Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского»

А. В. Ястребов

ЗАДАЧИ ПО ОБЩЕЙ МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано УМО по специальностям педагогического образования в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 050201.65 (032100) – математика

2009

УДК 14.25.09+14.35.09
ББК 74.262.21
Я 854

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Рецензенты:
кафедра общей математики Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова,
Т. Л. Трошина, кандидат физико-математических наук, доцент

Ястребов А. В.
Задачи по общей методике преподавания математики [Текст]: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ,2009. – 148 с.

Учебное пособие предназначено для студентов и преподавателей педагогических вузов, а также учителей школ. Математической базой для задач по общей методике математики служит материал как школьной, так и вузовской программы за первые 2-3 курса обучения. Задания построены таким образом, что подлежащие усвоению положения общей методики выявляются студентом в результате методико-математического анализа условий и/или решений математических задач. Задачи бифункциональны, то есть пригодны к использованию при изучении как методических, так и математических дисциплин. В книге имеется система авторских комментариев к отдельным задачам и группам задач, раздел, облегчающий процесс их решения, а также раздел с полными ответами и/или решениями.

Учебное пособие подготовлено в рамках авторской концепции моделирования базовых свойств научных исследований в учебном процессе.

УДК 14.25.09+14.35.09
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-87555-493-3

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Перед читателем лежит книга, стиль которой можно трактовать различными способами. По своей общей, грубой структуре это сборник задач со всеми его характерными признаками: краткими теоретическими введениями к каждому из разделов, заданиями, идущими под номерами, ответами или решениями. Однако более тонкие структурные элементы заставляют уточнить первоначальное впечатление. Прежде всего, это авторские комментарии двух сортов к группам задач или даже к отдельным задачам. Предварительный комментарий вскрывает причины, заставившие автора обратиться к данным задачам, а завершающий комментарий описывает те качественные, идейные следствия, которые вытекают из полученного результата и анализа процесса решения. Кроме того, в книге содержится раздел «Идеи, советы, намеки», в который помещена информация, облегчающая последующее решение, но не дающая полного решения. Две эти черты роднят данную книгу с учебниками по общей методике, хотя она не является учебником и не претендует на это. Наконец, удачно подобранные эпиграфы к разделам настраивают на высокий научный лад, как если бы перед читателем лежало сочинение по философии математики.

Согласимся, однако же, с первым впечатлением и будем считать, что перед нами сборник задач. Тогда станет понятной необычность и, в некотором смысле, дерзость авторского замысла, который попытался соединить трудно соединимое: вопросы общей методики и тренировочные упражнения по этому разделу. Действительно, среди многих прекрасных книг по общей методике практически нет сборников задач. Есть основания считать, что данная книга заполнит существенную часть этого пробела, поскольку ее тренировочное начало выражено достаточно сильно. Так, у читателя есть возможность выполнить более семи десятков упражнений на обобщение и конкретизацию. Анализируя процесс решения школьных задач, читатель увидит, что индукции и дедукция неотделимы друг от друга, равно как неотделимы друг от друга анализ и синтез. Тем самым положения общей методики будут выявлены в процессе личной деятельности студента.

Сочинение по общей методике неизбежно апеллирует к школьной математике, то есть к той области, которая известна или должна быть известна всем. Искусство автора состоит в том, что он умеет ставить в этой области несложные, но психологически трудные вопросы. Например, оказывается, что студентам трудно найти такое свойство параллельных прямых, которое не было бы достаточным условием параллельности. Вообще следует сказать, что за текстом книги (задачника!) ощущается личность автора. Быть может, синтетический стиль книги как раз и обусловлен тем, что автор пытался на немногих страницах выразить квинтэссенцию своего педагогического опыта. Удалось это или нет, полезен ли такой опыт – судить читателю. С моей точки зрения, хорошо, что такая книга написана, и я с удовольствием представляю ее педагогическому сообществу.

Профессор А. Г. Мордкович

Введение

> **Решение задач является наиболее характерной и специфической разновидностью свободного мышления.**
>
> *Уильям Джеймс*

При переходе от изучения математики к изучению методики обучения математике студент сталкивается с двумя обстоятельствами, которые существенно усложняют процесс освоения материала. Прежде всего, происходит, образно говоря, глобализация той «элементной базы», на основе которой ведутся рассуждения. Действительно, понятия и факты конкретной математической дисциплины используются при изучении других математических дисциплин не столь уж активно. Например, сколь бы важным ни было понятие определенного интеграла, оно не встретится студенту ни при изучении проективной геометрии, ни при изучении теории чисел. Аналогично, алгоритм Евклида не входит в курсы математического анализа и геометрии, и список таких примеров можно существенно расширить. Приступая к изучению общей методики, студент попадает в принципиально иную ситуацию, поскольку вынужден находить проявления общих явлений и закономерностей *во всей математике*, а не в отдельных математических дисциплинах. Более того, он вынужден обнаруживать их как в вузовской, так и в школьной математике.

Второй причиной, вызывающей трудности в обучении, является новый уровень абстрагирования, более высокий по сравнению с привычным. Действительно, изучая, например, математический анализ, студент абстрагируется от содержания ряда конкретных *физических задач* и извлекает из них ту сущность, которая приводит его к понятию производной. Изучая алгебру, студент абстрагируется от свойств конкретных *бинарных операций* и извлекает из них ту сущность, которая приводит его к понятию группы. Приступая к изучению общей методики математики, студент вынужден абстрагироваться от *математических свойств* привычных рассуждений и извлекать из них ту сущность, которая приводит его к общим понятиям индукции и дедукции, анализа и синтеза, обобщения и конкретизации и т.д. К тому же, и в этом третья причина, новые понятия теряют свою определенность по сравнению с математическими понятиями именно в силу своей общности. Например, студенту поначалу достаточно трудно разделить некоторые понятия, например, неполную индукцию, аналогию, обобщение.

По мнению автора, все вышесказанное позволяет утверждать, что понятийный аппарат общей методики математики имеет иную природу по сравнению с понятийным аппаратом математики, следовательно, процесс формирования методических понятий должен отличаться от процесса формирования понятий математических. Тем не менее, у этих двух процессов есть много общего. Действительно, освоить абстрактные понятия с помощью широкой элементной базы можно только в том случае, когда студенту предоставлена возможность получить большой *личный опыт* работы с этими понятиями. Недостаточно услышать на лекции рассказ о том, что такое, например, обобщение; нужно, чтобы студент *несколько раз* самостоятельно обобщил какие-либо свойства математических объектов. Недостаточно прочитать в книге описание того, что такое, например, рассуждение по аналогии; нужно, чтобы студент *несколько раз* самостоятельно провел рассуждения по аналогии на основании рассмотрения некоторых примеров, сформулировав гипотезу и проверив ее истинность. Попросту говоря, студент должен *решить* большое количество задач по общей методике математики. Именно необходимость *решения задач* является общим свойством двух родственных процессов: изучения математики и изучении методики математики.

Очевидно, что для методического обеспечения курса общей методики математики должен быть создан соответствующий задачник. Идея эта отнюдь не нова, однако до сих пор не существует задачника по общей методике, сравнимого по объему и по «степени канонизации» с задачниками по математике. Опишем кратко принципы построения данного задачника, которые и определили его особенности.

Принцип универсальности математической базы методических задач состоит в том, что элементной базой для упражнений по общей методике служат как содержание школьной программы, так и содержание программы для педагогических вузов за первые 2-3 года обучения. Реализация этого принципа позволяет решить одновременно несколько педагогических задач. Во-первых, в процессе выполнения заданий по общей методике происходит обобщающее повторение математического материала как по элементарной, так и по высшей математике. Во-вторых, у студентов формируется представление о единстве математики на всех ее «этажах» и о тесной связи между математикой и методикой ее преподавания. В-третьих, данный подход может быть использован в процессе подготовки преподавателей в стенах классического университета.

Принцип моделирования элементов исследовательской деятельности в учебном процессе состоит в том, что подлежащие усвоению положения методики выявляются студентом в результате методико-математического анализа условий и/или решений математических задач. Для реализации этого принципа пришлось формулировать задания или группы заданий таким образом, чтобы они заведомо были *двухкомпонентными* и включали в себя как математическую, так и методическую части. В ряде случаев, когда математическая часть задания оказывалась сложной и не оставляла студенту достаточно времени для методического анализа, автор приводил полное решение математической задачи с тем, чтобы студент сконцентрировался на методическом компоненте задания. В результате существенная, если не большая, часть заданий приобрела *бифункциональный* характер, то есть оказалась пригодной к использованию при изучении как математических, так и методических дисциплин.

Принцип единства банка упражнений и методики его использования в идеале состоит в том, что задачник по учебной дисциплине должен быть описанием методики изучения этой дисциплины на практических занятиях, включающим в себя, в качестве составной части, собственно банк упражнений. В данной книге этот принцип реализован следующим образом. Во-первых, группы задач или отдельные задачи сопровождаются авторскими комментариями. Комментарий, *предваряющий* группу задач, дает краткое описание объектов, которым посвящена эта группа, или целей изучения данной группы, или общего угла зрения, под которым целесообразно рассматривать данную группу, и т.п. Соответствующие абзацы набраны курсивом и отмечены слева вертикальной чертой. Комментарий, *завершающий* группу задач, описывает качественные результаты, полученные в процессе решения, а также возможные методы использования этих задач в педагогическом процессе. Некоторые из таких комментариев касаются математических или педагогических особенностей данной группы, а также возможностей постановки новых задач, связанных с изученными задачами. Соответствующие абзацы набраны курсивом. Во-вторых, в пособии содержится необычный раздел «Идеи, советы, намеки». В соответствии с названием в нем содержится информация, облегчающая последующее решение: удобные обозначения, или основная идея, или первый шаг решения, и т.п., однако в нем нет полных решений. Решения, если они необходимы по тем или иным причинам, приведены в разделе «Ответы и решения».

Наличие комментариев, дополнительного раздела «Идеи...» и достаточного количества решений позволяет работать с книгой различными способами. Опытный преподаватель может читать только тексты задач, выбирая те из них, которые полезны для организуемого им процесса обучения студентов. Менее опытный преподаватель имеет «опору» в виде предварительных и завершающих комментариев, а также в виде идей решений и ответов. Студент может использовать книгу почти как учебник: прочесть предварительный комментарий и текст задачи, сделать попытку самостоятельного решения, в случае неудачи воспользоваться подсказкой из раздела «Идеи...», сверить полученный результат с разделом «Ответы...» и, наконец, прочесть завершающий комментарий, осуществляя тем самым педагогическую и/или математическую рефлексию. Для студента педагогического вуза данная последовательность действий представляется вполне естественной.

Одна из особенностей данного учебного пособия состоит в том, что оно может быть использовано не только в процессе подготовки учителя, но и в его послевузовской деятельности. Действительно, некоторые педагогические идеи, заложенные в книге, могут способствовать обогащению того списка сценариев, которые использует учитель в своей работе. Например, идея бифункциональности заданий может трактоваться учителем самыми разными способами, поскольку решаемые школьником задачи помимо своей основной функции – способствовать освоению математики – могут выполнять и другие функции: освоение математической логики, освоение физики и т.п. Другая идея, реализуемая в пособии, также может оказаться близкой многим учителям. Это идея накопления: задач различной идейной направленности, математических методов решения задач, педагогических методов работы с задачами и проч. Наконец, к пособию можно подойти чисто утилитарно и использовать содержащиеся в нем математические задачи в процессе работы со школьниками.

Известно, что одним из свойств науки является ее личностно-социальный дуализм: с одной стороны, каждый результат изобретается конкретным исследователем, а с другой стороны, этот результат становится фактом науки только в процессе принятия его научным сообществом. Отражением этого обстоятельства в процессе преподавания может служить стремление преподавателя к двум взаимно дополняющим друг друга целям. С одной стороны, он должен стараться персонифицировать опыт своих учеников, что выражается, в частности, в предоставлении студентам индивидуально подобранных задач. С другой стороны, нужно стремиться, образно говоря, к «трехсубъектности» процесса преподавания, понимая под субъектами преподавателя, студента и *студенческую группу* в целом. Было бы естественным, чтобы часть информации была усвоена студенческим сообществом в результате коллективной деятельности: конкретный студент осваивает то или иное положение методики в процессе решения задач и объясняет его группе в целом. В этом случае личностно-социальный дуализм науки, а значит и научная деятельность в целом, был бы проиллюстрирован в процессе преподавания. Надеемся, что данный задачник будет способствовать достижению этой цели.

Приношу искреннюю благодарность Т. М. Кориковой за интерес к общему замыслу книги, психологическую поддержку и многочисленные полезные советы.

1. Сравнение

Сравнение – это мыслительная операция, метод познания, состоящий в установлении сходных/различных свойств в предметах и явлениях.

Глубокое, полноценное сравнение объектов должно выявлять как сходные, так и различные свойства объектов, те и другие в возможно большем количестве.

Нахождение признаков сходства сравниваемых объектов называется ***сопоставлением***, а нахождение признаков различия – ***противопоставлением***.

Во всех нижеследующих задачах предлагается сравнить два-три математических объекта: числа, алгебраические операции, функции, геометрические фигуры и т.д. При решении целесообразно делать акцент на неочевидном: если сравниваемые объекты очень похожи, то надо концентрироваться на поиске отличий, а если они заведомо сильно отличаются друг от друга, то полезно выявить их общие свойства.

Первые 7 задач относятся к числам и операциям над ними.

1.1. Сравните между собою рациональное и иррациональное число.

1.2. Сравните между собою множество рациональных чисел и множество иррациональных чисел.

1.3. Сравните между собою две алгебраические операции: сложение на множестве натуральных чисел и сложение на множестве целых чисел.

1.4. Сравните между собою две алгебраические операции: 1) сложение и умножение вещественных чисел; 2) сложение и вычитание вещественных чисел.

1.5. Теорию квадратных уравнений можно строить в трех различных ситуациях: 1) над полем рациональных чисел; 2) над полем вещественных чисел; 3) над полем комплексных чисел. Сравните эти теории.

1.6. Теорию уравнений вида $ax = b$ можно строить в трех различных ситуациях: 1) над множеством целых чисел; 2) над множеством рациональных чисел; 3) над множеством вещественных чисел. Сравните эти теории.

Обратите внимание на одну тонкость: в данной задаче мы говорим об «уравнениях вида $ax = b$», а в предыдущей задаче – о «квадратных уравнениях». Чем вызвано такое различие в формулировках?

1.7. Сравните систему рациональных чисел $(\boldsymbol{Q},+,\cdot,\leq)$ с системой вещественных чисел $(\boldsymbol{R},+,\cdot,\leq)$.

Задачи 1.8–1.11 посвящены «родственным» операциям на множествах различной природы, а также согласованию операций и отношений.

1.8. Сравните две операции: 1) сложение вещественных чисел и сложение вещественных функций вещественного аргумента; 2) умножение вещественных чисел и умножение вещественных функций вещественного аргумента; 3) деление вещественных чисел и деление вещественных функций вещественного аргумента.

1.9. Сравните две операции: 1) умножение матриц порядка n и умножение всюду определенных функций; 2) умножение матриц порядка n и композицию всюду определенных функций.

1.10. Рассмотрим две алгебры: $(\boldsymbol{R},+,\cdot)$ и $(\boldsymbol{R}[x],+,\circ)$, где $\boldsymbol{R}[x]$ – множество многочленов с вещественными коэффициентами, а $\circ$ – операция композиции. В одинаковой ли мере согласованы операции в этих алгебрах?

1.11. На множестве комплексных чисел можно ввести так называемый лексикографический порядок $<$ следующим образом: $a+bi<c+di \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<c \\ \begin{cases} a=c \\ b<d \end{cases} \end{array}\right.$.

Далее, как обычно, можно ввести нестрогий лексикографический порядок $\leq$ следующим способом: $z<u \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z<u \\ z=u \end{array}\right.$. Сравните построенное отношение нестрогого лексикографического порядка на множестве комплексных чисел со стандартным отношением порядка $\leq$ на множестве вещественных чисел.

Итак, построенный лексикографический порядок действительно является порядком, причем согласованным с операцией сложения на множестве комплексных чисел. Более того, для него справедлива аксиома существования разделяющего числа (докажите!). К сожалению, он не согласован с операцией умножения. По-видимому, это единственная причина, в силу которой лексикографический порядок не обладает интересными свойствами.

Задача 1.12 стоит особняком.

1.12. Сравните операции объединения и пересечения множеств с операциями дизъюнкции и конъюнкции высказываний.

Очень большое количество общих свойств для рассматриваемых пар операций наводит на мысль о том, что мы встретили два частных примера алгебр особого типа. Так и есть на самом деле.

Следующие 6 задач относятся к области математического анализа.

1.13. Сравните четную и нечетную функции.

1.14. Сравните множество четных функций с множеством нечетных функций.

1.15. Число $x=0$ является точкой локального минимума для следующих трех функций: $y=x^2$, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=|x|$. Сравните свойства этих функций и их графиков в окрестности точки экстремума.

1.16. Сравните три теоремы: 1) о пределе суммы двух функций; 2) о непрерывности суммы двух функций; 3) о производной суммы двух функций.

1.17. Сравните три теоремы: 1) о пределе произведения двух функций; 2) о непрерывности произведения двух функций; 3) о производной произведения двух функций.

1.18. Сравните три теоремы: 1) о пределе частного двух функций; 2) о непрерывности частного двух функций; 3) о производной частного двух функций.

Из девяти теорем, фигурирующих в задачах 1.16–1.18, можно образовывать другие группы и сравнивать теоремы внутри них. Естественно добавить к этому списку теоремы о непрерывности композиции функций и о производной композиции.

Две следующие задачи относятся к векторной алгебре.

1.19. Сравните попарно три правила сложения векторов: 1) правило треугольника; 2) правило середины; 3) правило параллелограмма.

1.20. Сравните между собой двумерное и трехмерное пространства.

Оставшиеся задачи раздела относятся к области элементарной геометрии. Первые три из них касаются сравнения свойств фигур.

1.21. Сравните между собой две геометрические фигуры, каждая из которых состоит из двух прямых: параллельные прямые и скрещивающиеся прямые.

1.22. Сравните между собой две геометрические фигуры: окружность и пару параллельных прямых.

1.23. Сравните между собой треугольник и трапецию.

Решение задачи показывает, что совершенно разные, на первый взгляд, фигуры обладают довольно длинным списком общих свойств. Это лишний раз показывает, что противоположные процедуры – сопоставление и противопоставление – являются неотъемлемыми частями единой процедуры сравнения.

Следующие три задачи посвящены традиционному материалу – взаимному расположению геометрических фигур.

1.24. Сравните взаимные расположения двух пар геометрических фигур: прямой и окружности, с одной стороны, и прямой и треугольника, с другой стороны.

1.25. Сравните взаимные расположения двух пар геометрических фигур: прямой и окружности, с одной стороны, и прямой и гиперболы, с другой стороны.

1.26. Сравните случаи расположения прямой относительно *невырожденной* кривой второго порядка со случаями расположения прямой относительно *вырожденной* кривой второго порядка.

В заключительной задаче мы хотим показать, что могут существовать различные точки зрения на типологию математических объектов, более конкретно, на типологию четырехугольников.

1.27. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, и точка X движется по лучу $[AD)$. Сравните свойства фигур $ABCD$ и $ABCX$.

Решение задачи показывает, что при движении точки X целый ряд важных свойств <u>трапеции</u> $ABCX$ оказывается справедливым для <u>параллелограмма</u> $ABCD$, который соответствует особому положению $X = D$ движущейся точки. Не является ли это основанием рассматривать параллелограмм как особый вид трапеции, подобно тому, как мы рассматриваем равнобедренный треугольник как особый вид треугольника?

2. Индукция и дедукция

> Какова природа умозаключения в математике? Действительно ли она дедуктивна, как думают обыкновенно? Более глубокий анализ показывает нам, что это не так, – что в известной мере ей свойственна природа индуктивного умозаключения и потому-то она столь плодотворна. Но от этого она не теряет своего характера абсолютной строгости…
>
> *А.Пуанкаре*, «О науке»

Дедукция – логическое умозаключение от общего к частному, от общих суждений к частным или другим общим выводам. *Дедуктивный метод* – способ исследования, изложения, при котором частные положения логически выводятся из общих положений (из аксиом, постулатов, правил, законов).

Индукция – логическое умозаключение от частных, единичных случаев к общему выводу, от отдельных фактов к обобщениям. *Индуктивный метод* – способ исследования, изложения, при помощи которого от наблюдений частных фактов, от экспериментальных данный переходят к установлению общих положений, принципов и законов.

Неполная индукция – умозаключение, логический прием мышления, в результате которого информация о *некоторых* элементах множества распространяется на *все* элементы множества или на множество *в целом*.

Полная индукция – умозаключение, логический прием, при котором вывод о свойствах множества *в целом* делается на основании рассмотрения *всех* элементов множества.

Принцип математической индукции. Пусть дана последовательность математических утверждений $P(1), P(2), \cdots, P(n), \cdots$, занумерованных натуральным параметром n. Пусть эта последовательность обладает двумя свойствами:

1) для некоторого r утверждение $P(r)$ истинно;

2) для любого натурального $n \geq r$ из истинности утверждений $P(k)$ при $r \leq k \leq n$ следует истинность утверждения $P(n+1)$.

Тогда утверждения $P(n)$ верны при всех $n \geq r$.

Задачи 2.1–2.4 несут методологическую нагрузку, поскольку иллюстрируют роль и взаимодействие индукции и дедукции в математике. При их рассмотрении целесообразно использовать один из следующих сценариев. Сценарий 1. Распределите задачи 2.1–2.3 среди трех микрогрупп студентов, добейтесь полного решения, организуйте сообщения представителей микрогрупп о полученных результатах, а затем обратитесь к задаче 2.4, в которой предлагается проанализировать математическую деятельность по решению задач путем ответа на вопросы общего, идейного характера. Сценарий 2. Рассмотрите задачи парами: 2.1 и 2.4, 2.2 и 2.4, 2.3 и 2.4. Решение первой задачи из пары представляет собой математическую деятельность, а решение второй – анализ математической деятельности с более общих позиций.

2.1. *Выявите* общие свойства следующих функций: $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$, $f_2(x)=x^3$, $f_3(x)=\sin x$, $f_4(x)=\operatorname{sh}(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$, $f_5(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$. *Вычислите* производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

Читая условие задачи, обратите внимание на глаголы, выделенные курсивом. Они указывают на те разнообразные умственные действия, которые придется выполнить при решении этой математической задачи. Интересно, что «доказывание», столь характерное для математики, является <u>*последним*</u> *этапом решения задачи, причем, как вы увидите, не самым трудным.*

2.2. *Выявите* общие свойства следующих функций: $f_1(x)=\dfrac{1}{x^4}$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=\cos x$, $f_4(x)=|x|$, $f_5(x)=\Delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$. *Вычислите* производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

См. завершающий комментарий к задаче 2.1.

2.3. *Выявите* общие свойства следующих функций: $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=\operatorname{tg}2x$, $f_3(x)=\sin 3x$, $f_4(x)=\text{const}$, $f_5(x)=\{x\}$ – дробная часть числа x. *Вычислите* производные этих функций и *выясните*, обладают ли они каким-либо общим свойством. *Сформулируйте* гипотезу и *докажите* ее истинность.

