи.
- Определить, какие проблемные задачи надо поставить на уроке.
- Отобрать обязательный для усвоения материал (понятия, правила, законы, теоремы, следствия из них и др.), продумать, в какой последовательности этот материал следует представить на подготовленном уроке.
- Выделить умения (предметные и надпредметные), которые надо формировать при изучении материала.
- Провести анализ задач и упражнений, относящихся к теме урока, отобрать те из них, которые будут использованы на уроке для усвоения главного и формирования выделенных умений.
- Подготовить материал из ранее изученного, который необходимо повторить; материал для установления межпредметных связей, для организации самостоятельной работы учащихся, для проведения индивидуальной работы

с учащимися. Вопросы (задачи, задания, карточки и т.п.) готовятся заранее и здесь же прилагаются решения.

- Выбрать методы, которые целесообразно применить соответственно видам познавательной деятельности школьников, приёмы работы, позволяющие активизировать и индивидуализировать обучение.
- Подобрать задания для домашней работы с указанием времени для ее выполнения.
- Определить оборудование, необходимое для проведения урока.

Мы видим, что определяющий элемент урока – это его содержание. Содержание образования по математике включает математические знания и знания о методах познания, общих и специфических; способы деятельности (предметные умения и навыки и умения организовать свою учебно-познавательную деятельность); опыт творческой деятельности (самостоятельный перенос ранее усвоенных знаний и умений в новую непривычную ситуацию, умение найти разные способы решения одной и той же задачи, комбинирование усвоенных способов деятельности). На конкретном материале урока все эти части содержания образования связаны.

Как результат проведенной работы по подготовке к уроку составляется конспект урока или рабочий план урока. Более подробную информацию о работе над конспектом урока можно найти в учебниках по методике обучения математике.

Библиографический список

1. Гетманова, А.Д. Логика [Текст]: учебник для педагогических учебных заведений / А. Д. Гетманова. – М.: ИКФ Омега-Л; Высшая школа, 2002.
2. Гурова, Л.Л. Психологический анализ решения задач [Текст] / Л. Л. Гурова. – Воронежский университет, 1976.
3. Дорофеев, Г.В. О составлении циклов взаимосвязанных задач [Текст] / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34–39.
4. Иванова, Т.А. и др. Теоретические основы обучения математике в средней школе [Текст] / Т А. Иванова, Е. Н. Перевощикова, Т. П. Григорьева, Л. И. Кузнецова; под ред. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород: НГПУ, 2003.
5. Игошин, В.И. Логика с элементами математической логики [Текст] / В. И. Игошин. – Саратов: Изд-во «Научная книга», 2004.
6. Левитес, Д.Г. Школа для профессионалов, или Семь уроков для тех, кто учит [Текст] /Д. Г. Левитес. – М.: Московский психолого-социальный институт; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК». – 2001.
7. Лернер, И.Я. Дидактические основы методов обучения [Текст] / И. Я. Лернер. – М.: Педагогика, 1981.
8. Методика преподавания математики. Общая методика [Текст] / сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985.
9. Манвелов, С.Г. Конструирование современного урока математики. Книга для учителя [Текст] / С. Г. Манвелов. – М.: Просвещение, 2005.
10. Подласый, И.П. Педагогика [Текст]: учебник для студентов высших пед. учеб. заведений / И. П. Подласый. – М.: ВЛАДОС, 1999.
11. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе [Текст] / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002.
12. Селевко, Г.К. Современные образовательные технологии [Текст]: учебное пособие / Г. К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998.
13. Фридман, Л.М. Основы проблемологии [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: СИНТЕГ, 2001.
14. Эрдниев, П.М., Эрдниев, Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике [Текст] / П. М. Эрдниев, Б. П. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986.
15. Эсаулов, А.Ф. Психология решения задач [Текст] / А. Ф. Эсаулов. – М.: 1972.
16. Ястребов, А.В. Избранные задачи по общей методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие / А. В. Ястребов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007.

Учебное издание

Тамара Михайловна Корикова

Александр Васильевич Ястребов

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ОБЩЕЙ МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Редактор – А. Н. Верещагина

Набор и компьютерная верстка – А. В. Ястребов

Подписано к печати 18.03.2009. Формат 60×92/8.
Объем 3,75 п.л. Уч.-изд. л 5,1. Тираж 100 экз. Заказ 354.

Издательство Ярославского государственного
педагогического университета (ЯГПУ)
150000, г. Ярославль, Республиканская, 108

Типография ЯГПУ
150000, г. Ярославль, Которосллльная наб., 44
Телефоны: (4852) 72-64-05; 32-98-69