См. завершающий комментарий к задаче 2.1.

2.4. Какого типа умозаключения, индуктивные или дедуктивные, выполняются в процессе решения задач 2.1–2.3? Если выполняются умозаключения обоих типов, то на каком этапе решения делается каждое из них?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый <u>*индуктивно-дедуктивный дуализм*</u>. *Это означает, что природа умозаключения в математике является одновременно и индуктивной, и дедуктивной. Интуиция, основанная на индуктивных умозаключениях, служит средством первичного получения результата, а логика, основанная на дедукции, служит средством его строгого обоснования.*

Две следующие задачи не затрагивают понятий индукции и дедукции, поэтому они не относятся, строго говоря, к основному содержанию данного раздела. Тем не менее, они выявляют еще два дуалистических свойства математики, так что их рассмотрение в сочетании с задачей 2.4 вполне естественно.

2.5. В результате решения задач 2.1–2.3 в соответствии со сценарием 1 (см. вступительный комментарий к задаче 2.1) академическая группа студентов усвоила несколько теорем: а) производная четной функции является нечетной; б) производная нечетной функции является четной; в) производная периодической функции является периодической; г) при дифференцировании периодической функции ее период сохраняется. Проанализируйте процесс усвоения этих результатов *коллективным субъектом* процесса преподавания – группой в целом. Для этого ответьте на следующие вопросы. 1) Доказывал ли каждый студент каждую из теорем? 2) Каким образом студент узнал о тех теоремах, над которыми он не работал? 3) Имел ли студент возможность оценить в качестве эксперта истинность результатов других студентов? 4) Станет ли группа в целом считать теоремой рассматриваемое утверждение, если в процессе обсуждения этого утверждения будет обнаружена ошибка в доказательстве?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый личностно-социальный дуализм. Это означает, что имеют место несколько дополняющих друг друга фактов: (а) каждый математический результат изобретается лично тем или иным конкретным математиком или группой математиков; (б) математика может существовать только благодаря наличию особого социального института – научного сообщества; (в) изобретенный результат становится фактом науки только после его принятия научным сообществом; (г) процесс принятия нового результата включает в себя обмен информацией о содержании нового результата и различные виды экспертных оценок.

2.6. Математические результаты, содержащиеся в задачах 2.1–2.3, можно получить другим способом, который мы назовем Сценарием 3: «**Задача.** Докажите, что если функция является дифференцируемой и нечетной, то ее производная четна. **Решение.** Продифференцировав равенство $f(-x)=-f(x)$, получим, что $f'(-x)=f'(x)$, что и доказывает четность производной». Который из двух способов работы с задачей, Сценарий 1 или Сценарий 3, больше похож на работу математика-профессионала, изобретающего новые теоремы? Для ответа на этот основной вопрос ответьте на ряд вспомогательных вопросов, применив их к каждому из сценариев. 1) Делает ли студент какие-либо наблюдения над математическими объектами? 2) Формулирует ли студент какие-либо гипотезы? 3) Кто формулирует доказываемое утверждение, студент или автор задачника?

Результат решения данной задачи иллюстрирует тот факт, что математике присущ так называемый деятельностно-продуктивный дуализм. Это означает, что понятие математики включает в себя как деятельность по получению нового знания, так и продукт этой деятельности – сумму полученных к данному моменту математических знаний.

Задачи 2.7–2.14 посвящены различным аспектам метода математической индукции. Главными из них являются задачи 2.7–2.10. Проводя педагогический анализ их решений, следует обращать внимание на роль и место индуктивных и дедуктивных рассуждений, а также на «количественное» соотношение между ними.

2.7. Докажите тождество $1^3+2^3+\cdots n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

При решении этой задачи метод математической индукции предстает как удобная схема доказательства заранее сформулированного утверждения. При этом производится чисто дедуктивная деятельность.

2.8. Выясните, имеют ли числа вида $x_n = 7^n - 1$ какой-либо общий делитель.

В формулировке задачи присутствует натуральный параметр n, так что естественно предположить применимость метода математической индукции. Однако никакого утверждения не сформулировано, а вместо этого указано лишь направление поиска такого утверждения. Естественно, что в процессе решения определенное место занимают индуктивные рассуждения, позволяющие сформулировать гипотезу, а собственно метод математической индукции (дедуктивный метод!) лишь завершает решение. Необходимость использования как индуктивных, так и дедуктивных рассуждений для получения желаемого результата роднит эту задачу с задачами 2.1–2.3.

2.9. Докажите, что квадрат можно разрезать на 4, 6, 8, 9 квадратов. На какое еще число квадратов можно разрезать квадрат?

В условии задачи ничто не указывает на применимость метода математической индукции, поскольку отсутствует натуральный параметр. Большую часть решения занимает рассмотрение частных случаев, которое само по себе не является индуктивным рассуждением. Только в процессе решения (пункт 3) обнаруживается индукционный переход, позволяющий применить метод математической индукции, причем в его расширенной формулировке. Так проявляется часто встречающееся обстоятельство: при решении элементарных задач, особенно с младшими школьниками, математическая индукция используется в скрытой форме.

2.10. (Ханойская башня.) На одну из трех палочек насажены 10 колец разного диаметра так, что меньшее кольцо лежит на большем. За какое наименьшее число перекладываний можно переложить их на другую палочку, пользуясь вспомогательной третьей, если в процессе перекладываний запрещено класть большее кольцо на меньшее?

Структура решения достаточно сложна и включает в себя а) рассмотрение простейших случаев; б) построение рекурсивного алгоритма – отнюдь не очевидный шаг; в) выдвижение гипотезы; г) проверку гипотезы методом математической индукции. Таким образом, собственно «метод математической индукции» играет не слишком большую роль. Задача о ханойской башне является одной из лучших задач на индукционный метод рассуждения, поскольку ярко иллюстрирует соотношение и взаимную обусловленность индукции и дедукции в решении математических задач.

Предыдущие примеры показывают, что выдвижение гипотез является необходимым этапом решения многих, если не большинства, задач. Тем не менее, следует относиться к гипотезам критически, о чем говорят две следующие задачи.

2.11. (Пример Эйлера.) Убедитесь, что значения многочлена $f(n)=n^2-n+41$ при $n=1,2,\cdots,40$ являются простыми числами. Можно ли сделать вывод о том, что для любого n число $f(n)$ является простым?

Пример показывает, что гипотезы, сделанные при частных наблюдениях, не всегда являются верными, даже если наблюдений «достаточно много».

2.12. (Пример Ферма.) П.Ферма высказал предположение, что все числа вида $F(n)=2^{2^n}+1$ являются простыми. Убедитесь в том, что это верно при $n=$ $=1,2,3,4$. Прав ли Ферма?

Отметим, что справедливость или несправедливость предположения Ферма были отнюдь не очевидны, поскольку при росте n числа $F(n)$ растут весьма быстро. Во всяком случае, на его опровержение потребовалось порядка 60–100 лет, поскольку контрпример, приведенный в ответе, был получен Эйлером в 1732 г., а Ферма жил в 1601-1665 гг. Настойчивые усилия получить с помощью ЭВМ хотя бы одно новое простое число Ферма пока не увенчались успехом (по состоянию на 2001 г.).

Следующая задача показывает, что ошибку можно сделать не только при выдвижении гипотезы.

2.13. Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Докажем, что все студенты в группе одного роста. Действительно, в группе из одного человека студент одного роста сам с собой. Предположим, что в группе из k человек все студенты одного роста. Рассматривая группу из $k+1$ человека, выделим в ней две различные подгруппы по k человек в каждой. По предположению индукции в каждой из них студенты одного роста. Поскольку существует студент, принадлежащий обеим подгруппам, получаем, что все студенты большой группы одного роста. Согласно принципу математической индукции при любом количестве человек в группе все студенты одного роста».

2.14. Назовите важные теоремы школьного и вузовского курса математики, которые доказываются методом математической индукции.

Задачи 2.15–2.21 посвящены методам неполной и полной индукции.

2.15. В одном из школьных учебников свойство $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$ степени с натуральным показателем изучается по следующей схеме. <u>На первом этапе</u> вычисляются два выражения, $2^3\cdot 2^5(=256=2^8=2^{3+5})$ и $3^1\cdot 3^4(=243=3^5=3^{1+4})$, и делается наблюдение: основания перемножаемых степеней одинаковы, и при перемножении показатели степеней складываются. <u>На втором этапе</u> автор «осмеливается предположить», что открыта общая закономерность: для любого числа a и любых натуральных чисел n и k справедливо равенство $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$. <u>На третьем этапе</u> производится доказательство сформулированной теоремы. Проанализируйте эту схему, ответив на следующие вопросы.

1) Какого типа умозаключения – индуктивные, дедуктивные, те и другие – используются при изучении данного свойства?

2) На каком этапе изучения применяются индуктивные умозаключения? дедуктивные умозаключения?

3) Если применяются индуктивные умозаключения, то к какому виду они принадлежат: полная индукция, неполная индукция, математическая индукция?

4) Что общего у данной схемы изложения с процессом решения задач 2.8–2.10 на метод математической индукции?

5) Что общего у данной схемы изложения с процессом решения задач 2.1–2.3?

Рассуждения, приведенные в условии задачи, являются еще одним проявлением индуктивно-дедуктивного дуализма математики.

2.16. Какие факты школьного курса математики обосновываются с помощью неполной индукции? Подкрепите ответ ссылкой на конкретные учебники.

2.17. Как меняется доля утверждений, обосновываемых с помощью неполной индукции, при переходе от класса к классу? Подкрепите ответ ссылкой на конкретные учебники.

2.18. Теорема о мере вписанного угла доказывается по следующей схеме: а) сначала она доказывается для случая, когда центр окружности лежит на стороне угла; б) затем рассматривается случай, когда центр окружности лежит внутри угла; в) наконец, рассматривается случай, когда центр окружности лежит вне угла. Какой метод применяется при доказательстве этой теоремы?

2.19. Какие теоремы школьного (вузовского) курса математики доказываются методом полной индукции? Для каждого из приведенных вами примеров укажите список частных случаев, необходимых для полного доказательства.

2.20. Сравните схемы доказательств двух тождеств: $\sqrt{a^2}=|a|$ и $\rho(a,b)=|b-a|$, где $\rho(a,b)$ – расстояние между точками a и b на числовой прямой.

2.21. Сравните схемы доказательств двух теорем: а) о мере вписанного угла; б) необходимое следствие экстремума всюду дифференцируемой функции. В чем сходство и различие?

Задачи 2.22–2.31 связаны с логическим обоснованием общепринятых схем доказательств. Эти схемы имеют общее название – правила вывода. Задачи следуют парами: в одной из них обосновывается правило, а в другой предлагается привести примеры теорем из курса математики, в доказательстве которых применяется соответствующее правило. Данные задачи охватывают основные, но не все, правила вывода.

2.22. ***(Правило силлогизма.)*** Докажите следующее: если высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow C$ оба истины, то высказывание $A \Rightarrow C$ также является истинным. Какую рекомендацию по поводу доказательства теоремы $A \Rightarrow C$ можно дать на основании правила силлогизма?

2.23. Приведите примеры теорем, в доказательстве которых используется правило силлогизма. Проведите «ревизию» ваших знаний и найдите, скажем, десяток примеров.

2.24. ***(Правило разбора случаев.)*** Докажите следующее: если высказывания $A \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow C$ оба истины, то высказывание $A \vee B \Rightarrow C$ также является истинным. Какую рекомендацию по поводу доказательства теоремы $A \vee B \Rightarrow C$ можно дать на основании правила разбора случаев?

2.25. Приведите примеры теорем, в доказательстве которых используется правило разбора случаев. Проведите «ревизию» ваших знаний и найдите возможно большее количество примеров.

2.26. ***(Метод от противного.)*** Докажите следующее: 1) если высказывание $A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ истинно, то высказывание $A \Rightarrow B$ также является истинным; 2) если высказывание $A \wedge \overline{B} \Rightarrow B$ истинно, то высказывание $A \Rightarrow B$ также является истинным; 3) если высказывание $A \wedge \overline{B} \Rightarrow C \wedge \overline{C}$ истинно, то высказывание $A \Rightarrow B$ также является истинным. Как использовать метод от противного?

2.27. Приведите примеры теорем, в доказательстве которых используется метод от противного. Учитывая, что метод от противного имеет три модификации, вам нужно привести не менее трех примеров. Не ограничивайтесь этим, а проведите «ревизию» ваших знаний и найдите, скажем, десяток примеров.

2.28. (правило заключения). Докажите следующее: если истинны импликация $A \Rightarrow B$ и ее посылка A, то заключение B также является истинным.

2.29. Приведите примеры умозаключений, в обосновании которых используется правило заключения. Проведите «ревизию» ваших знаний и найдите возможно большее количество примеров.

2.30 (правило отрицания). Докажите следующее: если импликация $A \Rightarrow B$ истинна, а ее заключение B ложно, то посылка A также является ложной.

2.31. Приведите примеры умозаключений, в обосновании которых используется правило отрицания. Проведите «ревизию» ваших знаний и найдите возможно большее количество примеров.

3. Анализ и синтез

> Наша перифраза (текста Паппа – А.Я.) несколько более четко, чем оригинал, указывает на естественную связь, существующую между анализом и синтезом. ... Естественно, сначала идет анализ, затем синтез. Анализ есть изобретение, синтез исполнение, *анализ – есть составление плана, а синтез – его осуществление.*
>
> *Д.Пойа*, «Как решать задачу»

Анализ – совокупность мыслительных операций, логический прием, состоящий в *разложении* изучаемого объекта на характерные для него составные элементы, *выделении* в нем отдельных свойств, изучении каждого элемента или свойства объекта *в отдельности*.

Синтез – совокупность мыслительных операций, логический прием, состоящий в *соединении* элементов или свойств изучаемого объекта, полученных при анализе, в установлении *взаимосвязей* между частями и получении знания об этом объекте как о *едином целом*.

Анализ и синтез – две стороны единого мыслительного процесса, они взаимосвязаны и трудноотделимы друг от друга, так что в большинстве случаев целесообразно говорить о единой аналитико-синтетической деятельности.

Пусть нам нужно решить задачу, имеющую условие A и требование B. Говорят, что в доказательстве использован метод ***восходящего анализа,*** если применена следующая логическая схема:

$$B \overset{1}{\Leftarrow} A_1 \overset{2}{\Leftarrow} A_2 \overset{3}{\Leftarrow} \cdots \overset{n}{\Leftarrow} A_n = A. \qquad (1)$$

Другими словами, сначала подбирают условие A_1, *достаточное* для выполнения свойства B, затем подбирают условие A_2, *достаточное* для выполнения свойства A_1, и так далее до тех пор, пока на последнем шаге не получим свойство A, являющееся условием задачи. (Здесь и далее числа над стрелками показывают порядок выполнения импликаций.)

Говорят, что в доказательстве использован метод ***нисходящего анализа,*** если применена следующая логическая схема:

$$\begin{matrix} B \overset{1}{\Rightarrow} A_1 \overset{2}{\Rightarrow} A_2 \overset{3}{\Rightarrow} \cdots \overset{n}{\Rightarrow} A_n = A \\ B \overset{2n}{\Leftarrow} A_1 \overset{2n-1}{\Leftarrow} A_2 \overset{2n-2}{\Leftarrow} \cdots \overset{n+1}{\Leftarrow} A_n = A \end{matrix}. \qquad (2)$$

Другими словами, сначала из свойства B выводятся следствия A_1, A_2 и так далее до тех пор, пока не получится условие A, а затем обращаются все стрелки.

Очень часто, но не всегда, нисходящий анализ реализуется в виде цепи эквиваленций

$$B \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow A_n = A, \qquad (3)$$

поскольку обратимость каждой импликации бывает очевидна.

Говорят, что в доказательстве использован ***синтетический*** метод, если применена следующая логическая схема:

$$A \overset{1}{\Rightarrow} A_1 \overset{2}{\Rightarrow} A_2 \overset{3}{\Rightarrow} \cdots \overset{n}{\Rightarrow} A_n = B. \qquad (4)$$

Другими словами, из условия A выводятся следствия до тех пор, пока не получится требование B.

Оба вида анализа объединяет то обстоятельство, что в процессе рассуждений преобразуется *требование* задачи. В отличие от анализа, в процессе синтетического рассуждения преобразуется *условие* задачи.

Первые три задания представляют собой упражнения на распознавание и преобразование логических схем доказательств.

3.1. Ниже будут предложены текстовая задача и два ее решения. Охарактеризуйте каждое из них в терминах «анализ – синтез» и определите, которой из логических схем (1)–(4) оно следует. Если возможно, выявите аналитические элементы в синтетическом решении и синтетические элементы в аналитическом решении.

Задача. Полярникам дрейфующей станции сбросили с самолета два контейнера. В первом было 32 бочки с топливом, а во втором – 24 ящика с продуктами. Чему равен вес одного ящика, если каждая бочка весила 70 кг, а суммарный вес всего груза составил 3440 кг?

Решение 1. Начнем с *поиска* способа решения. а) Мы могли бы узнать вес одного ящика, если бы знали вес всех продуктов, поскольку мы знаем количество ящиков. Следовательно, *достаточно* узнать вес всех продуктов. б) Мы могли бы узнать вес продуктов, если бы знали вес топлива, поскольку общий вес груза известен. Следовательно, *достаточно* узнать вес топлива. Полная информация о топливе известна из условия, поэтому мы можем *реализовать* способ решения в виде последовательности вопросов, позволяющих решить промежуточные задачи а) и б).

1) Чему равен вес топлива? $32 \cdot 70 = 2240$ (кг)

2) Чему равен вес продуктов? $3440 - 2240 = 1200$ (кг)

3) Чему равен вес одного ящика? $1200 : 24 = 50$ (кг)

Решение 2. Пусть x – количество ящиков. По условию получаем, что вес продуктов равен $24x$ (кг), а вес топлива равен $32 \cdot 70 = 2240$ (кг). Теперь можно выразить вес груза *двумя способами*: с одной стороны, он равен 3440 (кг), а с другой стороны, он равен $24x + 2240$ (кг). *Приравняв* эти два выражения, получим уравнение $24x + 2240 = 3440$. Решив его, получим, что $x = 50$.

3.2. Известен признак параллелограмма: если две стороны четырехугольника равны и параллельны, то этот четырехугольник является параллелограммом. Ниже будут даны три доказательства этого факта. Охарактеризуйте каждое из них в терминах «анализ – синтез» и определите, которой из логических схем (1)–(4) оно следует. Если возможно, выявите аналитические элементы в синтетическом доказательстве и синтетические элементы в аналитическом доказательстве.

Доказательство 1. Пусть четырехугольник $ABCD$ таков, что

$$AD \parallel BC, \qquad (*)$$

$$AD = BC. \qquad (**)$$

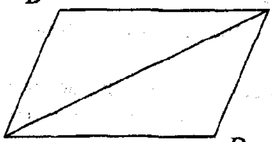


Рис. 1

1) Из условия (*) *следует*, что $\angle BCA = \angle DAC$. 2) Из этого равенства, из условия (**) и того факта, что диагональ AC является общей стороной треугольников BCA и DAC, *следует*, что $\Delta BCA = \Delta DAC$. 3) Из равенства треугольников *следует*, что $\angle DCA = \angle BAC$. 4) Из равенства этих углов *следует*, что $AB \parallel CD$. 5) Из этого соотношения и условия (*) *следует*, что $ABCD$ – параллелограмм.

Доказательство 2. 1) Для доказательства «параллелограммности» четырехугольника $ABCD$ нужно доказать попарную параллельность противоположных сторон. В силу условия (*) *достаточно* доказать, что $AB \parallel CD$. 2) Для доказательства параллельности этих прямых *достаточно* доказать, что $\angle CAB = \angle ACD$. 3) Для доказательства равенства углов *достаточно* доказать, что они лежат против равных сторон в равных треугольниках. 4) В силу условия (**) эти углы действительно лежат против равных сторон BC и AD соответственно в треугольниках CAB и ACD. Теперь *достаточно* доказать равенство названных треугольников. 5) Равенство треугольников действительно имеет место, поскольку AC – их общая сторона, $AD = BC$ по условию (**), а из условия (*) следует, что $\angle ACB = \angle CAD$.

Доказательство 3. 1) Если допустить, что $ABCD$ – параллелограмм, то получим, что $CB \parallel AD$ и $AB \parallel CD$. 2) Из параллельности сторон следует, что $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle ACD = \angle CAB$. 3) По признаку равенства треугольников получаем, что $\Delta ACB = \Delta CAD$. 4) Отсюда следует, в частности, что $CB = AD$ и $\angle ACB = \angle CAD$. 5) Сохраняя первое утверждение и преобразуя второе, получим, что $CB = AD$ и $CB \parallel AD$, то есть *мы пришли к условию теоремы. Теперь проверим, обратимы ли все шаги наших рассуждений.* 6) Из соотношений $CB = AD$ и $CB \parallel AD$ следует, что $CB = AD$ и $\angle ACB = \angle CAD$. 7) По признаку равенства треугольников получаем, что $\Delta ACB = \Delta CAD$. 8) Из равенства треугольников следует, что $\angle ACB = \angle CAD$ и $\angle ACD = \angle CAB$. 9) Из последних соотношений следует, что $CB \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, а это и означает, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Полезно обсудить сравнительные достоинства трех доказательств. Первое из них кратко и понятно, однако остается неясным, каким образом возникла последовательность рассуждений. Второе несколько сложнее и требует опыта подбора достаточных условий, но зато все шаги имеют хорошее логическое и психологическое обоснование. Третье доказательство существенно длиннее первых двух, но зато дает больше, чем требуется в упражнении. Действительно, мы доказали критерий «параллелограммности», то есть необходимое и достаточное условие, а не просто признак, то есть достаточное условие.

Задачи 3.1–3.2 показывают, что в аналитических рассуждениях присутствуют синтетические элементы, а в синтетических – аналитические, и этот факт является частным проявлением общей закономерности.

3.3. Преобразуйте каждое из трех доказательств предыдущей задачи таким образом, чтобы построенное вами доказательство соответствовало логической схеме (3).

Три следующие задания представляют собой упражнения на конструирование аналитических и синтетических доказательств.

3.4. Известно, что противоположные углы четырехугольника попарно равны между собой. Является ли он параллелограммом? Обосновывая свой ответ, приведите доказательства четырех типов, соответствующих логическим схемам (1)–(4). Выявите сравнительные достоинства ваших доказательств.

3.5. Рассмотрите две теоремы: 1) о трех перпендикулярах; 2) о свойстве биссектрисы угла треугольника. Докажите каждую их них методом восходящего анализа и синтетическим методом. Выявите сравнительные достоинства ваших доказательств.

3.6. Рассмотрите две теоремы: 1) признак перпендикулярности прямой и плоскости в векторной форме; 2) свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе. Докажите каждую их них методом нисходящего анализа и синтетическим методом. Выявите сравнительные достоинства ваших доказательств.

Мы убедились в том, что как синтетические, так и аналитические доказательства имеют свои преимущества по сравнению с доказательствами других типов. Интересно понять, какие доказательства доминируют в школьных учебниках и почему им отдано предпочтение.

Выявляя аналитико-синтетическую природу математических рассуждений, мы рассмотрели два типа задач: сюжетные арифметические задачи и геометрические задачи на доказательство. Рассмотрим теперь некоторые другие типы задач, характерные для школьной программы: задачи на построение, решение уравнений и неравенств, доказательство тождеств и неравенств.

3.7. Постройте с помощью циркуля и линейки 1) биссектрису угла; 2) середину отрезка; 3) точку, делящую отрезок в отношении 3:7; 4) «золотое сечение» отрезка. Охарактеризуйте ваши решения в терминах «анализ – синтез» и определите, которой из логических схем (1)–(4) оно следует. Если возможно, выявите аналитические элементы в синтетическом доказательстве и синтетические элементы в аналитическом доказательстве.

В процессе решения становится ясным, что нецелесообразно (хотя и возможно) сразу обращать стрелки в схеме рассуждений (2).

3.8. Решите уравнение $\sqrt{x+11}=x-1$ двумя методами: 1) методом следствий; 2) методом равносильных переходов. Охарактеризуйте каждое из решений в терминах «анализ – синтез» и определите, которой из логических схем (1)–(4) оно следует. Если возможно, выделите аналитические моменты в синтетических рассуждениях и синтетические моменты в аналитических рассуждениях.

В дальнейшем будем считать, что уравнения решаются на основе аналитического метода.

3.9. 1) Решите неравенство $25^x>125^{3x-2}$. 2) Докажите тождество $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. 3) Докажите, что для любых положительных чисел справедливо неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, и выясните, в каких случаях оно является строгим. Охарактеризуйте каждое из решений в терминах «анализ – синтез» и определите, которой из логических схем (1)–(4) оно следует. Если возможно, выделите аналитические моменты в синтетических рассуждениях и синтетические моменты в аналитических рассуждениях.

Итак, задачи 3.7–3.9 иллюстрируют тот факт, что аналитический метод рассуждений используется при решении задач на построение, при решении уравнений и неравенств, а также при доказательстве тождеств и неравенств.

Следующая задача интересна тем, что в ней ставятся несколько разных вопросов различной сложности относительно одного математического объекта. Составляя план ответа на каждый из вопросов, целесообразно «забыть», что вы уже отвечали на предыдущий вопрос, и рассуждать так, как будто вы не имеете никакой предшествующей информации.

3.10. Ниже будет предложено несколько задач. Решите их. Для каждого из решений охарактеризуйте отдельные шаги и решение в целом в терминах «анализ – синтез».

1) Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет конечный предел.

2) Имеет ли конечный предел возрастающая ограниченная последовательность?

3) Найдите условия, при которых возрастающая ограниченная последовательность имеет конечный предел.

4) Существуют ли условия, при которых возрастающая ограниченная последовательность имеет конечный предел?

Помимо решения данных задач и описания решений в терминах «анализ – синтез», целесообразно обсудить саму формулировку заданий. В каких заданиях предписывается выполнить некоторые заведомо возможные действия? В каких вопросах предлагается изучить ситуацию и определить наличие или отсутствие математического объекта? Какие из вопросов носят более общий характер по сравнению с другими? Какие из вопросов больше других похожи на проблемы, возникающие в реальном математическом исследовании?

4. Конкретизация, обобщение и абстрагирование

> Процесс мышления – это прежде всего анализирование и синтезирование того, что выделяется анализом; это, затем, абстракция и обобщение, являющиеся производными от них. Закономерности этих процессов и их взаимоотношения друг с другом суть основные внутренние закономерности мышления.
>
> *С.А.Рубинштейн*

В рамках данного пособия используется следующая терминология.

Конкретизацией называется логический прием, состоящий в переходе от более общего к менее общему или от общего к единичному. (Наряду с термином «конкретизация», в литературе используется равносильный ему термин «специализация».)

Обобщением называется логический прием, состоящий в переходе от единичного к общему или от менее общему к более общему.

Абстрагированием называется логический прием, состоящий в *отделении* общих существенных свойств, выделенных в результате обобщения, от прочих несущественных или необщих свойств рассматриваемых предметов или отношений, и *отбрасывание* последних.

Из приведенных определений видно, что описанные логические приемы тесно связаны друг с другом и существуют только в неразрывном взаимодействии. Так, обобщение и конкретизация действуют, образно говоря, в «противоположных направлениях», а абстрагирование неотделимо от обобщения. Суть данных приемов будет проиллюстрирована и выявлена в процессе решения нижеследующих задач.

Конкретизация

Задачи 4.1–4.18 посвящены проявлениям конкретизации в математическом анализе. Первые две задачи связаны с конкретизацией простейших правил дифференцирования.

4.1. Если функции f, g, h являются дифференцируемыми во всех точках своих областей определения, то для них справедливы формулы

$$(f+g+h)'=f'+g'+h' \qquad \text{(А)}$$

$$(f\cdot g\cdot h)'=f'\cdot g\cdot h+f\cdot g'\cdot h+f\cdot g\cdot h' \qquad \text{(Б)}$$

Конкретизируйте эти формулы таким образом, чтобы из них получились обычные правила дифференцирования $(f+g)'=f'+g'$ и $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$ соответственно.

4.2. Если функции f, g, h являются дифференцируемыми во всех точках своих областей определения, то для них справедлива формула

$$(f\circ g\circ h)'=(f'\circ g\circ h)\cdot(g'\circ h)\cdot h' \qquad \text{(В)}$$

Конкретизируйте эту формулу таким образом, чтобы из нее получилось правило дифференцирования композиции $(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g'$.

Здесь правило дифференцирования композиции функций, выраженное формулой $(f(g(x))'=f'(g(x)g'(x)$, *записано без использования символа аргумента. Запись функций без использования аргумента сама по себе является полезным упражнением.*

Нетрудно заметить, что преобразование равенств (А)–(В) *к требуемому виду приводит к необходимости использовать три специальные функции, а именно, две функции-константы, нулевую и единичную, и тождественное преобразование.*

Следующие две задачи связаны с конкретизацией теорем о среднем в дифференциальном исчислении.

4.3. Конкретизируйте формулу Коши и формулировку соответствующей теоремы (о среднем в дифференциальном исчислении) таким образом, чтобы из нее получились формула и теорема Лагранжа.

4.4. Конкретизируйте формулу Лагранжа и формулировку соответствующей теоремы (о среднем в дифференциальном исчислении) таким образом, чтобы из нее получилась теорема Ролля.

Задачи 4.5–4.18 связаны с выбором конкретной функции из семейства функций. Сначала мы рассматриваем простые семейства функций, изучаемые в школе, а затем переходим к более сложным.

4.5. Из семейства линейных функций $y=ax+b$ выберите такую функцию, чтобы ее график пересекался с осью Ox под углом в 60° и проходил через точку $A(2,-\sqrt{3})$.

4.6. Из семейства квадратичных функций $y = a(x-p)^2 + q$ выберите такую функцию, которая возрастает на промежутке $[3,+\infty)$. Среди возможных значений параметра p выберите *наибольшее*.

4.7. Из семейства квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$ выберите такую функцию, которая возрастает на промежутке $(-\infty,3]$. При $a = -1$ (такое возможно) выберите *наименьшее* значение параметра b.

4.8. Дано семейство кубических функций $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Известно, что каждая из функций этого семейства имеет точно одну точку перегиба. Выберите такую функцию из этого семейства, чтобы ее график перегибался через прямую, угловой коэффициент которой 1) отрицателен; 2) равен нулю; 3) положителен.

Очевидно, что в задачах 4.5–4.8 речь идет о многочленах, степень которых растет, но не слишком велика. При этом задачи 4.6 и 4.7, по сути дела, одинаковы, просто квадратичная функция записана в них в разных формах.

4.9. Из семейства функций $y = \sin ax$, где $a > 0$, выберите такую функцию, которая возрастает на промежутке [-50, 50]. Среди возможных значений параметра a выберите *наибольшее*.

4.10. Из семейства функций $y = \operatorname{tg} ax$, где $a > 0$, выберите такую функцию, у которой числа $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ входят в область определения.

4.11. Дано семейство показательных функций $y = a^x$. 1) Выберите такую функцию из этого семейства, чтобы ее график проходил через точку а) $A(3,5)$; б) $B(3,1/3)$. 2) Известно, что данное семейство не содержит такой функции, график которой проходил бы через точку $C(3, p)$. Каково значение p?

4.12. Из семейства функций $y = \operatorname{arctg} ax$ выберите такую функцию, график которой перегибается через прямую, образующую угол 30° с отрицательной полуосью Ox.

Нетрудно видеть, что для составления подобных задач можно использовать другие функции и их семейства, изучаемые в школе, например, логарифмическую функцию, косинус и т.д.

Задачи 4.13–4.17 посвящены семействам функций другой природы, а именно, общим решениям дифференциальных уравнений, спиралям, винтовым линиям.

4.13. Семейство неявно заданных функций $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$ является общим решением некоторого дифференциального уравнения. Выберите из этого семейства такое частное решение, которое удовлетворяет начальным условиям $y(1) = 2$.

4.14. Семейство функций $y = -\ln(C - x^2)$ является общим решением некоторого дифференциального уравнения. Выберите такую интегральную кривую, которая проходит через точку $A(0,1)$.

Две последние задачи, по сути дела, одинаковы, просто в первом случае используется термин «частное решение», а во втором – термин «интегральная кривая».

4.15. Семейство логарифмических спиралей задано параметрическими уравнениями $x = e^{at}\cos bt$, $y = e^{at}\sin bt$. Выберите такую кривую из этого семейства, которая 1) вырождается в точку; 2) вырождается в окружность; 3) вырождается в луч; 4) проходит через точку $P(1, 0)$, образуя угол 45° с осью Ox.

С этой задачей можно связать достаточно большое исследование. Читателю может быть неясно, что данные кривые действительно образуют спирали, которые почему-то (почему?) названы логарифмическими. Можно не заметить, что точка P является особой в том смысле, что через нее проходят все кривые семейства. Естественно попытаться выяснить, как проходят кривые в зависимости от значений a и b. Наконец, можно выяснить, чем отличаются две различные параметризации, задающие одну и ту же кривую. Отметим, что спирали данного вида являются однопараметрическими подгруппами в мультипликативной группе комплексных чисел. Впрочем, этот факт далек от целей изучения общей методики преподавания математики.

4.16. Цилиндрическая поверхность в пространстве задана уравнением $x^2 + y^2 = 1$. На этой поверхности задано семейство винтовых линий с помощью параметрических уравнений $x = \cos at$, $y = \sin at$, $y = bt$. Выберите такую кривую из этого семейства, которая 1) вырождается в точку; 2) вырождается в окружность; 3) вырождается в прямую.

Здесь также можно провести достаточно большое исследование, поставив примерно те же вопросы, что и по отношению к логарифмическим спиралям. В частности, полезно понять, что такое шаг винтовой линии. Отметим, что точка $P(1, 0, 0)$ является особой в том смысле, что все кривые семейства проходят через нее.

4.17. Цилиндрическая поверхность в пространстве задана уравнением $x^2 + y^2 = 1$. На этой поверхности задано семейство винтовых линий с помощью параметрических уравнений $x = \cos t$, $y = \sin t$, $y = bt$. Выберите такую кривую из этого семейства, которая проходит через точку $A(-\sqrt{3}/2, 1/2, 5\pi/4)$, делая при этом не более одного витка.

4.18. Цилиндрическая поверхность в пространстве задана уравнением $x^2 + y^2 = 1$. На этой поверхности задано семейство винтовых линий с помощью параметрических уравнений $x = \cos at$, $y = \sin at$, $y = t$. Выберите такую кривую из этого семейства, которая проходит через точку $B(-1/2, -\sqrt{3}/2, 2\pi/3)$, делая при этом не более полувитка.

Семейства винтовых линий в задачах 4.17 и 4.18 отличаются друг от друга. В задаче 4.17 две разных линии семейства отличаются друг от друга разными скоростями движения точки вдоль образующей, имея при этом одинаковые скорости движения вдоль направляющей. В задаче 4.18 две разные ли-

нии семейства отличаются друг от друга разными скоростями движения точки вдоль направляющей, имея при этом одинаковые скорости движения вдоль образующей.

Задачи 4.19–4.32 посвящены проявлениям конкретизации в алгебре. Классическим «полигоном» для иллюстрации этого понятия служит бином Ньютона, который рассматривается в задачах 4.19–4.21.

4.19. Докажите, что сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n.

4.20. Докажите, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

4.21. Придумайте какое-либо тождество для биномиальных коэффициентов, конкретизировав значения чисел a и b в формуле бинома Ньютона.

От вещественных чисел перейдем к комплексным числам, рассмотрев в задачах 4.22–4.25 некоторые аспекты теории.

4.22. *Зафиксируем* комплексное число z. С его помощью можно построить отображение $L_z : C \to C$, заданное равенством $L_z(u) = zu$ (его называют левым сдвигом на алгебре комплексных чисел). Известно, что если комплексное число u рассматривать как вектор, то отображение L_z является композицией гомотетии с положительным коэффициентом и поворота на некоторый угол. Конкретизируйте вид числа z таким образом, чтобы отображение L_z было 1) гомотетией; 2) поворотом.

4.23. Известно, что множество комплексных корней n-ой степени из единицы образует группу по умножению. Подберите натуральное число k таким образом, чтобы группа $\sqrt[k]{1}$ была подгруппой группы 1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[6]{1}$; 3) $\sqrt[12]{1}$.

4.24. Подберите натуральное число k таким образом, чтобы группа $\sqrt[6]{1}$ была подгруппой группы $\sqrt[k]{1}$.

Очевидно, что две последние задачи являются «взаимно обратными», поскольку сначала мы ищем группы, содержащиеся в $\sqrt[6]{1}$, а потом группы, содержащие в себе $\sqrt[6]{1}$. Результаты этих задач будут использованы при изучении обобщений.

4.25. Для комплексных чисел z и u их сумма и произведение, вообще говоря, не являются вещественными числами. Какой вид должны иметь эти числа, если известно, что их сумма и произведение являются вещественными?

Теперь поработаем в области линейной алгебры. Задачи 4.26–4.31 посвящены трем тесно связанным понятиям, а именно, матрицам, системам линейных уравнений и определителям.

4.26. Конкретизируйте значения элементов матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ таким образом, чтобы матрица приобрела 1) ранг 1; 2) ранг 2; 3) ранг 3. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что матрица имеет требуемый ранг; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких матриц бесконечно много.

4.27. Составьте совместную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, чтобы 1) общее решение зависело от двух числовых параметров; 2) общее решение зависело от одного числового параметра; 3) решение было единственным. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что система обладает требуемыми свойствами; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких систем бесконечно много.

4.28. Составьте несовместную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что система обладает требуемыми свойствами; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких систем бесконечно много.

4.29. Подберите такие свободные члены в системе линейных уравнений, при которых любая система является совместной.

4.30. Конкретизируйте значения элементов определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ таким образом, чтобы он 1) был отличен от нуля; 2) был равен нулю. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что определитель обладает требуемым свойством; во-вторых, его вид должен показывать, что таких определителей бесконечно много.

4.31. Известно, что определитель третьего порядка вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$. Конкретизируйте значения элементов определителя таким образом, чтобы из данной формулы получить формулу для вычисления определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

В заключение серии алгебраических задач рассмотрим одну знаменитую теорему из теории чисел.

4.32. Известна теорема Эйлера из теории чисел: если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m)$. Здесь $\varphi(m)$ – это функция Эйлера, равная количеству чисел, взаимно простых с m и не превосходящих m. Конкретизируйте эту теорему для случая, когда число m является простым.

Мы накопили достаточно много примеров, которые говорят об одном том же: следствие из математического факта является его конкретизацией

Взаимосвязь между теоремами Эйлера и Ферма хорошо иллюстрирует это обстоятельство.

Задачи 4.33–4.47 посвящены проявлениям конкретизации в области геометрии. Сначала поработаем с аффинными преобразованиями.

Аффинное преобразование координатной плоскости xOy задается равенствами

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (!)$$

4.33. Конкретизируйте равенства (!) таким образом, чтобы они задавали 1) тождественное преобразование; 2) параллельный перенос; 3) центроаффинное преобразование с центром в начале координат; 4) гомотетию с центром в начале координат; 5) поворот на некоторый угол.

Помимо заданных, можно сформулировать еще очень много вопросов подобного типа. Сопоставьте эту задачу с задачей об аффинных преобразованиях в разделе «Визуализация».

4.34. Подберите такие значения параметров, чтобы равенства (!) свелись к аффинным преобразованиям осей координат.

4.35. Подберите такие значения параметров, чтобы равенства (!) свелись к аффинному преобразованию 1) оси Ox; 2) оси Oy.

Теперь рассмотрим несколько примеров из элементарной математики.

4.36. В какой-то момент обучения школьникам становится известна формула квадрата суммы двух чисел: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Доказательство формулы квадрата разности можно провести двумя способами: 1) вычислить выражение $(a-b)^2$, перемножив два одинаковых множителя; 2) положить в предыдущей формуле $b = -c$. Который из двух способов можно считать применением метода конкретизации?

4.37. Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона. Конкретизируйте теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, считая, что треугольник является 1) остроугольным; 2) прямоугольным; 3) тупоугольным.

4.38. Известен следующий факт: «Если хорды AB и CD пересекаются в точке P, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$». 1) Конкретизируйте этот факт, считая, что хорды взаимно перпендикулярны и одна из них является диаметром. Сформулируйте требуемое утверждение, не используя буквенных обозначений. 2) Истолкуйте полученное утверждение применительно к высоте прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла.

4.39. Известен следующий факт: «Две окружности пересекаются в точках M и N. Если через точку P прямой MN провести касательные PA и PC к окружностям, то $PA = PC$. Здесь A и C – точки касания». Конкретизируйте этот факт, считая, что точки P, A, C лежат на одной прямой.

Одна из идей, часто используемых в математике, – нахождение предельного значения той или иной функции, предельного положения той или иной быть без вычислений ясно, что матрица имеет требуемый ранг; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких матриц бесконечно много.

4.27. Составьте совместную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, чтобы 1) общее решение зависело от двух числовых параметров; 2) общее решение зависело от одного числового параметра; 3) решение было единственным. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что система обладает требуемыми свойствами; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких систем бесконечно много.

4.28. Составьте несовместную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что система обладает требуемыми свойствами; во-вторых, ее вид должен показывать, что таких систем бесконечно много.

4.29. Подберите такие свободные члены в системе линейных уравнений, при которых любая система является совместной.

4.30. Конкретизируйте значения элементов определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ таким образом, чтобы он 1) был отличен от нуля; 2) был равен нулю. Ответ должен обладать двумя противоположными свойствами: во-первых, должно быть без вычислений ясно, что определитель обладает требуемым свойством; во-вторых, его вид должен показывать, что таких определителей бесконечно много.

4.31. Известно, что определитель третьего порядка вычисляется по формуле $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.
Конкретизируйте значения элементов определителя таким образом, чтобы из данной формулы получить формулу для вычисления определителя второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

В заключение серии алгебраических задач рассмотрим одну знаменитую теорему из теории чисел.

4.32. Известна теорема Эйлера из теории чисел: если числа a и m взаимно просты, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$. Здесь $\varphi(m)$ – это функция Эйлера, равная количеству чисел, взаимно простых с m и не превосходящих m. Конкретизируйте эту теорему для случая, когда число m является простым.

Мы накопили достаточно много примеров, которые говорят об одном и том же: следствие из математического факта является его конкретизацией

Взаимосвязь между теоремами Эйлера и Ферма хорошо иллюстрирует это обстоятельство.

Задачи 4.33–4.47 посвящены проявлениям конкретизации в области геометрии. Сначала поработаем с аффинными преобразованиями.

Аффинное преобразование координатной плоскости xOy задается равенствами

$$\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (!)$$

4.33. Конкретизируйте равенства (!) таким образом, чтобы они задавали 1) тождественное преобразование; 2) параллельный перенос; 3) центроаффинное преобразование с центром в начале координат; 4) гомотетию с центром в начале координат; 5) поворот на некоторый угол.

Помимо заданных, можно сформулировать еще очень много вопросов подобного типа. Сопоставьте эту задачу с задачей об аффинных преобразованиях в разделе «Визуализация».

4.34. Подберите такие значения параметров, чтобы равенства (!) свелись к аффинным преобразованиям осей координат.

4.35. Подберите такие значения параметров, чтобы равенства (!) свелись к аффинному преобразованию 1) оси Ox; 2) оси Oy.

Теперь рассмотрим несколько примеров из элементарной математики.

4.36. В какой-то момент обучения школьникам становится известна формула квадрата суммы двух чисел: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Доказательство формулы квадрата разности можно провести двумя способами: 1) вычислить выражение $(a-b)^2$, перемножив два одинаковых множителя; 2) положить в предыдущей формуле $b = -c$. Который из двух способов можно считать применением метода конкретизации?

4.37. Пусть a, b, c – стороны треугольника, причем c – наибольшая сторона. Конкретизируйте теорему косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, считая, что треугольник является 1) остроугольным; 2) прямоугольным; 3) тупоугольным.

4.38. Известен следующий факт: «Если хорды AB и CD пересекаются в точке P, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$». 1) Конкретизируйте этот факт, считая, что хорды взаимно перпендикулярны и одна из них является диаметром. Сформулируйте требуемое утверждение, не используя буквенных обозначений. 2) Истолкуйте полученное утверждение применительно к высоте прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла.

4.39. Известен следующий факт: «Две окружности пересекаются в точках M и N. Если через точку P прямой MN провести касательные PA и PC к окружностям, то $PA = PC$. Здесь A и C – точки касания». Конкретизируйте этот факт, считая, что точки P, A, C лежат на одной прямой.

Одна из идей, часто используемых в математике, – нахождение предельного значения той или иной функции, предельного положения той или иной *геометрической фигуры. В задачах 4.40–4.44 эта идея рассматривается в сочетании с понятием конкретизации.*

4.40. Известен следующий факт: «Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается». Вращайте одну из сторон угла вокруг его вершины до тех пор, пока она не совпадет с касательной, проведенной в вершине угла. Сформулируйте то утверждение, в которое трансформируется первоначальный факт.

4.41. Известен следующий факт: «Если через точку P вне круга провести две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках A и B, а другая – в точках C и D, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$». 1) Вращайте одну из секущих вокруг точки P до тех пор, пока она не превратится в касательную. Сформулируйте то утверждение, в которое трансформируется первоначальный факт. 2) Докажите, что отрезки двух пересекающихся касательных, заключенных между точками касания и точкой их пересечения, равны.

4.42. Известен следующий факт: «Пусть две окружности пересекаются в точках M и N. Через точку P прямой MN, отличную от M и N, проведены в каждой из окружностей секущие AB и CD. Тогда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$». 1) Увеличивайте расстояние между центрами окружностей до тех пор, пока окружности не станут касаться внешним образом. Сформулируйте то утверждение, в которое трансформируется первоначальный факт. 2) Вращайте секущие вокруг точки их пересечения до тех пор, пока они не превратятся в касательные к окружностям. Сформулируйте то утверждение, в которое трансформируется первоначальный факт.

Интересно, что с формальной точки зрения предельное положение фигуры нельзя рассматривать в качестве конкретизации общей ситуации, поскольку в предельном положении фигура может утрачивать свое качество: вписанный угол перестает быть вписанным, секущая превращается в касательную и т.д. Тем не менее, такая расширенная трактовка конкретизации оказывается полезной. Ниже (задачи 4.43–4.44) предельное положение геометрических фигур будет проиллюстрировано с помощью аналитического материала.

4.43. Семейство логарифмических спиралей задано как вектор-функция скалярного аргумента: $\overline{\alpha}(t) = e^{at}(\mathbf{i}\cos bt + \mathbf{j}\sin bt)$, где векторы $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ образуют ортонормированный базис. Найдите пределы $\overline{\beta}(t) = \lim\limits_{a\to 0} \overline{\alpha}(t)$, $\overline{\gamma}(t) = \lim\limits_{b\to 0} \overline{\alpha}(t)$ и $\overline{\delta}(t) = \lim\limits_{(a,b)\to(0,0)} \overline{\alpha}(t)$ и выявите их геометрический смысл.

Сопоставляя данную задачу с задачей 4.15, мы видим, что в них говорится об одном и том же семействе кривых, заданном разными способами. Более того, в обоих случаях мы получаем одинаковые вырождения. Различие методов решения состоит в том, что в первом случае мы использовали соображения из геометрии и механики, а во втором – чисто аналитические вычисления.

Поскольку все рассматриваемые функции являются непрерывными, можно было бы обойтись без вычисления пределов, заменив их подстановкой предельных точек в соответствующие выражения. Тем не менее, рассмотре-

ние пределов полезно, так как его можно связать с изучением тех деформаций спиралей, которые вызваны изменением параметров a и b. Это отдельная интересная тема.

4.44. Семейство винтовых линий задано как вектор-функция скалярного аргумента: $\overline{\alpha}(t) = \mathbf{i}\cos at + \mathbf{j}\sin at + \mathbf{k}bt$, где векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ образуют ортонормированный базис. Найдите пределы $\overline{\beta}(t) = \lim\limits_{a\to 0}\overline{\alpha}(t)$, $\overline{\gamma}(t) = \lim\limits_{b\to 0}\overline{\alpha}(t)$ и $\overline{\delta}(t) = \lim\limits_{(a,b)\to(0,0)}\overline{\alpha}(t)$ и выявите их геометрический смысл.

Сопоставляя данную задачу с задачей 4.16, мы видим, что в них говорится об одном и том же семействе кривых, заданном разными способами. Более того, в обоих случаях мы получаем одинаковые вырождения. Различие методов решения состоит в том, что в первом случае мы использовали соображения из геометрии и механики, а во втором – чисто аналитические вычисления.

Поскольку все рассматриваемые функции являются непрерывными, можно было бы обойтись без вычисления пределов, заменив их подстановкой предельных точек в соответствующие выражения. Тем не менее, рассмотрение пределов полезно, так как его можно связать с изучением тех деформаций винтовых линий, которые вызваны изменением параметров a и b. Это отдельная интересная тема.

В заключение геометрического блока задач приведем упражнения на конкретизацию, связанные с кривыми второго порядка.

4.45. Дана окружность $x^2 + y^2 = a^2$. В какую фигуру превратится окружность, если $a \to 0$?

4.46. Дана равнобочная гипербола $x^2 - y^2 = a^2$. В какую фигуру превратится гипербола, если $a \to 0$?

По форме данная задача аналогична предыдущей, однако, в отличие от предыдущей, в ней происходит вырождение другого типа: единственная точка в первом случае и пара бесконечных прямых во втором случае.

4.47. Эллипс задан каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. В какую фигуру превратится эллипс, если 1) $b \to 0$; 2) $a \to 0$?

4.48. Гипербола задана каноническим уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. В какую фигуру превратится гипербола при $b \to 0$?

По форме данная задача аналогична предыдущей, однако, в отличие от предыдущей, нам не удастся решить ее для случая $a \to 0$. Дело с том, что на некотором этапе решения мы придем к уравнению $y^2 = -b^2$.

Обобщение

В задачах 4.49–4.53 изучаются проявления понятия «обобщение» в дифференциальном и интегральном исчислении.

4.49. Если функции f и g дифференцируемы во всех точках своих областей определения, то они удовлетворяют равенствам

$$(f+g)'=f'+g' \qquad (А)$$
$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g' \qquad (Б)$$
$$(f\circ g)'=(f'\circ g)\cdot g' \qquad (В)$$

Рассматривая равенства по отдельности, решите для каждого из них, какие обобщения могут быть получены на его основе? (Не обязательно получать сами обобщения, важно лишь указать признак, который обобщается.)

4.50. Используя термин «обобщение», охарактеризуйте взаимосвязи между теоремами о среднем в дифференциальном исчислении (Коши, Ролля, Лагранжа).

Две следующие задачи нужно решать совместно, поскольку в них рассматривается один объект – формула Тейлора, – представленный в двух различных формах.

4.51. Известны два следующих факта. 1) Приращение дифференцируемой функции имеет вид $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, где A – константа, не зависящая от Δx, а $o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. 2) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеет вид $f(x)=$
$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$
Докажите, что вторая формула является обобщением первой.

Заметим, что внешне равенства совсем не похожи друг на друга, так что наличие между ними взаимосвязи вида «конкретизация–обобщение» неочевидно. В этом смысле задача достаточно поучительна.

4.52. Известны два следующих факта. 1) Формула Лагранжа $f'(c)=$ $=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 2) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа
$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$+\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$. Докажите, что вторая формула является обобщением первой.

По поводу этой задачи мы можем сказать то же самое, что и по поводу предыдущей: на первый взгляд, сравниваемые объекты сильно различаются между собой.

4.53. Известны две теоремы, касающиеся понятия интегрируемой функции. 1) Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема. 2) Если функция ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема. Используя термин «обобщение», охарактеризуйте взаимосвязи между этими теоремами.

В задачах 4.54–4.57 представлены обобщения, связанные с формулами сокращенного умножения.

4.54. В некоторый момент обучения школьнику становятся известны формулы квадрата суммы двух чисел и куба суммы двух чисел. Какие обобщения естественно сделать на их основе?

4.55. Известны следующие равенства:

$$(x^2 - a^2) = (x - a)(x + a),$$
$$(x^3 - a^3) = (x - a)(x^2 + ax + a^2),$$
$$(x^4 - a^4) = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3),$$
$$(x^5 - a^5) = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4).$$

Проверьте третье из них. Обобщите их. Каким методом доказывается обобщенная формула?

4.56. Известны следующие равенства:

$$(x^2 - a^2) = (x + a)(x - a),$$
$$(x^4 - a^4) = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x^3 - a^3),$$
$$(x^6 - a^6) = (x + a)(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5).$$

Проверьте второе из них. Обобщите их? Каким методом доказывается обобщенная формула?

4.57. Известны следующие равенства:

$$(x^3 + a^3) = (x + a)(x^2 - ax + a^2),$$
$$(x^5 + a^5) = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4).$$

Проверьте второе из них. Обобщите их. Каким методом доказывается обобщенная формула?

Две следующие задачи связаны с комплексными числами.

4.58. Формулы косинуса и синуса двойного угла можно вывести следующим методом: возвести в квадрат комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ двумя способами (по формуле Муавра и по формуле сокращенного умножения), а затем приравнять действительные и мнимые части полученных выражений. Проделайте это. Обобщите *метод* рассуждений и получите несколько тригонометрических формул.

Задача 4.58 отличается от других тем, что обобщается не формула, не понятие, не теорема, а метод рассуждений.

4.59. 1) Известно, что в группе $\sqrt[4]{1}$ (комплексные корни) всего одна собственная подгруппа, а именно, $\sqrt{1}$. 2) Известно, что в группе $\sqrt[6]{1}$ две собственные подгруппы, а именно, $\sqrt{1}$ и $\sqrt[3]{1}$. 3) Известно, что в группе $\sqrt[12]{1}$ четыре собственные подгруппы, а именно, $\sqrt{1}$, $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[4]{1}$ и $\sqrt[6]{1}$. Обобщите эти факты.

Этот же круг вопросов о группах и подгруппах обсуждался в задачах 4.23 и 4.24. Задача нетривиальна, так что обязательно посмотрите раздел «Идеи».

Задачи 4.60–4.64 посвящены важнейшему понятию школьной программы – числу. Операции над числами рассматриваются в контексте операций над другими объектами – многочленами, функциями, матрицами.

4.60. Как связаны между собой два понятия: 1) сложение чисел и сложение многочленов; 2) умножение чисел и умножение многочленов?

4.61. Как связаны между собой два понятия: 1) сложение одночленов и сложение многочленов; 2) умножение одночленов и умножение многочленов?

4.62. Как связаны между собой два понятия: 1) сложение чисел и сложение функций; 2) умножение чисел и умножение функций?

4.63. Как связаны между собой два понятия: 1) сложение чисел и сложение матриц; 2) умножение чисел и умножение матриц?

4.64. Перечислите те практические и/или математические задачи, которые приводят к построению новых, на данный исторический момент, классов чисел и, тем самым, к обобщению понятия числа: 1) $N \subset \boldsymbol{Q}_+$; 2) $\boldsymbol{Q}_+ \subset \boldsymbol{Q}$; 3) $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$; 4) $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Следующие три задачи посвящены проявлениям понятия обобщения в элементарной геометрии. В них рассматриваются сюжеты, связанные с секущими одной или двух окружностей.

4.65. Пусть A, B, C, D – четыре точки одной окружности. Пусть хорды AB и CD пересекаются в точке P. Известно, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Обобщите этот факт.

Полезно доказать написанное равенство как в исходной, так и в обобщенной ситуации.

4.66. Пусть точка P лежит на общей хорде MN двух пересекающихся окружностей. Известно, что если через точку P провести в каждой из окружностей хорды AB и CD, то $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Обобщите этот факт.

Полезно доказать написанное равенство как в исходной, так и в обобщенной ситуации.

4.67. Пусть отрезки AB и CD пересекаются в точке P так, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Известно, что в этом случае точки A, B, C, D лежат на одной окружности. Обобщите этот факт.

Задачи 4.68–4.71 отличаются от предыдущих в том отношении, что не имеют дела с формулами, понятиями, теоремами, методами. Они касаются проявлений обобщения и конкретизации в <u>схеме построения</u> того или иного математического курса.

4.68. При введении фигур в планиметрии один из школьных учебников использует схему, изображенную на рис. 2. Какой логический прием, обобщение или конкретизация, соответствует переходу по стрелке? (Пунктирные стрелки добавлены автором.)

Как видно из решения задачи, в процессе изучения фигур используется как обобщение (4 стрелки), так и конкретизация (7 стрелок).

4.69. При введении фигур в стереометрии один из школьных учебников использует схему, изображенную на рис. 3. Какой логический прием, обобщение или конкретизация, соответствует переходу по стрелке?

Как видно из решения задачи, в процессе изучения фигур используется как обобщение (6 стрелок), так и конкретизация (4 стрелки).

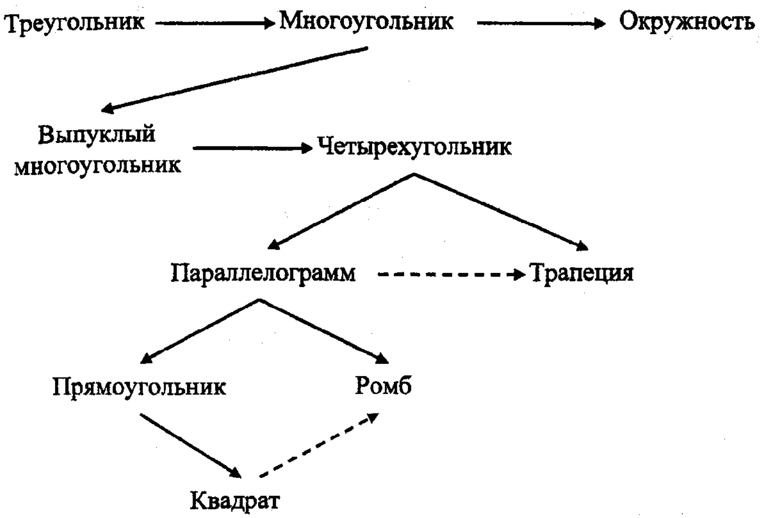

Треугольник
Многоугольник
Окружность
Выпуклый многоугольник
Четырехугольник
Параллелограмм
Трапеция
Прямоугольник
Ромб
Квадрат

Рис. 2

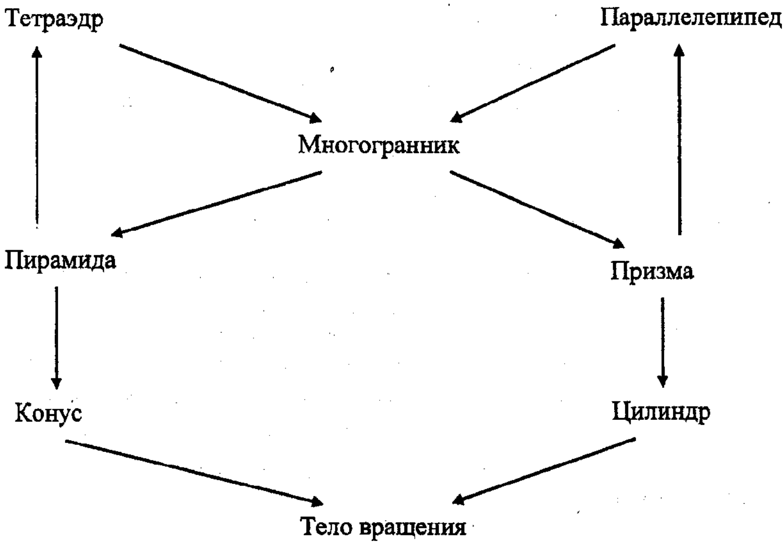

Тетраэдр
Параллелепипед
Многогранник
Пирамида
Призма
Конус
Цилиндр
Тело вращения

Рис. 3

4.70. При изучении чисел и многочленов один из вузовских учебников использует схему, изображенную на рис. 4 (вещественные числа считаются изученными в школе):

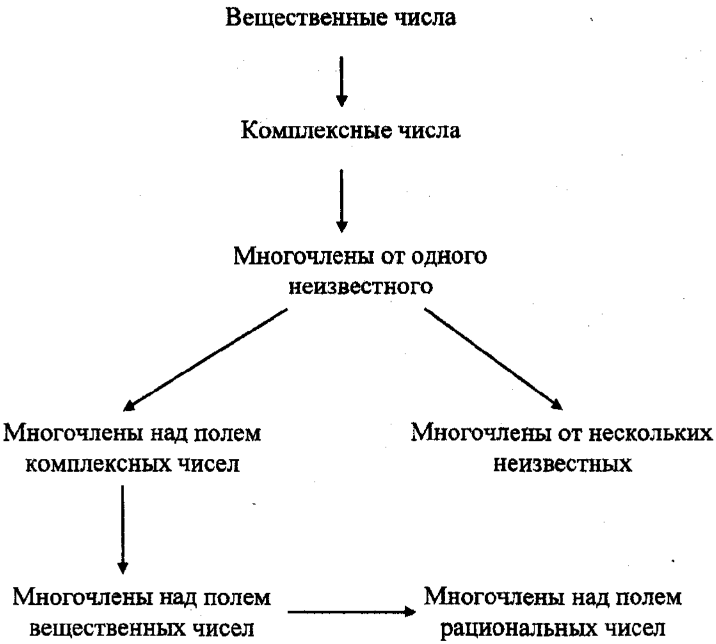


Рис. 4

Какой логический прием, обобщение или конкретизация, соответствует переходу по стрелке?

Как видно из решения задачи, в процессе изучения фигур используется как обобщение (3 стрелки), так и конкретизация (3 стрелки).

4.71. Курс математического анализа начинается с изучения числовых функций числового аргумента или, другими словами, с изучения отображений $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Строится теория, называемая дифференциальным и интегральным исчислением. Какие обобщения этой теории изучаются в дальнейшем?

С этой задаче речь идет о проявлениях обобщения и конкретизации в системе изучения математики в целом.

Абстрагирование

4.72. Известно следующее. 1) Каждой паре натуральных чисел можно поставить в соответствие третье число – их сумму. 2) Каждой паре целых чисел можно поставить в соответствие третье число – их разность. 3) Каждой паре всюду определенных функций можно поставить в соответствие третью функцию – их композицию. 4) Каждой паре векторов можно поставить в соответствие третий вектор – их сумму. 5) Каждой паре векторов трехмерного пространства (размерность существенна) можно поставить в соответствие третий вектор – их векторное произведение. 6) Каждой паре матриц можно поставить в соответствие третью матрицу – их произведение.

К какому математическому понятию мы придем, если ***абстрагируемся*** от природы объектов (числа, функции, векторы, матрицы) и определений соответствий (сумма, композиция, векторное произведение)?

При решении этой задачи целесообразно обсудить, укладываются ли в схему, описанную в условии, следующие операции над объектами: а) умножение вектора на число; б) умножение матрицы на число; в) скалярное произведение векторов; г) тройное произведение векторов. Во всех случаях ответ отрицателен, причем по разным причинам, которые тоже целесообразно выявить. В случаях а) и б) перемножаемые объекты имеют разную природу: один из них является числом, а другой – вектором (матрицей). В этом случае говорят о внешней операции над векторами (матрицами), поскольку один из сомножителей выбран из внешнего по отношению к векторам (матрицам) множества. В случае в) перемножаемые объекты выбраны из одного множества, однако результат умножения принадлежит не множеству векторов, а множеству другой природы – вещественным числам. В случае г) мы имеем еще больше отличий от бинарной алгебраической операции: во-первых, перемножаются не два, а три вектора; во-вторых, результат умножения принадлежит не множеству векторов, а множеству другой природы – вещественным числам.

4.73. Известно следующее. 1) Операция сложения на множестве целых чисел обладает тремя свойствами:

$k+(l+m)=(k+l)+m$ – ассоциативность;

$(\exists 0)(\forall k)k+0=0+k=k$ – наличие нейтрального элемента;

$(\forall k)(\exists(-k))k+(-k)=(-k)+k=0$ – наличие противоположного элемента.

2) Операция композиции на множестве непостоянных линейных функций обладает следующими свойствами:

$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$ – ассоциативность;

$(\exists I)(\forall f)f\circ I=I\circ f=f$ – наличие нейтрального элемента;

$(\forall f)(\exists f^{-1})f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I$ – наличие обратного элемента.

3) Операция сложения на множестве векторов обладает теми же тремя свойствами. 4) Операция умножения на множестве невырожденных матриц обладает теми же тремя свойствами.

К какому математическому понятию мы придем, если ***абстрагируемся*** от природы объектов (числа, функции, векторы, матрицы) и определений бинарных операций над ними?

Возможно, что в некоторых педагогических ситуациях целесообразно вспомнить содержание соответствующего раздела математики и поставить перед студентами уточняющие вопросы следующего типа: а) как определяет-

ся нейтральный элемент в случае 2)? б) найдите f^{-1}, если f задается равен ством $f(x)=2x+3$; и т.п. Заметим, что в случаях 1)–3) изучаемые матема тические объекты – целые числа, линейные функции, векторы – входят школьную программу, так что их детальное рассмотрение вполне естествен но.

4.74. Известно, что подобие треугольников обладает следующими свойст вами: 1) треугольник подобен сам себе (рефлексивность); 2) если первый тре угольник подобен второму, то второй подобен первому (симметричность); 3 если первый треугольник подобен второму, а второй подобен третьему, то пер вый треугольник подобен третьему (транзитивность). Интересно, что похожа ситуация многократно повторяется в школьном курсе математики, посколь взаимосвязи многих объектов также обладают свойствами 1)–3). Это равенств чисел, равенство векторов, равенство функций, равносильность уравнени равносильность систем уравнений, равносильность неравенств, конгруэнтност треугольников, параллельность прямых на плоскости и в пространстве, сон правленность лучей на плоскости и в пространстве, параллельность плоскосте Итак, в школьном курсе математики более 10 раз повторяется один и тот же н бор свойств.

К какому математическому понятию мы придем, если ***абстрагируемся*** с природы объектов (числа, функции, векторы, треугольники и проч.) и опред лений взаимосвязей (равенство, равносильность, параллельность, и проч.)?

В этой задаче есть ряд тонкостей. Во-первых, важно помнить, что м употребляем термин «равно» во многих разных смыслах. Во-вторых, мног (но не все) учебники считают, что прямая (плоскость) не параллельна сама с бе. Автор придерживается другой точки зрения. В-третьих, целесообраз вспомнить полузабытое определение сонаправленности лучей. В-четверты полезно понять, укладываются ли в эту схему другие понятия школьной мат матики: перпендикулярность, неравенство, противонаправленность.

4.75. Школьнику известно, что для любых вещественных чисел a и справедливы формулы сокращенного умножения: квадрат суммы, куб сумм бином Ньютона. Общий вопрос: от каких свойств вещественных чисел «мо но» абстрагироваться? Более конкретные вопросы таковы. 1) Можно ли абстр гироваться от некоторых свойств *системы* действительных чисел (например, ее непрерывности) и утверждать, что формула бинома Ньютона верна для лю бых *полей* (например, для полей Q и C? 2) Можно ли абстрагироваться от н которых свойств *поля* (например, от наличия единицы) и утверждать, что фо мула бинома Ньютона верна для любых *коммутативных колец* (например, д кольца целых чисел и кольца многочленов с вещественными коэффициентами 3) Можно ли абстрагироваться от свойства *коммутативности кольца* и утве ждать, что формула бинома Ньютона верна для *любых колец* (например, д кольца матриц)?

4.76. Известны следующие физические определения. 1) Пусть тело дв жется по прямой. Его мгновенной скоростью в момент времени t_0 называет предел его средней скорости за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при условии, что величина промежутка времени стремится к нулю. 2) Пусть в электрической цепи течет непостоянный ток. Мгновенной силой тока в момент времени t_0 называется предел средней силы тока за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при условии, что величина промежутка времени стремится к нулю. Напомним, что силой постоянного тока называется количество электричества, протекающего через поперечное сечение проводника за единицу времени: $I = q/t$. 3) Кристалл соли, опущенный в насыщенный солевой раствор, растет. Мгновенной скоростью роста кристалла в момент времени t_0 называется предел средней скорости его роста за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при условии, что величина промежутка времени стремится к нулю. Напомним, что скоростью роста равномерно растущего кристалла называется приращение его массы за единицу времени: m/t. 4) При движении тела под действием переменной силы над ним производится работа, которая, естественно, зависит от времени: $A = A(t)$. Мгновенной мощностью в момент времени t_0 называется предел средней мощности за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ при условии, что величина промежутка времени стремится к нулю. Напомним, что работа, произведенная за единицу времени, называется мощностью: $N = A/t$.

К какому математическому понятию мы придем, если абстрагируемся от физической природы сформулированных определений: от механического движения и работы, от электрических явлений, от химических процессов роста кристаллов?

Примеры такого рода бесчисленны, но рассеяны по литературе. Неплохая коллекция содержится в книге Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч. I. – М.: Просвещение, 1971. – С. 116-19. По-видимому, для учителя полезно иметь достаточно большой список подобных примеров.

Любопытно, что происходит со скоростью роста кристалла: растет, замедляется, остается постоянной? Как она связана с изменением площади поверхности кристалла?

4.77. Известны следующие физические закономерности. 1) Для того, чтобы определить массу радиоактивного вещества в произвольный момент времени, нужно решить уравнение $m' = -km$, где m – масса вещества, зависящая от времени, а $k > 0$ – постоянный коэффициент. Штрих, как обычно, означает дифференцирование. 2) Для того, чтобы найти массу растущей колонии бактерий в произвольный момент времени, нужно решить уравнение $m' = km$, где m – масса колонии, зависящая от времени, а $k > 0$ – постоянный коэффициент. Здесь предполагается, что колония растет естественным образом, то есть при условии достаточного количества пищи. 3) Для того, чтобы найти температуру T остывающего тела в произвольный момент времени, нужно решить уравнение $T' = -k(T - T_0)$, где T_0 – температура окружающей среды, а $k > 0$ – постоянный коэффициент. 4) Для того, чтобы найти координату x свободно колеблющегося маятника, нужно решить уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$, где ω – постоянны коэффициент.

К какому математическому понятию мы придем, если абстрагируемся (физической природы описанных закономерностей: от радиоактивного распад от биологических процессов, от тепловых явлений, от механического движен тел?

5. Аналогия

> В самой математике главные средства достигну истины – индукция и аналогия.
>
> *Лапл*
>
> Заключение по аналогии есть самый обычный в рассуждений, возможно и самый важный. Оно прив дит нас к более или менее правдоподобным предп ложениям, которые могут подтвердиться или не по твердиться опытом или более строгими рассуждени ми.
>
> *Д.По*

Аналогия – это умозаключение, в котором на основе сходства объектов некоторых свойствах и отношениях высказывается суждение о сходстве эт объектов в других свойствах и отношениях.

Схема *умозаключения по аналогии* выглядит следующим образом:

Объект A обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y$.

Объект B обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Вероятно, объект B обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Задачи 5.1–5.4 показывают, что аналогии между объектами мог быть установлены различными способами.

5.1. Выявите одну из аналогий между отрезком, треугольником и тр угольной пирамидой.

5.2. Выявите одну из аналогий между отрезком, параллелограммом и п раллелепипедом.

5.3. Выявите одну из аналогий между параллелограммом и многоугол ной призмой.

5.4. Выявите одну из аналогий между треугольником и многоугольн пирамидой.

Мы видим, что в зависимости от нашего подхода математический об ект может оказаться аналогичен различным объектам. Так, двумерными ан логами отрезка являются и треугольник, и параллелограмм, а его трехмерн ми аналогами оказываются и треугольная пирамида, и параллелепипед (зада 5.1 и 5.2). Аналогами параллелограмма являются и параллелепипед, и мно угольная призма (задачи 5.2 и 5.3), а аналогами треугольника оказываются треугольная, и многоугольная пирамида (задачи 5.1 и 5.4). Все аналогии разу ны, каждая имеет значение в своем месте. Следует помнить, что между п *ской и пространственной геометрией имеется несколько аналогий, а не единственная привилегированная аналогия.*

5.5. Оформите в виде графа систему аналогий, выявленных в процессе решения задач 5.1–5.4.

Вернемся к первой из установленных нами аналогий между отрезком, треугольником и треугольной пирамидой и покажем, что она содержит в себе нечто неочевидное.

5.6. Заполните нижеследующую таблицу. В ее клетках поместите количество граничных элементов и компонентов связности для каждой из фигур. Например, треугольник имеет 3 вершины (размерность 0), три стороны (размерность 1) и одну компоненту связности, состоящую из внутренних точек (размерность 2). Встречался ли вам числовой треугольник, аналогичный тому, что содержится в таблице?

	Размерность граничных элементов и компонентов связности			
	0	1	2	3
Отрезок				
Треугольник				
Треугольная пирамида				

Итак, мы обнаружили аналогию между двумя далекими друг от друга математическими объектами. Интересно, однако, что мы не выявили причину этой аналогии.

Обратимся к физическому аспекту аналогии между отрезком, треугольником и треугольной пирамидой. Более конкретно, рассмотрим положение центра тяжести каждой из этих фигур и посвятим этому задачи 5.7–5.10. Отметим, что во времена Архимеда или Галилея нахождение центра тяжести треугольной пирамиды было серьезной научной проблемой.

5.7. Известно, что центр тяжести однородного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан. Где находится центр тяжести однородной треугольной пирамиды?

5.8. Известно следующее: 1) если M – центр тяжести однородного отрезка AB, то $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$, где O – начало координат; 2) если M – центр тяжести однородного треугольника ABC, то $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Как найти центр тяжести однородной треугольной пирамиды $ABCD$?

5.9. Известно следующее: 1) центр тяжести однородного отрезка совпадает с центром тяжести его двух граничных точек: 2) центр тяжести однородного треугольника совпадает с центром тяжести его трех вершин. Сформулируйте аналогичное заключение относительно треугольной пирамиды и решите, справедливо ли оно.

5.10. Известно следующее: 1) центр тяжести отрезка находится на отрезке и делит его в отношении 1:1; 2) центр тяжести треугольника находится в точке лющегося маятника, нужно решить уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$, где ω – постоянны[й] коэффициент.

К какому математическому понятию мы придем, если абстрагируемся о[т] физической природы описанных закономерностей: от радиоактивного распада, от биологических процессов, от тепловых явлений, от механического движени[я] тел?

5. Аналогия

В самой математике главные средства достигнут[ь] истины – индукция и аналогия.

Лапла[с]

Заключение по аналогии есть самый обычный ви[д] рассуждений, возможно и самый важный. Оно приво[]дит нас к более или менее правдоподобным предпо[]ложениям, которые могут подтвердиться или не под[]твердиться опытом или более строгими рассуждения[]ми.

Д.Пой[а]

Аналогия – это умозаключение, в котором на основе сходства объектов [в] некоторых свойствах и отношениях высказывается суждение о сходстве эти[х] объектов в других свойствах и отношениях.

Схема *умозаключения по аналогии* выглядит следующим образом:

Объект A обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y$.

Объект B обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Вероятно, объект B обладает свойствами $X_1, X_2, \cdots, X_n$.

Задачи 5.1–5.4 показывают, что аналогии между объектами могу[т] быть установлены различными способами.

5.1. Выявите одну из аналогий между отрезком, треугольником и тре[]угольной пирамидой.

5.2. Выявите одну из аналогий между отрезком, параллелограммом и па[]раллелепипедом.

5.3. Выявите одну из аналогий между параллелограммом и многоуголь[]ной призмой.

5.4. Выявите одну из аналогий между треугольником и многоугольно[й] пирамидой.

Мы видим, что в зависимости от нашего подхода математический объ[]ект может оказаться аналогичен <u>различным</u> объектам. Так, двумерными ана[]логами отрезка являются и треугольник, и параллелограмм, а его трехмерны[]ми аналогами оказываются и треугольная пирамида, и параллелепипед (задач[и] 5.1 и 5.2). Аналогами параллелограмма являются и параллелепипед, и много[]угольная призма (задачи 5.2 и 5.3), а аналогами треугольника оказываются [и] треугольная, и многоугольная пирамида (задачи 5.1 и 5.4). Все аналогии разум[]ны, каждая имеет значение в своем месте. Следует помнить, что между пло *ской и пространственной геометрией имеется несколько аналогий, а не единственная привилегированная аналогия.*

5.5. Оформите в виде графа систему аналогий, выявленных в процессе решения задач 5.1–5.4.

Вернемся к первой из установленных нами аналогий между отрезком, треугольником и треугольной пирамидой и покажем, что она содержит в себе нечто неочевидное.

5.6. Заполните нижеследующую таблицу. В ее клетках поместите коли чество граничных элементов и компонентов связности для каждой из фигур. Например, треугольник имеет 3 вершины (размерность 0), три стороны (размерность 1) и одну компоненту связности, состоящую из внутренних точек (размерность 2). Встречался ли вам числовой треугольник, аналогичный тому, что содержится в таблице?

	Размерность граничных элементов и компонентов связности			
	0	1	2	3
Отрезок				
Треугольник				
Треугольная пирамида				

Итак, мы обнаружили аналогию между двумя далекими друг от друга математическими объектами. Интересно, однако, что мы не выявили причину этой аналогии.

Обратимся к физическому аспекту аналогии между отрезком, треугольником и треугольной пирамидой. Более конкретно, рассмотрим положение центра тяжести каждой из этих фигур и посвятим этому задачи 5.7–5.10. Отметим, что во времена Архимеда или Галилея нахождение центра тяжести треугольной пирамиды было серьезной научной проблемой.

5.7. Известно, что центр тяжести однородного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан. Где находится центр тяжести однородной треугольной пирамиды?

5.8. Известно следующее: 1) если M – центр тяжести однородного отрезка AB, то $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, где O – начало координат; 2) если M – центр тяжести однородного треугольника ABC, то $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$. Как найти центр тяжести однородной треугольной пирамиды $ABCD$?

5.9. Известно следующее: 1) центр тяжести однородного отрезка совпадает с центром тяжести его двух граничных точек: 2) центр тяжести однородного треугольника совпадает с центром тяжести его трех вершин. Сформулируйте аналогичное заключение относительно треугольной пирамиды и решите, справедливо ли оно.

5.10. Известно следующее: 1) центр тяжести отрезка находится на отрезке и делит его в отношении 1:1; 2) центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан и делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для треугольной пира миды.

В задачах 5.11–5.15 рассматриваются пространственные аналоги из вестных теорем, связанных с построением окружности, описанной около тре угольника, и окружности, вписанной в него. Естественно, что эти задачи це лесообразно рассматривать группами.

5.11. Известно, что на плоскости все точки серединного перпендикуляра отрезку, и только они, равноудалены от концов отрезка. Сформулируйте и до кажите пространственный аналог этого утверждения.

5.12. Известно, для любого треугольника на плоскости существует опи санная около него окружность. Сформулируйте и докажите пространственны аналог этого утверждения.

5.13. Известно, что на плоскости все точки биссектрисы угла, и тольк они, равноудалены от сторон угла. Сформулируйте пространственный анало этого утверждения и проверьте его истинность.

5.14. Известно, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точ ке. Сформулируйте и докажите пространственный аналог этого утверждения.

5.15. Известно, что для любого треугольника на плоскости существуе вписанная в него окружность. Сформулируйте и докажите пространственны аналог этого утверждения.

Задачи 5.16–5.20 связаны с теоремой Пифагора и обратной ей теоремой

5.16. Сформулируйте и докажите трехмерный аналог теоремы Пифагора.

5.17. Пусть a, b, c – стороны параллелепипеда, а d – его диагональ. Можн ли утверждать, что параллелепипед является прямоугольным, если выполняетс равенство $a^2+b^2+c^2=d^2$?

На первый взгляд получается, что теорема, обратная теореме Пифаго ра, не имеет прямого трехмерного аналога. Дело, однако, обстоит несколько сложнее, о чем говорят две следующие задачи.

5.18. Известно, что параллелограмм имеет равные диагонали тогда только тогда, когда он является прямоугольником. Сформулируйте и докажит трехмерный аналог этого утверждения.

Теперь мы можем перейти к теореме Пифагора, сформулированной виде критерия.

5.19. Теорему Пифагора и обратную ей можно сформулировать в виде од ного утверждения: «Пусть дан параллелограмм со сторонами a и b. Он являетс прямоугольником тогда и только тогда, когда обе его диагонали равны. Пр этом его диагональ d удовлетворяет равенству $d^2=a^2+b^2$». Сформулируйте докажите трехмерный аналог этого утверждения.

Решение задач 5.17–5.19 показывает, что при рассмотрении трехмерно го случая играет роль не столько формула, сколько равенство диагоналей па раллелепипеда.

Отметим, что теорему Пифагора на плоскости можно сформулиро вать еще одним способом: квадрат длины отрезка равен сумме квадрато *длин его проекций на две взаимно перпендикулярные прямые. Можно искать многомерные аналоги этого утверждения.*

5.20. Треугольная пирамида $OABCD$ такова, что все углы при вершине O являются прямыми. Известно, что площадь S ее основания и площади S_1, S_2, S_3 ее боковых граней связаны соотношением $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$. Аналогом какой теоремы можно считать это утверждение.

Эта задача еще раз свидетельствует о том, что одна и та же теорема планиметрии может иметь несколько пространственных аналогов.

Вот еще две тренировочные задачи на нахождение стереометрических теорем, аналогичных теоремам планиметрии.

5.21. Придумайте теорему пространственной геометрии, аналогичной теореме плоской геометрии: «Высота равнобедренного треугольника проходит через середину основания.»

5.22. Рассмотрите пирамиду как тело, аналогичное треугольнику. 1) Перечислите тела, аналогичные следующим плоским фигурам: параллелограмм, прямоугольник, круг. 2) Сформулируйте теорему пространственной геометрии, аналогичную следующей теореме плоской геометрии: «Площадь круга равна площади треугольника, основание которого имеет ту же длину, что и окружность, и высота которого равна радиусу.»

Следующие три задачи объединены общей идеей: для того чтобы решить задачу, целесообразно вспомнить <u>более простую аналогичную</u> задачу.

5.23. Докажите, что если две прямые в пространстве пересекаются тремя параллельными плоскостями, то соответствующие отрезки пропорциональны. Вспомните аналогичную теорему плоской геометрии.

5.24. Докажите, что четыре диагонали параллелепипеда имеют общую точку, являющуюся серединой каждой из них. Вспомните аналогичную теорему плоской геометрии.

5.25. Докажите, что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше, чем третий плоский угол. Вспомните аналогичную теорему плоской геометрии.

Две следующие задачи выявляют аналогии между геометрическими формулами.

5.26. Выявите аналогию между двумя формулами: 1) формулой площади треугольника и формулой площади трапеции; 2) формулой площади треугольника и формулой площади боковой поверхности конуса; 3) формулой площади трапеции и формулой площади боковой поверхности усеченного конуса; 4) формулой площади трапеции и формулой площади криволинейной трапеции. В каждом из случаев укажите аналогичные друг другу элементы геометрических фигур.

5.27. Известно, что площадь треугольника может быть вычислена по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, а r – радиус вписанной окружности. Напишите и докажите аналогичную формулу для объема треугольной пирамиды.

Следующие три задания выявляют пользу аналогий при работе с много мерными пространствами. При этом первое задание является задачей в соб ственном смысле слова, а два другие обучают формулировке разумных опреде лений в геометрически неочевидном случае высокой размерности.

5.28. При изучении основных структур математического анализа рассмат риваются два типа окрестности начала координат n-мерного арифметическог пространства: сферическая и кубическая. Сферической окрестностью радиуса называется множество S_r, состоящее из всех тех и только тех векторо $\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, которые удовлетворяют неравенству $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<r^2$. Ку бической окрестностью с полуребром ε называется множество C_ε, состояще из всех тех и только тех векторов, которые удовлетворяют неравенствам $|x_i|<$ для любого i. Нетрудно видеть, что $C_\varepsilon \supset S_\varepsilon$, то есть кубическая окрестность со держит в себе сферическую, причем полуребро кубической окрестности равн радиусу содержащейся в ней сферической окрестности. Докажите, что верно обратное: каждая сферическая окрестность радиуса r содержит в себе кубиче скую окрестность, если ее полуребро достаточно мало.

5.29. Известно определение скалярного произведения векторов на плос кости и в пространстве – это произведение длин векторов на косинус угла меж ду ними. Как сформулировать определение скалярного произведения в много мерном арифметическом пространстве $\boldsymbol{R}^n$, когда интуиция не подсказывает на ни что такое длина вектора, ни что такое косинус угла между ними? (Если в не знаете этого определения, то данное задание является полезным упражнени ем. Если вы знаете его, то смысл задания в том, чтобы дать возможно боле полную мотивацию для введения известного вам определения.)

5.30. Известно, что такое площадь параллелограмма, построенного н двух векторах плоскости. Известно, что такое объем параллелепипеда, постро енного на трех векторах пространства. Как сформулировать определение объе ма четырехмерного параллелотопа, построенного на четырех линейно незави симых векторах в $\boldsymbol{R}^4$? (Напомним определение параллелотопа: если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}$ – векторы, то параллелотопом, построенном на них, называется множество все тех и только тех линейных комбинаций этих векторов, коэффициенты которы лежат на отрезке [0, 1]. Для двух или трех векторов параллелотоп превращаетс в параллелограмм или параллелепипед соответственно.)

Следующие три задачи касаются сложения и умножения чисел.

5.31. Выявите аналогию между сложением вещественных чисел и умно жением положительных чисел.

5.32. Аналогичны ли свойства *конечных* сумм вещественных чисел и *бес конечных* сумм вещественных чисел, то есть рядов?

5.33. Выявите аналогию между умножением вещественных чисел и ум ножением чисел из множества $S=\{-1, 0, 1\}$.

Следующие две задачи посвящены выявлению аналогии между тригоно метрией и гиперболической тригонометрией.

5.34. 1) Известно, что единичная окружность с центром в начале координат, заданная уравнением $x^2+y^2=1$, может быть параметризована следующим образом: $x=\cos t$, $y=\sin t$. Отметим на плоскости следующие точки: $O(0,0)$, $P(1,0)$, $A(\cos t, \sin t)$, $B(\cos t, 0)$. Благодаря параметризации окружности мы получаем ряд соотношений, из которых вытекает, по существу, вся тригонометрия:

$$OB=\cos t,\quad AB=\sin t,\quad OA=1=\cos^2 t+\sin^2 t,\quad t=2S_{OPA},$$

где S_{OPA} – площадь сектора OPA.

2) Известно, что правая ветвь равнобочной гиперболы, заданной уравнением $x^2-y^2=1$, может быть параметризована следующим образом: $x=\operatorname{ch} t$, $y=\operatorname{sh} t$. Можно ли высказать какие-либо утверждения, аналогичные утверждениям пункта 1?

5.35. Известно, что все тригонометрические формулы могут быть выведены всего из двух формул: $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ (основное тригонометрическое тождество) и $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos y\sin x$ (теорема сложения для синуса). Нетрудно проверить (проверьте!), что для гиперболических функций справедливы аналогичные формулы: $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1$ и $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh} x\operatorname{ch} y+\operatorname{ch} x\operatorname{sh} y$. Насколько далеко распространяется эта аналогия? Можно ли вывести формулы, аналогичные тригонометрическим, из двух приведенных формул для гиперболических функций? Если есть различия, то в чем они?

В заключение раздела приведем задачу, которая в общем виде раскрывает взаимосвязь аналогии и индукции.

5.36. Рассмотрите какую-либо задачу, использующую индуктивные рассуждения, и укажите тот этап ее решения, который основывается на аналогии. (Например, можно рассмотреть задачу 2.1, где используется индукция «в общем виде» или задачи 2.7 и 2.8 на метод математической индукции.)

Задача важна в идейном плане, поскольку показывает, что индукция естественным образом основывается на аналогии.

6. Классификация

Цель науки – называть, описывать, классифицировать.

Ж. Кювье

Определение 1. Пусть во множестве A математических объектов выделено тем или иным способом некоторое *подмножество* B. В этом случае будем говорить, что во множестве A выделены объекты специального *типа*.

Пример 1. Во множестве движений плоскости можно выделить подмножество параллельных переносов. Другими словами, параллельный перенос является движением специального типа.

Определение 2. Пусть во множестве A математических объектов выделена *система подмножеств*. В этом случае можно сказать, что во множестве A

выделены объекты нескольких специальных типов. Перечень этих типов будем называть ***типологией***.

Пример 2. Во множестве движений плоскости можно выделить следующие подмножества: подмножество параллельных переносов, подмножество осевых симметрий, подмножество центральных симметрий, подмножество поворотов на различные углы, подмножество скользящих симметрий. Другими словами типология движений такова: параллельный перенос, осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, скользящая симметрия.

Определение 3. ***Классификацией*** математических объектов из множества A называется разбиение множества A на классы, то есть выделение семейства подмножеств, обладающего следующими свойствами: 1) каждое из подмножеств семейства не пусто; 2) каждый объект из множества A попадает хотя бы в одно из подмножеств семейства; 3) два различных подмножества семейства не имеют общих элементов.

Пример 3. Примитивная типология из примера 1 не является классификацией, поскольку существуют движения, отличные от параллельного переноса. Типология из примера 2 также не является классификацией, но совсем по другой причине: поворот на угол 180° является центральной симметрией. Если убрать центральную симметрию из списка примера 2, то получим следующую классификацию движений: параллельный перенос, осевая симметрия, поворот, скользящая симметрия.

Существуют другие точки зрения на понятие классификации, которые отражают другие математические реалии, отличные от вышеописанных.

Определение 4. ***Дихотомической классификацией*** называют разбиение множества на два класса с помощью некоторого свойства.

Пример 4. 1) Вещественные числа делятся на рациональные и иррациональные. 2) Квадратные матрицы делятся на обратимые и необратимые. Таким образом, членами дихотомической классификации являются противоречащие друг другу понятия.

Определение 5. ***Многоступенчатой дихотомической классификацией*** называется многократное разбиение множества на два класса с помощью некоторого свойства.

Пример 5. 1) Треугольники делятся на разносторонние и равнобедренные. В свою очередь равнобедренные треугольники делятся равносторонние и неравносторонние. Здесь основанием для деления является равенство или неравенство длин некоторых сторон треугольника. 2) Уравнения делятся на совместные и несовместные. В свою очередь совместные уравнения делятся на определенные (то есть имеющие единственное решение) и неопределенные. Здесь основанием для деления является количество решений уравнения.

Определение 6. ***Последовательной классификацией*** называется результат последовательного применения двух классификаций с ***разными*** основаниями.

Пример 6. Последовательная классификация параллелограммов выглядит следующим образом:

По сторонам / По углам	Ромбы	Не ромбы
Прямоугольники	Квадраты	Прямоугольники с разными сторонами
Не прямоугольники	Ромбы с непрямыми углами	Параллелограммы общего вида

Задания 6.1–6.42 касаются классификаций, понимаемых в смысле определения 3. Они формулируются однотипно, а именно, называется понятие, ставится двоеточие, приводится перечень типов, связанных с данным понятием. (Для примера смотри задание 6.1.) Требуется выяснить, является ли приведенная типология классификацией. Слова «да» или «нет» в разделе «Ответы» относятся именно к этому вопросу. Если ответ отрицателен, то требуется нарисовать диаграмму Эйлера, иллюстрирующую объемы понятий, и указать одну или несколько причин, в силу которых приведенная типология не является классификацией.

Задания 6.1–6.9 касаются чисел различной природы.

6.1. Натуральное число: простое число, составное число.

6.2. Число: натуральное число, целое число, рациональное число, вещественное число, комплексное число.

6.3. Вещественное число: положительное число, отрицательное число.

6.4. Вещественное число: положительное число, отрицательное число, нуль.

6.5. Вещественное число: положительное число, неположительное число.

6.6. Вещественное число: рациональное число, иррациональное число, алгебраическое число, трансцендентное число.

6.7. Вещественное число: а) целое число, рациональное число, иррациональное число; б) рациональное число, алгебраическое число, трансцендентное число.

6.8. Вещественное число: рациональное число, иррациональное число.

6.9. Вещественное число: алгебраическое число, трансцендентное число.

Если предыдущие задания и задание 6.10 касаются вещественных чисел различной природы, то задания 6.11–6.14 посвящены различным формам записи вещественных чисел и сопоставлению этих форм с сущностными характеристиками чисел.

6.10. Вещественное число: целое число, нецелое число.

6.11. Вещественное число: целое число, дробь.

6.12. Дробь: обыкновенная дробь, десятичная дробь.

Здесь мы сталкиваемся с интересной ситуацией. С одной стороны, если рациональное число записано в виде обыкновенной дроби, то оно не записано в виде десятичной дроби, и обратно. Следовательно, среди различных формам записи числа указаны две различные формы. С другой стороны, простейшее равенство $1/2 = 0{,}5$ *показывает, что обыкновенная дробь равна десятичной, отождествляется с ней. Тем самым мы ставим на первое место природу чис-*

ла, а не форму записи числа. Это замечание будет относиться также к задачам 6.13 и 6.14.

6.13. Обыкновенная дробь: сократимая дробь, несократимая дробь.

6.14. Десятичная дробь: конечная дробь, бесконечная дробь.

Два следующих задания похожи на предыдущие, однако относятся не к форме записи числа, а к его природе, как и задание 6.1, первое в серии задач о числах.

6.15. Бесконечная десятичная дробь: периодическая дробь, непериодическая дробь.

6.16. Обыкновенная дробь: правильная дробь, неправильная дробь.

Задания 6.17–6.21 касаются типологии многоугольников. В частности, рассматриваются интересные, но мало изучаемые звездчатые многоугольники.

6.17. Многоугольник: выпуклый многоугольник, невыпуклый многоугольник, звездчатый многоугольник.

6.18. Многоугольник: выпуклый многоугольник, невыпуклый многоугольник.

6.19. Многоугольник: выпуклый многоугольник, звездчатый многоугольник.

6.20. Многоугольник: невыпуклый многоугольник, звездчатый многоугольник.

6.21. Многоугольник: звездчатый многоугольник, незвездчатый многоугольник.

От многоугольников перейдем к треугольникам и посвятим им задачи 6.22–6.28. Заранее скажем, что обнаружится большое сходство в типологиях и классификациях.

6.22. Треугольник: прямоугольный треугольник, остроугольный треугольник, тупоугольный треугольник.

6.23. Треугольник: равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник, разносторонний треугольник.

Несколько неожиданный результат. Стандартная типология с помощью мер углов является классификацией, а столь же стандартная типология с помощью длин сторон – нет.

6.24. Треугольник: равносторонний треугольник, неравносторонний треугольник.

6.25. Треугольник: равносторонний треугольник, равнобедренный треугольник.

6.26. Треугольник: неравносторонний треугольник, равнобедренный треугольник.

6.27. Треугольник: равнобедренный треугольник, разносторонний треугольник.

6.28. Выявите сходство типологий, изученных в задачах 17–21 и 23–27.

Задачи 6.29–6.38 относятся к функциональной линии школьного курса математики и посвящены важнейшему классу функций – элементарным функ *циям. В эту серию вкраплены две «посторонние» задачи: о движениях плоскости и о системах линейных уравнений. Поучительно, что у разнотипных задач оказывается много общего. Эта общность выявляется в процессе решения обобщающей задачи 6.38.*

6.29. Элементарная функция: четная функция, нечетная функция.

6.30. Элементарная функция: четная функция, нечетная функция, функция общего вида.

Интересно выяснить, как много функций является четными и нечетными одновременно. Что общего у всех этих функций и в чем различие между ними?

6.31. Элементарная функция: рациональная функция, степенная функция, показательная функция, логарифмическая функция, тригонометрическая функция, обратная тригонометрическая функция.

6.32. Движение плоскости: осевая симметрия, центральная симметрия, поворот, параллельный перенос. Выявите сходство с предыдущей задачей.

У двух последних задач выявилось нечто общее: композиция функций или движений разных типов не принадлежит ни одному из них.

Задание 6.33 касается понятия монотонности, а задание 6.34 объединяет простейшие понятия функциональной линии школьно курса: монотонность, четность, периодичность.

6.33. Функция, определенная на отрезке $[a,b]$: возрастающая на отрезке $[a,b]$ функция, убывающая на отрезке $[a,b]$ функция, немонотонная на отрезке $[a,b]$ функция.

6.34. Функция, определенная всюду на множестве $\boldsymbol{R}$: четная, нечетная, общего вида, периодическая, непериодическая, монотонная на $\boldsymbol{R}$, немонотонная на $\boldsymbol{R}$.

Следующие две задачи касаются центральных понятий анализа – непрерывности и дифференцируемости. За ней следует «посторонняя» задача о системах линейных уравнений, а завершает серию задача 6.38, в которой выявляется общность ряда типологий, относящихся к разным разделам математики.

6.35. Функция, определенная на отрезке $[a,b]$: непрерывная на отрезке $[a,b]$, дифференцируемая на отрезке $[a,b]$, имеющая на отрезке $[a,b]$ хотя бы одну точку разрыва.

6.36. Функция, определенная в точке a: функция, непрерывная в точке a; функция, разрывная в точке a; функция, непрерывная слева в точке a; функция, непрерывная справа в точке a.

6.37. Система линейных уравнений с n неизвестными: совместная, несовместная, определенная.

6.38. Выявите сходство следующих типологий, рассмотренных в задачах 7, 17, 23, 35, 37 соответственно: 1) рациональные, алгебраические, трансцендентные числа; 2) выпуклые, невыпуклые, звездчатые многоугольники; 3) равнобедренные, равносторонние, разносторонние треугольники; 4) функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$, дифференцируемые на отрезке $[a,b]$, имеющие точку разрыва на $[a,b]$; 5) совместные, несовместные, определенные системы линейных уравнений.

Задачи 6.39–6.42 носят топологический характер и связаны с понятиями внутренней точки множества и открытого множества.

6.39. Пусть во множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ задано подмножество M. В этом случае во множестве $\boldsymbol{R}$ можно выделить точки следующих типов: внутренняя точка множества M, граничная точка множества M, внешняя по отношению к M точка.

6.40. Пусть во множестве вещественных чисел $\boldsymbol{R}$ задано подмножество M. В этом случае во множестве $\boldsymbol{R}$ можно выделить следующие типы точек: внутренняя точка множества M, граничная точка множества M, предельная точка множества M, внешняя по отношению к M точка.

6.41. Во множестве $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел можно выделить несколько типов подмножеств: открытое в $\boldsymbol{R}$; замкнутое в $\boldsymbol{R}$; ни открытое, ни замкнутое в $\boldsymbol{R}$.

6.42. Пусть множество A представляет собой объединение двух лучей: $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Выделим несколько типов подмножеств множества A: открытое в A; замкнутое в A; ни открытое, ни замкнутое в A.

*Формулировки двух последних задач почти совпадают, однако ответы отличаются. Причина в том, что объемлющие множества существенно различаются: **R** связно, а A несвязно.*

Задания 6.43–6.44 носят обзорный характер по отношению к предыдущим задачам. При этом задание 6.44 требует <u>построения</u> классификаций на базе уже существующей типологии.

6.43. Среди типологий, описанных в заданиях 6.1–6.10 и 6.15–6.42, найдите классификации и определите их тип. Укажите число типов в каждой из классификаций.

В данном списке из 38 типологий содержится 15 классификаций, среди них 10 дихотомических и 5 классификаций, содержащих по 3 типа объектов каждая. Мы видим, что классификаций существенно меньше, чем типологий, причем все они достаточно просты.

6.44. Рассмотрите типологии, описанные в заданиях 1, 3, 6, 7, 17, 23, 30–32, 34–37, 40, 42, и видоизмените их таким образом, чтобы получить классификацию того или иного множества объектов. Обязательно загляните в раздел «Идеи».

Задание 6.45 требует <u>введения</u> тех или иных оснований классификации и построения на их основе классификаций различных типов.

6.45. Для следующих понятий постройте одну или несколько классификаций. Постарайтесь разнообразить ваши ответы и постройте, если возможно, классификацию, дихотомическую классификацию, многоступенчатую дихотомическую классификацию, последовательную классификацию. Для каждого типа приведите соответствующий пример.

1) Группа. 2) Кольцо. 3) Поле. 4) Векторное пространство. 5) Подпространство 6-мерного пространства. 6) Матрица 4-го порядка. 7) Решение совместной системы линейных уравнений с 5-ю неизвестными. 8) Ориентация плоскости или пространства. 9) Кривая второго порядка. 10) Точка разрыва функции. 11) Функция, определенная на отрезке $[a,b]$. 12) Фигура на плоскости.

7. Необходимое следствие, достаточное условие и критерий

> В сложных математических проблемах разыскание удобных для пользования необходимых и достаточных условий бывает иногда чрезвычайно трудным. В таких случаях достаточные условия стараются сделать возможно более широкими, то есть охватывающими возможно большее число случаев, в которых интересующий нас факт все еще имеет место, а необходимые условия – возможно более узкими, то есть охватывающими возможно меньше лишних случаев, в которых изучаемый факт уже не имеет места. Таким образом, достаточные условия постепенно сближаются с необходимыми.
>
> *Математическая энциклопедия. Т. 3. С. 963*

Многие математические теоремы имеют вид импликации $A \Rightarrow B$. Примем ряд соглашений, касающихся названия частей теоремы и форм ее прочтения.

1) Высказывание A называется *условием,* или *посылкой* теоремы. Высказывание B называется заключением теоремы.

2) Высказывание B называется *необходимым следствием* высказывания A. Высказывание A называется *достаточным условием* для высказывания B.

3) Теорема $A \Rightarrow B$ имеет несколько *равноправных* форм прочтения. Различие между формами прочтения состоит в употреблении различных союзов, связывающих высказывания A и B. Назовем их условной формой прочтения, НД-формой (две модификации) и ТТ-формой (две модификации).

Условная форма: «<u>Если</u> A, <u>то</u> B»;
«Из A следует B»;
«Из A вытекает B»;
«A влечет B».

Здесь и далее подчеркнуты союзы, связывающие высказывания A и B.

НД1-форма: «Для того чтобы A, <u>необходимо</u>, чтобы B».

НД2-форма: «Для того чтобы B, <u>достаточно</u>, чтобы A».

Очевидно, что название «НД-форма» происходит от слов «необходимо» и «достаточно», употребляемых при прочтении теоремы.

ТТ1-форма: «A <u>только тогда</u>, когда B».

ТТ2-форма: «B <u>тогда</u>, когда A».

Очевидно, что название «ТТ-форма» происходит от «тогда» и «только тогда», употребляемых при прочтении теоремы.

Пример. Рассмотрим следующую теорему: «Общий член сходящегося ряда стремится к нулю». Запишем ее в каждой из пяти форм, описанных выше. Для этого введем два высказывания: A: «Числовой ряд сходится» и B: «Общий член ряда стремится к нулю». Тогда теорему можно записать в виде $A \Rightarrow B$ и выразить словесно одним из следующих способов.

Условная форма: «Если числовой ряд сходится, то его общий член стремится к нулю».

НД-формы: 1) Для того, чтобы числовой ряд сходился, необходимо, чтобы его общий член стремился к нулю.

2) Для того, чтобы общий член числового ряда стремился к нулю, достаточно, чтобы ряд сходился.

ТТ-формы: 1) Числовой ряд сходится только тогда, когда его общий член стремится к нулю.

2) Общий член числового ряда стремится к нулю тогда, когда ряд сходится.

Отметим, что различные формы прочтения теоремы $A \Rightarrow B$ являются не более чем *соглашениями*, правда, достаточно удобными и хорошо согласованными с нормами русского языка. Они употребляются с различной частотой универсальной является условная форма, гораздо реже применяется НД-форма и совсем редко – ТТ-форма. Отметим также, что исходная формулировка теоремы имела так называемую ***категоричную*** форму, в которой не выделены условие и заключение теоремы.

Очень часто встречается такая ситуация, когда оба взаимно обратных высказывания $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ истинны. Для сжатой словесной передачи этого факта в математике употребляются «парные» союзы: «необходимо и достаточно» и «тогда и только тогда». (В английском языке употребляется союз «если и только если» – if and only if.)

Пример. 1) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным, необходимо и достаточно, чтобы два его угла были равны. 2) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные углы попарно равны.

Одновременная истинность взаимно обратных высказываний $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ означает, что истинным является высказывание $A \Leftrightarrow B$. В этом случае говорят, что свойства A и B являются *критериями* друг для друга. Так, в примере 1) равенство двух углов треугольника является критерием его равнобедренности. В примере 2) равенство противоположных углов четырехугольника является критерием того, что он является параллелограммом.

Мы начнем с задачи, которая лежит вне основного содержания этого раздела и показывает существование широкого и важного класса математических утверждений – теорем, не имеющих вида импликации. Она не совсем обычна, поскольку потребует от пользователя ревизии его знаний. Данный раздел содержит три такие задачи обзорного характера: 7.1, 7.18, 7.22. Все они отмечены звездочкой.

7.1*. Приведите примеры теорем, которые не имеют вид импликации. Не ограничивайтесь изолированными примерами, а проведите «ревизию» ваших знаний и найдите 10-20 примеров.

Среди теорем, не имеющих вида импликации, есть много весьма важных теорем, без которых математика утратила бы свой привычный образ мощной, красивой, полезной науки.

Далее до конца раздела мы будем заниматься теоремами, имеющими вид импликации или эквиваленции.

7.2. Переформулируйте нижеследующую теорему различными способами, то есть так, чтобы в совокупности с исходной формулировкой вы имели *пять* форм выражения этой теоремы: условную форму, две НД-формы и две ТТ-формы. Если возможно, приведите категоричную формулировку теоремы. Отметьте те теоремы, для которых верны обратные к ним теоремы.

1. Для того чтобы две плоскости были параллельны, необходимо, чтобы две пересекающиеся прямые одной плоскости были параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.
2. Для того чтобы две плоскости были перпендикулярны, необходимо, чтобы одна плоскость проходила через прямую, перпендикулярную другой плоскости.
3. Если два треугольника гомотетичны, то отношение их периметров является положительным числом, равным модулю коэффициента гомотетии.
4. Для того чтобы две стороны треугольника были равны, достаточно, чтобы противолежащие углы были равны.
5. Для того чтобы треугольник был тупоугольным, достаточно, чтобы его наибольшая сторона удовлетворяла неравенству $c^2 > a^2 + b^2$.
6. Если геометрическая фигура состоит из двух параллельных прямых, то она имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.
7. Трапеция является равнобочной тогда, когда равны ее диагонали.
8. Прямая касается окружности тогда, когда она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
9. Для того чтобы существовали пределы каждой из двух последовательностей, необходимо, чтобы существовал предел их произведения.
10. Квадратное уравнение имеет единственное решение только тогда, когда его дискриминант равен нулю.
11. Для того чтобы композиция двух функций была непрерывна, достаточно, чтобы каждая из этих функций была непрерывна.
12. Квадратная матрица обратима только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.
13. Функция g дифференцируема в точке a и функция f дифференцируема в точке $g(a)$ только тогда, когда композиция $f \circ g$ дифференцируема в точке a.
14. Если числа α и β являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то $\alpha + \beta = -p$ и $\alpha\beta = q$.
15. Знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда, когда $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$.

16. Если уравнение $ax+by=c$ с целыми коэффициентами разрешимо в целых числах, то c делится на наибольший общий делитель чисел a и b.
17. Для того чтобы в критической точке функции выполнялось неравенство $f''(x_0)>0$, необходимо, чтобы точка x_0 была точкой локального минимума функции.

Обратите внимание на то, что в приведенном списке теорем довольно много таких, обратные к которым также верны. Поиск ситуаций, когда верны две взаимно обратные теоремы, будет систематически осуществляться в данном параграфе при работе с другими задачами.

Задачи 7.3–7.5 связаны со свойствами так называемого «логического квадрата» утверждений, включающего в себя два взаимно обратных высказывания и два взаимно противоположных высказывания.

7.3. На основе высказывания $A \Rightarrow B$ построены еще три высказывания, образующие в совокупности с исходным «логический квадрат»:

(1) $A \Rightarrow B$ (2) $B \Rightarrow A$
(3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ (4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$

Может ли случиться так, что: 1) все высказывания логического квадрата ложны? 2) три высказывания логического квадрата ложны, а одно истинно? 3) два высказывания истинны, а два ложны? 4) три высказывания истинны, а одно ложно? 5) все высказывания истинны? В случае утвердительных ответов приведите примеры.

Если результаты ваших решений не совпадают с ответом, то решите следующую задачу. После этого вернитесь к данной задаче.

7.4. Докажите, что: 1) взаимно обратные высказывания не могут быть одновременно ложными; 2) взаимно противоположные высказывания не могут быть одновременно ложными; 3) контрапозитивные высказывания либо оба истинны, либо оба ложны.

7.5. На основе нижеследующего высказывания постройте остальные высказывания логического квадрата. Укажите, какие из четырех его высказываний истинны, а какие ложны. Выделите те случаи, когда взаимно обратные высказывания оба истинны, и переформулируйте их в виде критерия.

1. Если прямая параллельна плоскости, то она параллельна некоторой прямой лежащей в этой плоскости.
2. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему.
3. Если два треугольника подобны, то отношение их площадей является положительным числом, а именно квадратом коэффициента подобия.
4. Если один угол треугольника больше другого, то против большего угла лежит большая сторона.
5. Если треугольник является остроугольным, то для его сторон a, b, c выполняется неравенство $c^2<a^2+b^2$, где c – наибольшая сторона.
6. Если последовательность ограничена, то она сходится.

7. Если около четырехугольника можно описать окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°.
8. Если уравнение $ax + b = 0$ имеет единственное решение, то $a \neq 0$.
9. Если две функции непрерывны в некоторой точке, то их сумма также непрерывна в этой точке.
10. Если дискриминант квадратного уравнения положителен, то оно имеет два корня.
11. Если две функции имеют производные в некоторой точке, то их произведение также имеет производную в этой точке. Вспомните формулу.
12. Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ разрешимо.
13. Если общий член числового ряда стремится к нулю, то ряд сходится.
14. Если сравнение $ax \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, то b делится на наибольший общий делитель чисел a и m.
15. Если функция, дифференцируемая на отрезке $[a,b]$, возрастает на нем, то ее производная положительна на этом отрезке.
16. Если монотонная последовательность сходится, то она ограничена.
17. Если вторая производная функции положительна на отрезке $[a,b]$, то функция выпукла вниз на этом отрезке.

Обратите внимание на то, что в приведенном списке теорем довольно много критериев. Обратите также внимание на то, что в некоторых случаях исходное высказывание является ложным. Это вовсе не мешает строить остальные высказывания логического квадрата и определять их истинность или ложность.

Задача 7.6 посвящена тому, чтобы научиться различать теоремы-критерии и теоремы, не являющиеся критериями.

7.6. В нижеследующих предложениях вставьте вместо многоточия одно из словосочетаний: «необходимо и достаточно», «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо». В двух последних случаях приведите соответствующий пример.

1. Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, …, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в этой плоскости.
2. Для того чтобы точка, лежащая внутри угла, была равноудалена от его сторон, …, чтобы она лежала на биссектрисе угла.
3. Изучаются фигуры, состоящие из двух прямых. Для того чтобы прямые были параллельны, …, чтобы фигура имела центр симметрии.
4. Для того чтобы два треугольника были конгруэнтны, …, чтобы три стороны одного треугольника были конгруэнтны трем сторонам другого треугольника.
5. Для того чтобы треугольник был прямоугольным, …, чтобы его стороны удовлетворяли равенству $c^2 = a^2 + b^2$.
6. Для того чтобы две последовательности имели пределы, …, чтобы их сумма имела предел.

7. Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, ..., чтобы суммы длин противоположных сторон были равны.
8. Для того чтобы квадратное уравнение было совместно, ..., чтобы его дискриминант был неотрицателен.
9. Для того чтобы члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ удовлетворяли соотношению $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, ..., чтобы ряд сходился.
10. Для того чтобы уравнение $\cos x = a$ было разрешимо, ..., чтобы выполнялось неравенство $|a|\le 1$.
11. Для того чтобы произведение двух функций было непрерывным в некоторой точке, ..., чтобы сомножители были непрерывны в этой точке.
12. Для того чтобы уравнение $a^x = b$ было разрешимо, ..., чтобы число b было положительным.
13. Для того чтобы сумма двух функций имела производную в некоторой точке, ..., чтобы слагаемые имели производную в этой точке.
14. Для того чтобы система линейных уравнений была разрешима, ..., чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.
15. Для того чтобы функция имела в некоторой точке локальный минимум, ..., чтобы при переходе аргумента через эту точку производная меняла знак с «минуса» на «плюс».
16. Для того чтобы функция, дифференцируемая на отрезке $[a,b]$, была постоянна, ..., чтобы ее производная равнялась нулю на этом отрезке.
17. Для того чтобы функция имела перегиб в некоторой точке, ..., чтобы вторая производная в этой точке обращалась в нуль.

Обратите внимание на то, что в приведенном списке теорем довольно много критериев.

В задачах 7.7–7.11 анализируются некоторые элементы структуры школьных учебников.

7.7. В одном из учебников геометрии глава, посвященная параллельным прямым, имеет следующую структуру.

1. Дается определение параллельных прямых.
2. Доказываются признаки параллельных прямых:

если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны;

если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны;

если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

3. Доказываются теоремы об углах, образованных параллельными прямыми и секущей:

если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны;

если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны;

если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.

Найдите среди сформулированных теорем а) *необходимые следствия* параллельности; б) *достаточные условия* параллельности. Сгруппируйте теоремы таким образом, чтобы каждая из образованных вами групп теорем позволяла сформулировать *критерий* параллельности прямых. Приведите две формулировки критерия, в НД-форме и ТТ-форме.

Анализ учебника показывает, что в нем необходимые следствия параллельности названы «свойствами» параллельных прямых, а достаточные условия параллельности названы «признаками» параллельности прямых. Термин «критерий» не употребляется.

Анализ учебника показывает, что его содержание могло бы быть изложено в стиле, характерном для монографической литературы по математике: сначала теорема позволяет обнаружить интересный математический феномен, а затем этому феномену дается название в виде определения. Приведем такую переформулировку, отметив при этом, что сама возможность переформулировки отнюдь не означает ее целесообразности.

Теорема. Следующие свойства двух прямых равносильны: 1) две прямые не имеют общих точек; 2) при пересечении двух прямых третьей накрест лежащие углы равны; 3) при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны; 4) при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна180°.

Определение. Две прямые называются параллельными, если обладают одним из свойств 1–4 из предыдущей теоремы.

Отметим, что с таким стилем изложения можно встретиться при изучении линейной алгебры: в ряде учебников сначала доказывается, что все базисы линейного пространства (если они существуют) имеют одинаковое количество векторов, а потом это количество векторов называется размерностью пространства.

7.8. Укажите какое-либо необходимое следствие параллельности прямых (свойство), которое не являлось бы достаточным условием параллельности (признаком).

7.9. В одном из учебников геометрии параграф, посвященный параллелограммам, имеет следующую структуру.

1. Дается определение параллелограмма.
2. Доказываются свойства параллелограмма:

в параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны;

диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3. Доказываются признаки параллелограмма:

если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм;

если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм;

если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Найдите среди сформулированных теорем а) *необходимые следствия* того, что четырехугольник является параллелограммом; б) *достаточные условия* того, что четырехугольник является параллелограммом. Сгруппируйте теоремы таким образом, чтобы каждая из образованных вами групп теорем позволяла сформулировать *критерий* того, что четырехугольник является параллелограммом. Приведите две формулировки критерия, в НД форме и ТТ-форме.

Вновь, как и при обсуждении параллельности прямых (задача 7.7), мы видим, что необходимые следствия «параллелограммности» четырехугольника названы «свойствами» параллелограмма, а условия, достаточные для того, чтобы четырехугольник являлся параллелограммом, названы «признаками» параллелограмма. Термин «критерий» не употребляется.

Вновь мы могли бы переформулировать содержание учебника в рафинированном математическом стиле, доказав теорему, которая служит мотивировкой для определения.

Теорема. Следующие свойства четырехугольников равносильны: 1) противоположные стороны четырехугольника попарно параллельны; 2) противоположные стороны четырехугольника попарно равны; 3) две стороны четырехугольника равны и параллельны; 4) диагонали четырехугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Определение. Четырехугольник называется параллелограммом, если обладает одним из свойств 1–4 предыдущей теоремы.

Весьма полезно обсудить в описанном стиле другие ситуации, встречающиеся в курсе геометрии: равенство треугольников, подобие треугольников, параллельность плоскостей, перпендикулярность прямой и плоскости и т.д.

7.10. Укажите какое-либо необходимое следствие того, что четырехугольник является параллелограммом (свойство), которое не являлось бы достаточным условием (признаком) параллелограмма.

7.11. В одном из учебников геометрии параграф, посвященный подобным треугольникам, имеет следующую структуру.

1. Дается определение: два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.
2. Доказывается теорема об отношении площадей подобных треугольников.
3. Доказываются признаки подобия треугольников:
   3.1.первый признак;
   3.2.второй признак;
   3.3.третий признак.

Найдите среди сформулированных теорем: а) *необходимые следствия* того, что два треугольника подобны; б) *достаточные условия* того, чтобы два треугольника были подобны. Если можно, сгруппируйте теоремы таким образом, чтобы каждая из образованных вами групп теорем позволяла сформулировать *критерий* подобия треугольников.

Вновь, как и при обсуждении параллельных прямых и параллелограммов (задачи 7.7 и 7.9), мы видим, что условия, достаточные для того, чтобы два треугольника были подобными, названы «признаками» подобия. Термин «критерий» не употребляется. Не употребляется также термин «свойства» подобия, хотя теорема 2 является необходимым следствием подобия. По-видимому, дело в том, что утверждения, обратные к признакам 3.1–3.3, которые было бы естественно назвать свойствами подобных треугольников, тривиальны, поскольку заложены в определении. Именно в силу тривиальности они не обсуждаются в учебнике.

Задачи 7.12–7.17 иллюстрируют следующее распространенное явление: накопление и усложнение необходимых следствий из какого-либо факта порождает достаточное условие выполнения этого факта.

7.12. Выясните, обратимы ли следующие теоремы. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен.

1) Если четырехугольник является параллелограммом, то его диагонали пересекаются.

2) Если четырехугольник является параллелограммом, то его диагонали пересекаются и одна из них делится пополам точкой пересечения диагоналей.

3) Если четырехугольник является параллелограммом, то его диагонали пересекаются и делятся пополам точкой пересечения диагоналей.

7.13. Выясните, обратимы ли следующие теоремы. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен.

1) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали пересекаются.

2) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны.

3) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали пересекаются и являются взаимно перпендикулярными.

4) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали пересекаются, являются взаимно перпендикулярными и одна из них делится пополам точкой пересечения диагоналей.

5) Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали пересекаются, являются взаимно перпендикулярными и обе делятся пополам точкой пересечения.

7.14. Выясните, обратимы ли следующие теоремы. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен.

1) Если отрезок является средней линией треугольника, то он параллелен третьей стороне.

2) Если отрезок является средней линией треугольника, то он равен половине третьей стороны.

3) Если отрезок является средней линией треугольника, то он параллелен третьей стороне и равен ее половине.

7.15. Выясните, обратимы ли следующие теоремы. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен.

1) Если отрезок является средней линией трапеции, то он параллелен ее основаниям.

2) Если отрезок является средней линией трапеции, то он равен полусумме оснований.

3) Если отрезок является средней линией трапеции, то он параллелен основаниям и равен их полусумме.

7.16. Выясните, обратимы ли следующие теоремы о непрерывных функциях. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен. В качестве основного определения непрерывности функции принимаем $\varepsilon-\delta$ – определение.

1) Если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет в этой точке левый (правый) предел.

2) Если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет в этой точке правый и левый пределы.

3) Если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет в этой точке правый и левый пределы, причем равные между собой.

4) Если функция непрерывна в некоторой точке, то она имеет в этой точке правый и левый пределы, причем оба они равны значению функции в этой точке.

7.17. Выясните, обратимы ли следующие теоремы. Ответ объясните, причем особенно подробно в том случае, когда он отрицателен.

1) Если подмножество H группы G является подгруппой, то оно замкнуто относительно групповой операции.

2) Если подмножество H группы G является подгруппой, то оно замкнуто относительно нахождения обратного элемента.

3) Если подмножество H группы G является подгруппой, то оно замкнуто относительно групповой операции и относительно нахождения обратного элемента.

7.18*. Проанализируйте решения задач 7.2, 7.5–7.7, 7.9, 7.11–7.17 и ответы к ним и выявите теоремы, являющиеся критериями. Структурируйте множество найденных теорем следующим образом: а) разбейте их на несколько групп в соответствии с принадлежностью к геометрии, алгебре и математическому анализу; б) внутри каждой группы расположите теоремы в соответствии с порядком их изучения.

Итак, вы нашли не менее тридцати (!) критериев, большинство из которых относится к школьному курсу математики. Не кажется ли вам, что математики стремятся накапливать именно критерии, и лишь тогда, когда это не удается, ограничиваются необходимыми следствиями и/или достаточными условиями?

Заключительное упражнение связано с анализом логической структуры известных теорем.

7.19. Выявите логическую структуру теоремы, записав ее с помощью логических символов.

1. Теорема о средней линии треугольника (трапеции).
2. Каждый из признаков параллелограмма. Сравните логическую структуру различных признаков.
3. Каждый из признаков конгруэнтности треугольников. Выявите отличия в характере условий теорем.
4. Теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций.
5. Теоремы о производной суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций.
6. Необходимое условие экстремума (теорема Ферма).
7. Достаточное условие экстремума.
8. Теоремы Ролля, Лагранжа, критерий постоянства функции на отрезке и достаточное условие монотонности функции на отрезке. Выявите общие элементы условий теорем пункта 8.

8. Методика работы с понятием

Факты переходят к потомству только в сопровождении идей.

Этьен Сент-Илер

Понятие – это форма абстрактного мышления, результат обобщения свойств единичных конкретных предметов/явлений и выделения в них существенных признаков. В каждом понятии различают содержание (совокупность существенных признаков предмета) и объем (множество предметов, каждому из которых принадлежат признаки, относящиеся к содержанию).

Схематично процесс формирования понятия можно представить так: образ восприятия – представление – обобщенное представление или предпонятие – понятие – система понятий.

Для ВСЕХ заданий данного раздела нужно ответить на три ***основных вопроса:*** *1) при изучении какого понятия целесообразно использовать данное задание? 2) на каком этапе изучения понятия следует применять данное задание? 3) какую роль играет данное задание при изучении понятия?*

В заданиях данного раздела обсуждается несколько понятий школьного курса математики, и каждое из них рассматривается на разных стадиях формирования понятия: мотивации к изучению понятия, подведения под понятия, извлечения следствий из определения, систематизации понятий. По мере решения задач целесообразно заполнить таблицу следующего типа:

Этап усвоения / Понятие	Мотивация к изучению	Подведение под понятие	Извлечение следствий	Систематизация
Биссектриса			8.16	

При этом в первый столбец таблицы нужно поместить обсуждаемое понятие, а в остальные клетки таблицы – номера соответствующих заданий. В результате вы будете знать, что, например, в задаче 8.1б обсуждается понятие биссектрисы на этапе извлечения следствий из этого понятия.

Математические эксперименты, или Мотивация

Задания 8.1–8.7 посвящены математическим экспериментам, которые связаны с понятиями, изучаемыми в школе. Эксперимент может относиться и к алгебре, и к геометрии. Школьник может оперировать реальными объектами или проводить мысленный эксперимент. Главное состоит в том, что эксперимент ставится до сообщения школьнику точного определения понятия.

Первые два задания целесообразно решить совместно.

8.1. При изучении углов школьникам можно предложить следующее задание: «Внутри угла AOB находится луч $[OX)$, который в начальный момент времени совпадает с лучом $[OA)$. Затем он начинает вращаться и в конечный момент времени совпадает с лучом $[OB)$. Очевидно, что углы AOX и XOB меняются, причем первый растет, а второй убывает. Существует ли некий особый момент времени, в который мы можем сравнить величины углов?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.2. Придумайте задание, которое формирует у школьников мотив к изучению понятия перпендикулярных прямых.

8.3. При изучении прямых можно дать школьникам следующее задание: «1) Сколько прямых можно провести через две различные точки? Если вы затрудняетесь ответить, то поэкспериментируйте с предметами: а) натяните две разноцветные нитки между двумя гвоздями и скажите, каково взаимное расположение этих ниток; б) поставьте на бумаге две точки, проведите через них две прямые, карандашом и ручкой, и скажите, каково взаимное расположение этих прямых. 2) Сформулируем по-другому предыдущий вопрос: могут ли две различные прямые иметь точно три общие точки, то есть иметь три общие точки и не иметь четырех общих точек? 3) Зададим обобщающий вопрос: сколько общих точек могут иметь две прямые?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.4. При изучении треугольников можно дать школьникам следующее задание: «1) Постройте треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см., а затем треугольник со сторонами 6, 8 и 10 см. Похожи ли эти треугольники, и если да, то чем? 2) Постройте треугольники со сторонами 6, 9 и 12 см, а затем треугольник со сторонами 2, 3 и 4 см. Похожи ли эти треугольники, и если да, то чем? 3) Для треугольников из задания 1 (а затем из задания 2) составьте отношения сторон. Что вы можете сказать об этих отношениях? 4) Проведите прямую, параллельную стороне треугольника и пересекающую этот треугольник. Сравните два треугольника: исходный и тот, который отсекается проведенной прямой. Похожи ли эти треугольники, и если да, то чем?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.5. При изучении чисел школьникам можно предложить следующее задание: «Разбейте числа 2, 3, 4, ..., 12 на *две* группы в зависимости от количества делителей этих чисел. Заметьте, что любое число всегда имеет два делителя – единицу и само себя». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.6. Непосредственно после изучения теоремы Пифагора можно предложить школьникам следующие задания: «1) Найдите диагональ квадрата со стороной 1. 2) В стене на высоте 1 м. находится шарнир, в который вставлен конец стержня длиной 2 м. На каком расстоянии от стены коснется пола второй конец стержня? 3) К какому уравнению приводят два предыдущие задания? 4) Можно ли представить решения этих уравнений в виде отношения двух натуральных чисел?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.7. Когда школьники привыкнут решать сюжетные задачи с помощью неизвестного, им можно предложить более абстрактное задание: «Поэкспериментируйте с уравнением $|x|(x-1)(x-2)=0$, заменяя неизвестное различными числами. На основе вашего эксперимента укажите какие-либо числа, которые играют особую роль по отношению к данному уравнению». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Задания 8.1–8.7 показывают, что простые математические эксперименты формируют мотивы к введению математических понятий.

Примеры и контрпримеры, или Подведение под понятие

8.8. При изучении углов школьникам можно предложить следующее задание: «1) Можно ли утверждать, что луч является биссектрисой, если он делит угол пополам? 2) Можно ли утверждать, что луч является биссектрисой, если каждая его точка равноудалена от сторон угла? 3) Лежит ли диагональ квадрата на биссектрисе угла квадрата? 4) Является ли диагональ квадрата биссектрисой угла квадрата?»

8.9. При изучении взаимного расположения прямых на плоскости целесообразно рассмотреть прямые в пространстве и предложить школьникам следующее задание: «1) Известно, прямые a и b в пространстве не пересекаются и не параллельны. При этом прямые a и c пересекаются, $a \perp c$ и $c \parallel b$. Можно ли утверждать, что $a \perp b$? 2) На модели куба покажите три прямые, расположенные так, как описано в предыдущем пункте». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.10. При изучении взаимного расположения прямых на плоскости целесообразно рассмотреть прямые в пространстве и предложить школьникам следующее задание: «1) Известно, что две прямые в пространстве не пересекаются. Параллельны ли они? 2) На модели куба покажите параллельные ребра, пересекающиеся ребра, а также ребра, которые не пересекаются и не параллельны.

Проделайте то же самое на модели тетраэдра». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Разумеется, школьникам не нужно «официально» сообщать термины «куб», «тетраэдр», «скрещивающиеся прямые». Достаточно, чтобы они почувствовали разницу между разнотипными парами непересекающихся прямых, параллельными прямыми и скрещивающимися прямыми.

8.11. При изучении треугольников можно предложить школьникам следующее задание: «Подобны ли треугольники, если стороны одного из них равны 2, 3 и 4,5 см, а другого – 6, 4 и 9 см?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.12. При изучении чисел школьникам можно дать задание: «Приведите пример простого/составного числа, лежащего в интервале [110, 144]». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Применяя решето Эратосфена, мы будем использовать простые числа 2, 3, 5,...Нужно ли нам проверять «большие» простые числа, например, 29 или 31? Нет, т.к. наименьший простой делитель числа не превосходит квадратного корня из этого числа. В нашем случае $\sqrt{144}=12$, *так что следует использовать простые числа до 11. Данное задание является хорошим поводом рассказать об оценке величины наименьшего простого делителя.*

8.13. При изучении чисел школьникам можно дать следующее задание: «Определите, каким является число $\log_2 3$, рациональным или иррациональным». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.14. При изучении уравнений, систем уравнений и совокупностей уравнений школьникам можно дать следующее задание: «Рассмотрите совокупность уравнений $\left[\begin{array}{l}(x-1)(x-2)(x-3)=0\\(x-2)(x-3)(x-4)=0\end{array}\right.$ и ответьте на следующие вопросы. 1) Является ли число 1 решением первого уравнения совокупности? решением второго уравнения совокупности? решением совокупности уравнений? 2) Является ли число 2 решением первого уравнения совокупности? решением второго уравнения совокупности? решением совокупности уравнений? 3) Приведите пример числа, не являющегося решением совокупности уравнений? 4) Перечислите все решения совокупности, то есть предъявите список решений и докажите, что других решений нет». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.15. Сконструируйте систему вопросов о решениях *системы уравнений*, которую можно было бы охарактеризовать как вопросы на подведение под понятие.

Первичное осмысление математических понятий невозможно без знакомства с примерами и контрпримерами, и задания 8.8–8.15 показывают, что их всегда удается привести.

Следствия из определений

8.16. Изучение биссектрис углов естественно продолжить при изучении других фигур. Вот одно из возможных заданий: «Каков тип того треугольника, который отсекается от параллелограмма биссектрисой его угла? Справедлив ли полученный ответ для трапеции?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.17. Изучение перпендикулярности естественно продолжить при изучении криволинейных фигур. Вот одно из возможных заданий: «В озере со сложной, изрезанной береговой линией находится пловец. Он устал и должен как можно скорее выбраться на берег. Что нужно считать расстоянием от пловца до берега?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.18. При изучении параллелограмма внимание сосредоточено на понятии параллельности. Вот еще одно задание: «Каково взаимное расположение биссектрис двух противоположных углов параллелограмма?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.19. При изучении треугольников можно предложить школьникам следующее задание: «Стороны треугольника ABC имеют длины 2, 3 и 4,5 см., а две стороны подобного ему треугольника PQR имеют длины 6 и 9 см. Какой может быть длина третьей стороны?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.20. При изучении чисел школьникам можно дать следующее задание: «Сумма двух простых чисел равна 65539. Найдите эти числа». Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.21. При изучении чисел школьникам можно дать следующее задание: «Известно, что число $\log_8 b$ рационально. Каким может быть число b?» Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Более глубокое осмысление понятий невозможно без их использования в нестандартных ситуациях, без извлечения следствий, возможно более серьезных, из определений. Именно с этой целью были приведены задания 8.16–8.20.

Систематизация

8.22. Понятие биссектрисы угла используется в формулировках различных теорем. Назовите такие теоремы из школьного курса геометрии. В каждом случае укажите, в сочетании с какими другими понятиями используется понятие биссектрисы. Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.23. Понятие перпендикулярных прямых используется в формулировках различных теорем. Назовите такие теоремы из школьного курса геометрии. В каждом случае укажите, в сочетании с какими другими понятиями используется понятие перпендикулярности прямых. Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.24. Понятие параллельности используется при изучении различных геометрических объектов. Перечислите такие объекты. В чем сходство двух концентрических окружностей и двух параллельных прямых? Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.25. В чем сходство между свойствами параллельности прямых и свойствами подобия треугольников? Какие еще понятия школьного курса математики обладают таким же набором свойств? Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.26. Рассматриваются два кольца: кольцо целых чисел и кольцо $Z\sqrt{2}$, которое состоит из чисел вида $a+b\sqrt{2}$, где a и b – целые числа. Известно, что число 7 является простым в кольце Z. Является ли оно простым в кольце $Z\sqrt{2}$? Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

8.27. Известно, что числа $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$ являются иррациональными. Докажите, что более «сложное» число $z=\sqrt{1+2\sqrt{3}}$ также является иррациональным. Докажите, что каждое из этих чисел является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Данное задание затрагивает не только понятие иррационального числа, но и понятие корня уравнения. Важно, что задание подводит нас к понятиям алгебраического числа и трансцендентного числа, хотя формально эти продвинутые для школьников понятия не используются.

8.28. Пусть a, b, c – количества корней уравнения $f(x)=0$, системы уравнений $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$ и совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{array}\right.$ соответственно. Расположите числа a, b, c в порядке возрастания. Ответьте на три основных вопроса применительно к данному заданию.

Полное осмысление изучаемого понятия происходит тогда, когда оно встраивается в систему знаний, существующих у школьника. Задания 8.21–8.27 показывают, что понятия школьного курса математики находятся в тесной взаимосвязи друг с другом.

9. Методика работы с теоремой

Новые открытия и их обсуждения приводят к необходимости *переосмысления* старых теорем, к необходимости исследовать их взаимное отношение в свете новых теорий… Для математики при этом характерно, что при подобных периодических переворотах сами теоремы остаются в целостности… Зато с величественного пьедестала «основных теорем» они зачастую спускаются в подчиненное положение «следствий», все менее и менее значительных, чтобы закончить свое существование в кладовке «упражнений», оставляемых для тренировки учащихся.

Ж. Дьедонне

Одна из точек зрения на процесс изучения теорем состоит в том, что он включает в себя следующие ***этапы:*** 1) мотивация изучения теоремы; 2) ознакомление с теоремой; 3) усвоение содержания теоремы; 4) запоминание формулировки теоремы; 5) ознакомление с методом доказательства; 6) доказательство теоремы; 7) применение теоремы; 8) установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами, изученными ранее.

В зависимости от конкретного содержания теоремы и опыта учащихся отдельные этапы могут опускаться.

Для ВСЕХ заданий данного раздела нужно ответить на следующие вопросы: 1) при изучении <u>какой теоремы</u> целесообразно использовать данное задание? 2) на <u>каком этапе</u> изучения теоремы следует применять данное задание? Иногда эти вопросы формулируются с той или иной степенью детализации, но даже тогда, когда они отсутствуют в тексте, именно они являются главными и требуют ответа.

Математические эксперименты

Задания 9.1–9.9 посвящены <u>математическим экспериментам</u>, которые связаны с теоремами, изучаемыми в школе. Эксперимент может относиться и к алгебре, и к геометрии. Школьник может оперировать реальными объектами или проводить мысленный эксперимент. Главное состоит в том, что эксперимент ставится <u>до</u> изучения связанной с ним теоремы.

Начнем с заданий геометрического характера. Выполняя построения, делайте чертеж крупным, а линии тонкими, но достаточно яркими. Это позволит вам проводить более точные измерения.

9.1. Измерьте транспортиром *несколько* вписанных углов, опирающихся на *одну и ту же* дугу окружности. Какую гипотезу можно высказать?

9.2. Продолжите измерения, начатые в задаче 9.1, а именно измерьте центральный угол, опирающийся на ту же дугу. Какую гипотезу можно высказать?

9.3. Вы хотите поставить эксперимент, *предваряющий* знакомство со следующим фактом: катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Опишите этот эксперимент.

9.4. Вырежьте из бумаги треугольник, оторвите его углы и попытайтесь уложить их вдоль линейки, совместив вершины и стороны так, как показано на рис. 5. Если это удалось, то какую гипотезу можно высказать?

9.5. Вы хотите поставить эксперименты, *предваряющие* знакомство с первым и вторым признаком равенства треугольников. Опишите эти эксперименты.

Отметим, что с помощью перегибания треугольника, вырезанного из бумаги, можно ставить эксперименты, приводящие к ряду важных теорем: о пересечении биссектрис, медиан, высот, серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Рекомендуем проделать их.

9.6. 1) Представьте в виде степени числа 2 частное $\frac{2^5}{2^2}$. 2) Представьте в виде степени числа 3 частное $3^7 : 3^3$. 3) Представьте в виде степени числа 5 частное $\frac{5^6}{5^4}$. Какую гипотезу можно высказать?

9.7. 1) Вычислите: $15{,}3^2+4{,}7^2+2\cdot15{,}3\cdot4{,}7$. 2) Возведите в квадрат сумму чисел a и b и прочитайте результат, не используя буквенных обозначений. Запишите формулу. 3) Примените формулу пункта 2 для облегчения вычислений пункта 1. Назовите теорему, при изучении которой целесообразно использовать описанный эксперимент, а также этап изучения этой теоремы.

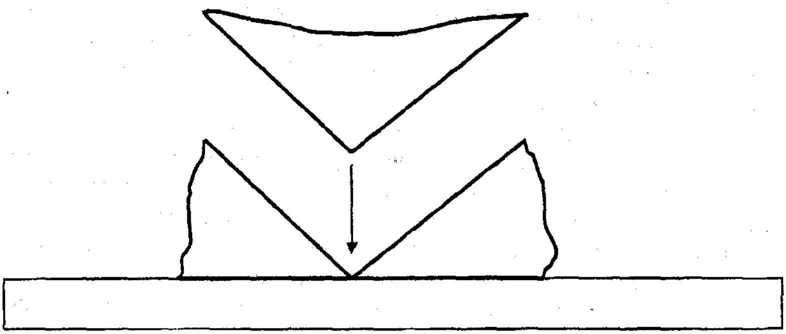


Рис. 5

Обратите внимание на следующее: при вычислении выражения a^2+b^2+2ab *нужно выполнить* <u>*восемь*</u> *арифметических операций, а при вычислении выражения* $(a+b)^2$ *– всего* <u>*две*</u>. *По-видимому, в ряде случаев известную формулу квадрата суммы двух чисел целесообразно записывать в виде* $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$ *и трактовать как разложение суммы в произведение.*

9.8. Проделайте следующий двухэтапный эксперимент. 1) Проведите на плоскости прямую a, выберите две точки P и Q в разных полуплоскостях и соедините их с помощью непрерывной кривой, то есть такой кривой, которую вы нарисуете без отрыва карандаша от бумаги. Каково взаимное расположение прямой a и нарисованной вами кривой? 2) Рассмотрите непрерывную функцию, то есть такую, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Пусть она непрерывна на отрезке $[a,b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Каково взаимное расположение графика функции и оси абсцисс? Какую гипотезу можно высказать? С какой теоремой математического анализа знакомит нас этот эксперимент? На каком этапе изучения теоремы целесообразно применять этот эксперимент?

9.9. Тело движется по ориентированной прямой в течение некоторого промежутка времени, причем в конечный момент времени оно возвращается в исходное положение. Какова скорость тела в момент наибольшего удаления? С какой теоремой математического анализа связан этот мысленный эксперимент?

9.10. Каждое из заданий 9.1–9.9 приводило нас к некоторой самостоятельно высказанной гипотезе. Какую роль играет самостоятельная формулировка гипотез при изучении теорем?

Логический анализ формулировки теоремы

Неотъемлемой частью теоремы является ее формулировка, поэтому при изучении теоремы некоторое время должно быть уделено именно формулировке, безотносительно к мотивам изучения теоремы, методу доказательства, структуре доказательства и т.д. Задания 9.11–9.14 касаются логического анализа формулировки, то есть выявлению ее структуры и демонстрации того факта, что ни одно из условий теоремы не может быть опущено. Советуем просмотреть также задания 7.6 из раздела «Необходимое следствие, достаточное условие и критерий».

9.11. Для каждой из предлагаемых ниже теорем проделайте следующее: а) сформулируйте ее в условной форме; б) опишите класс объектов, к которому применима теорема, то есть выявите ее разъяснительную часть; в) выделите условие теоремы и укажите количество условий; г) выделите заключение теоремы и укажите количество заключений. Вот список теорем.

1. Теорема о средней линии треугольника (трапеции).
2. Теорема о трех перпендикулярах.
3. Признак параллельности прямых.
4. Теорема Фалеса.
5. Критерий остроугольности (тупоугольности) треугольника, выраженный через длины его сторон.
6. Свойство биссектрисы угла треугольника.
7. Теорема Виета.
8. Теорема о виде неприводимого многочлена с вещественными коэффициентами.
9. Достаточное условие монотонности функции.
10. Первое достаточное условие экстремума функции.
11. Теорема о среднем (Ролля) в дифференциальном исчислении.
12. Теорема о среднем (Лагранжа) в дифференциальном исчислении.
13. Теорема Лагранжа о сходимости знакочередующегося ряда.
14. Признак Даламбера сходимости ряда.

Отметим, что данные задания можно рассматривать с различной степенью общности. Например, признак параллельности прямых можно рассматривать как <u>достаточное условие</u> параллельности прямых (так обычно делается в школьных учебниках), а можно рассматривать как <u>критерий</u> параллельности. Теорему Виета можно рассматривать только для многочленов с вещественными коэффициентами, как это обычно делается в школе, а можно рассматривать для многочленов с комплексными коэффициентами. От точки зрения во многом зависит решение задач.

9.12. Теорема Ролля формулируется достаточно сложно: «Пусть функция f обладает следующими свойствами: 1) непрерывна на отрезке $[a,b]$; 2) дифференцируема на интервале (a,b); 3) имеет равные значения на концах отрезка. Тогда существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $f'(c)=0$». Не является ли лишним какое-либо из условий? Другими словами, не останется ли заключение теоремы справедливым, если мы опустим то или иное из условий?

9.13. Теорема Лагранжа формулируется достаточно сложно: «Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Тогда существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$». Не является ли лишним какое-либо из условий? Другими словами, не останется ли заключение теоремы справедливым, если мы опустим то или иное из условий?

9.14. Известны четыре теоремы о функциях, непрерывных на *замкнутом* отрезке $[a,b]$: 1) первая теорема Больцано-Коши о существовании нуля у функции, принимающей на концах отрезка значения разных знаков; 2) вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции; 3) первая теорема Вейерштрасса об ограниченности функции; 4) вторая теорема Вейерштрасса достижении функцией верхней и нижней граней. Можем ли мы ослабить требование глобальной непрерывности и утверждать, что заключения теорем останутся справедливыми, если функция будет разрывна в одной точке отрезка и непрерывна в остальных?

9.15. Каждое из заданий 9.11–9.14 приводило нас к выявлению логической структуры формулировки теоремы, в частности, к выявлению роли каждого из условий теоремы. Какую роль играет такое выявление при изучении теорем?

Выявление метода доказательства теоремы

Задания 9.16–9.21 связаны с методами доказательства различных теорем. При их решении главным является ответ на следующий вопрос: каким этапам работы с теоремой способствует указание на методы доказательства, предшествующее самому доказательству? Советуем внимательно поработать с последним заданием данной серии.

9.16. Каким методом доказывается непериодичность квадратичной функции $f(x) = x^2$? Какие еще теоремы доказываются этим же методом?

9.17. Каким методом доказывается теорема об угле, вписанном в окружность? Какие еще теоремы доказываются этим же методом?

9.18. Каким методом доказывается соотношение $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ между средним геометрическим и средним арифметическим двух положительных чисел? Какие еще теоремы доказываются этим же методом?

9.19. 1) В какой-то момент учащиеся *средних классов* знакомятся с формулой квадрата суммы двух чисел: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Каким методом можно доказать формулу для квадрата разности двух чисел?

2) В какой-то момент учащиеся *старших классов* знакомятся с теоремой сложения для синуса: $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. Каким методом можно доказать формулу для синуса разности двух чисел?

3) В какой-то момент времени *студенты вуза* знакомятся с первой теоремой Больцано-Коши о функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$: если такая функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке отрезка она обращается в нуль. Каким методом доказывается ее следствие о промежуточном значении функции?

9.20. Одно из доказательств того факта, что высоты треугольника пересекаются в одной точке, использует следующую идею. Через вершины треугольника ABC проводят прямые, параллельные противоположным сторонам, которые пересекаются в точках P, Q, R. Получается, что высоты треугольника ABC являются серединными перпендикулярами сторон треугольника PQR, а серединные перпендикуляры, как известно, пересекаются в одной точке. Как можно было бы назвать метод доказательства этой теоремы? Насколько широко он используется?

Укажем на одну особенность дополнительных построений в геометрии. С одной стороны, они используются при доказательстве весьма многих теорем, поэтому мы вправе говорить о дополнительных построениях как о <u>методе</u> доказательства. С другой стороны, этот метод отнюдь не носит алгоритмического характера, поскольку всякий раз применяются <u>индивидуальные</u> дополнительные построения.

9.21. Известно, что две наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, равны тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий: а) равны проекции этих наклонных; б) равны углы между наклонными и плоскостью. Каким методом, помимо метода дополнительных построений, доказываются эти *четыре* теоремы?

9.22. Перечислите методы доказательства различных теорем, которые фигурируют в задачах 9.16–9.21. Оцените степень универсальности этих методов. Каким этапам работы с теоремой способствует указание на методы доказательства, предшествующее самому доказательству?

Выявление структуры доказательства теоремы

9.23. Для каждой из следующих теорем составьте план ее доказательства: 1) теорема Пифагора, 2) теорема Фалеса; 3) теорема о средней линии треугольника; 4) теорема о средней линии трапеции; 5) критерий существования окружности, вписанной в четырехугольник; 6) критерий существования окружности, описанной около четырехугольника; 7) необходимое условие экстремума; 8) достаточное условие экстремума. На каком этапе изучения теоремы целесообразно составлять план ее доказательства? Какую роль играет составление плана доказательства при изучении теорем?

9.24. Для каждой из следующих теорем перечислите те математические факты (аксиомы, ранее изученные теоремы), которые используются при ее доказательстве: 1) теорема о пересечении медиан треугольника; 2) теорема о пересечении высот треугольника: 3) теорема о пересечении биссектрис треугольника; 4) признак параллельности плоскостей; 5) признак перпендикулярности плоскостей; 6) необходимое следствие сходимости ряда; 7) теорема Ролля; 8) теорема Лагранжа. На каком этапе изучения теоремы целесообразно выявлять перечень математических фактов, используемых в процессе доказательства? Какую роль играет такой перечень в процессе изучения теоремы?

9.25. Для каждой из следующих теорем перечислите те математические понятия, которые используются при ее доказательстве: 1) теорема о пересечении медиан треугольника; 2) теорема о пересечении высот треугольника: 3) теорема о пересечении биссектрис треугольника; 4) признак параллельности плоскостей; 5) признак перпендикулярности плоскостей; 6) необходимое следствие сходимости ряда; 7) теорема Ролля; 8) теорема Лагранжа. На каком этапе изучения теоремы целесообразно выявлять перечень математических понятий, используемых в процессе доказательства? Какую роль играет такой перечень в процессе изучения теоремы?

9.26. Ниже будут перечислены теоремы, имеющие не одно, а несколько условий. Укажите то место доказательства, где используется каждое из них. На каком этапе изучения теоремы целесообразно выявлять роль каждого из ее условий? Вот список теорем: 1) теорема Ролля; 2) теорема Лагранжа; 3) достаточное условие монотонности функции; 4) первое достаточное условие экстремума функции. На каком этапе изучения теоремы целесообразно демонстрировать влияние каждого из условий? Какую роль играет «привязка» каждого из условий к месту доказательства в процессе изучения теоремы?

9.27. Каждое из заданий 9.23–9.26 приводило нас к выявлению логической структуры доказательства теоремы, в частности, к выявлению роли каждого из условий теоремы. Какую роль играет такое выявление при изучении теорем?

Применение теоремы

9.28. Сразу после изучения признаков параллельности прямых можно предложить учащимся такую задачу: «Через вершину треугольника проведите прямую, параллельную противоположной стороне. Отметьте на чертеже равные углы. Сложите все углы при той вершине, через которую проведена прямая. Какова сумма и как она связана с суммой углов треугольника? Сформулируйте ответ в виде теоремы». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.29. Сразу после изучения теоремы Пифагора можно предложить учащимся такую задачу: «Гипотенуза и один из катетов прямоугольного треугольника пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника соответственно, причем коэффициент пропорциональности равен k. Найдите отношение других катетов. Сформулируйте ответ в виде теоремы». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.30. Сразу после изучения формулы $\log_b a^n = n\log_b a$ можно предложить учащимся следующую задачу: «Прологарифмируйте по основанию b основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x} = x$. Сформулируйте результат в виде теоремы. Интерпретируйте результат в терминах преобразования графиков логарифмических функций по разным основаниям». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.31. Сразу после изучения формулы бинома Ньютона можно предложить учащимся следующую задачу: «Какой вид принимает формула бинома Ньютона, если оба слагаемых бинома равны единице? Сформулируйте результат в виде теоремы». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.32. Сразу после изучения теоремы Лагранжа (дифференциальное исчисление) можно предложить учащимся следующую задачу: «Известно, что к функции f можно применить теорему Лагранжа на отрезке $[a,b]$. Известно также, что производная функции равна нулю на отрезке $[a,b]$. Примените теорему Лагранжа к этой функции и отрезку $[a,x]$, где $a < x \le b$. Сформулируйте результат в виде теоремы». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.33. Сразу после изучения теоремы Лагранжа (дифференциальное исчисление) можно предложить учащимся следующую задачу: «Известно, что к функции f можно применить теорему Лагранжа на отрезке $[a,b]$. Известно также, что производная функции положительна во всех точках отрезка $[a,b]$. Примените теорему Лагранжа к этой функции и отрезку $[x_1,x_2]\subset[a,b]$. Сформулируйте результат в виде теоремы». При изучении какой темы целесообразно использовать данную задачу? Опишите то педагогическое воздействие, которое, по вашему мнению, может оказать решение данной задачи.

9.34. Каждое из заданий 9.28–9.33 создавало ситуацию, специфика которой состоит в том, что применение известной теоремы приводит к новой теореме. Какую роль в обучении математике играет систематическое возникновение подобных ситуаций?

Систематизация теорем

9.35. Выберите теоремы из школьных учебников, которые выявляют свойства: 1) треугольника; 2) четырехугольника; 3) окружности. Для каждой из фигур структурируйте множество выбранных вами теорем, построив схему их взаимозависимостей. Укажите также класс, в котором изучаются эти теоремы. Какому этапу освоения геометрии соответствует настоящее задание?

9.36. Большой массив тригонометрических формул разбивается на следующие группы: основное тригонометрическое тождество, соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла, теоремы сложения, формулы приведения, формулы двойного угла, формулы понижения степени, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму, преобразование суммы и разности одноименных тригонометрических функций в произведение. Укажите схему взаимозависимости этих групп формул. Какому этапу освоения тригонометрии соответствует настоящее задание?

9.37. При аксиоматическом построении системы вещественных чисел можно сформулировать аксиому непрерывности в форме Дедекинда, то есть как аксиому о разделяющем числе. В этом случае взаимозависимость теорем в разделе «Введение в математический анализ» выглядит следующим образом. 1) Непосредственно из аксиоматики выводится теорема о существовании иррациональных чисел, теоремы Архимеда и Кантора, теорема о существовании верхней грани ограниченного сверху множества, характеристическое свойство грани. 2) Из теоремы Архимеда выводится теорема о рациональном приближении иррационального числа, теорема о плотности рациональных чисел во множестве вещественных чисел, теорема о делении с остатком. Из этой последней выводится теорема о систематической записи натурального числа. 3) Из теоремы Кантора о системе стягивающихся отрезков вытекают несколько теорем о свойствах функций, непрерывных на замкнутом отрезке: первая теорема Больцано-Коши о нуле непрерывной функции и ее следствие – вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении функции, первая теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, теорема о равномерной непрерывности функции. 4) Из двух теорем о гранях (пункт 1) выводится вторая теорема Вейерштрасса о достижении верхней грани функцией, непрерывной на отрезке, а также теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности. Из этой последней выводится существование двух замечательных чисел, π и e.

Все перечисленные теоремы интересны и глубоки, ни одна не может быть удалена без того, чтобы содержание математического анализа не оказалось обедненным. Тем не менее, существуют некоторые «узловые», самые важные теоремы. Укажите *две* теоремы, которые, с вашей точки зрения, наиболее важны, и подробно обоснуйте ответ. Какому этапу освоения курса математического анализа соответствует настоящее задание?

9.38. Изучение раздела «Дифференциальное исчисление» начинается с введения понятия производной и выявления простейших свойств производной. Затем доказывается ряд теорем, взаимная зависимость которых выглядит следующим образом. 1) Сначала доказывается необходимое условие экстремума (теорема Ферма). 2) Затем из нее и из второй теоремы Вейерштрасса выводится теорема Ролля. 3) Из теоремы Ролля выводятся теоремы Лагранжа и Коши. 4) Из теоремы Коши выводятся глобальная формула Тейлора и правила Лопиталя. 5) Из теоремы Лагранжа выводится серия теорем: критерий постоянства функции, достаточное условие монотонности функции, достаточное условие выпуклости функции, первое достаточное условие точки перегиба, локальная формула Тейлора. 6) Из достаточного условия монотонности функции выводится первое достаточное условие экстремума функции.

Все перечисленные теоремы интересны и глубоки, ни одна не может быть удалена без того, чтобы содержание математического анализа не оказалось обедненным. Тем не менее, укажите одну-две теоремы, которые, с вашей точки зрения, наиболее важны, и подробно обоснуйте ответ. Какому этапу освоения курса математического анализа соответствует настоящее задание?

Нетрудно видеть, что задания 9.35–9.38 целесообразно применять на этапе систематизации материала, а также на том этапе, на котором рассматривается применение отдельной теоремы или группы теорем.

10. Задача и ее окрестность

> Решение задач – практическое искусство, подобное плаванию, катанию на лыжах или игре на фортепиано; научиться ему можно, только подражая хорошим образцам и постоянно практикуясь.
>
> *Д. Пойа*, «Математическое открытие»

Общепринятое представление о единстве математики находит свое естественное отражение в области методики ее преподавания, в частности, при составлении и изучении отдельных задач и систем задач. Процитируем одного из известных авторов.[1]

«Каждая задача, рассматриваемая сама по себе, обычно представляет некоторое изолированное утверждение или требование и предполагает выполнение определенных действий для ее решения. Между тем учитель, ставящий задачу перед учащимися, … преследует, как правило, более общие цели, для него конкретная задача является лишь одной из многих, узкочастным средством для достижения более общих целей – формирования или закрепления нового понятия, получения новых или активизации старых знаний, демонстрации определенного метода рассуждений … и т.п.»

<…> «Каждая конкретная задача имеет определенный набор связанных с ней задач, определенную окрестность – по содержанию, по методам рассуждений, кругу используемых понятий. Более того, каждая задача входит в некоторый *букет окрестностей*, связанных с той или иной ее особенностью…»

<…> «Невозможно, очевидно, сформулировать какие-либо достаточно определенные «алгоритмы» построения окрестности конкретной задачи, и поэтому важной представляется систематизация разнообразных приемов варьирования задач, достаточно общая в теоретическом плане и в то же время эффективная в плане практическом. Такая систематизация является … необходимым средством обучения учителей … умению видеть взаимосвязи отдельных внешне разрозненных задач, самостоятельно составлять циклы задач, объединенные общими идеями.»

Целью настоящего раздела является выявление некоторых важных *приемов варьирования задач* и составления целостных групп задач.

---

[1] Дорофеев Г.В. О составлении циклов взаимосвязанных задач // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34-39.

Естественно предположить, что общенаучные методы обобщения и конкретизации являются источником математических задач и способом их объединения в группы, наделенные глубокими взаимосвязями между отдельными элементами группы. Задачи 10.1–10.4 иллюстрируют наше предположение на алгебраическом, аналитическом и геометрическом материале.

10.1. Рассмотрите в совокупности три нижеследующие задачи.

1) Докажите тождество $(b^5+a^5):(b+a)=b^4-b^3a+b^2a^2-ba^3+a^4$.

2) Докажите, что для любого нечетного n многочлен x^n+a^n делится на двучлен $x+a$.

3) Докажите, что при любом натуральном n все числа вида $p_n=25^{2n+1}+1$ делятся на 13. Какие еще делители есть у всех этих чисел?

Опишите взаимосвязи между задачами. Более конкретно, выявите, как можно получить одну задачу из другой. Как можно решить каждую из них? Предложите несколько методов.

Итак, обнаружены два метода преобразования задач, а именно общенаучные методы обобщения и конкретизации. Для будущего педагога весьма полезно накапливать методы преобразования одних задач в другие.

10.2. Составьте группу задач, аналогичную той, что рассмотрена в № 10.1.

10.3. Рассмотрите в совокупности три нижеследующие задачи.

1) Известна формула нахождения производной произведения двух функций: $(uv)'=u'v+uv'$. С ее помощью выведите формулу Лейбница для нахождения производной любого порядка от произведения: $(uv)^{(n)}=\sum C_n^i u^{(n-i)}v^{(i)}$.

2) Найдите производную $(x^2\cdot\cos x)^{(50)}$.

3) С помощью формулы Лейбница докажите два известных свойства биномиальных коэффициентов: а) сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n; б) сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Опишите взаимосвязи между задачами. Более конкретно, выявите, как можно получить одну задачу из другой. Как можно решить каждую из них?

10.4. Рассмотрите в совокупности шесть нижеследующих задач.

1) Пусть A, B, C, D – различные точки окружности. Если хорды AB и CD пересекаются в точке P внутри круга, то $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

2) Пусть A, B, C, D – различные точки окружности. Если хорды AB и CD пересекаются в точке P, то $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

3) Пусть A, B, C, D – точки окружности. Если хорды AB и CD различны и пересекаются в точке P, то $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

4) Пусть A, B, T – различные точки окружности. Если хорда AB и касательная в точке T пересекаются в точке P, то $PA\cdot PB=PT^2$.

5) Докажите, что отрезки касательных, заключенные между точками касания и точкой пересечения касательных, равны между собой.

6) Рассматриваются отрезки PA, PB и PT из задачи 4. Из них строится треугольник следующим образом: а) на прямой выбирается точка P; б) на пря-

мой откладываются отрезки PA и PB по разные стороны от точки P; в) через точку P проводится перпендикуляр к прямой; г) на перпендикуляре откладывается отрезок PT. Каков вид треугольника ABT?

Опишите взаимосвязи между задачами. Более конкретно, выявите, как можно получить одну задачу из другой. Как можно решить каждую из них?

Теперь мы перейдем от общенаучных методов формирования групп упражнений к конкретным математическим методам образования таких групп. Задачи 10.5–10.11 посвящены классическим неравенствам, связывающим средние величины.

10.5. Хорошо известно, что для любых положительных чисел a и b среднее арифметическое не меньше среднего геометрического:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

Кроме того, известны неравенства:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2, \tag{2}$$

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}, \tag{3}$$

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \tag{4}$$

Выявите тот *ключевой факт*, на котором базируются все неравенства (1)–(4).

Следующая задача в определенном, специфическом смысле является обратной к предыдущей.

10.6. Известно, что квадрат любого вещественного числа неотрицателен: $u^2 \ge 0$. Выявите те *методы*, с помощью которых из этого факта можно извлечь неравенства (1)–(4).

Зафиксируйте для себя два новых метода преобразования задач, которые выявились в процессе решения задачи 5.6.

10.7. 1) Оцените сверху среднее квадратичное $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. 2) Оцените снизу среднее гармоническое $\frac{2ab}{a+b}$.

Окончательно имеем цепочку неравенств

$$\min\{a,b\} \overset{(5)}{\le} \frac{2ab}{a+b} \overset{(3)}{\le} \sqrt{ab} \overset{(1)}{\le} \frac{a+b}{2} \overset{(4)}{\le} \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \overset{(6)}{\le} \max\{a,b\}. \tag{7}$$

Крайние неравенства в этой цепочке, левое и правое, обозначены через (5) и (6) соответственно. Данная цепочка получается из простейшего неравенства $u^2 \ge 0$ тремя методами: методом замены переменных, методом тождественных преобразований и методом оценки выражений. Отметим, что доказательство каждого из неравенств можно предложить учащимся как самостоятельную задачу.

10.8. 1) Изобразите неравенства (1)–(6) и $u^2 \geq 0$ в виде вершин графа. 2) Соедините вершины графа ориентированными ребрами (стрелками) по следующему правилу: если неравенство (А) получается из неравенства (В) в результате применения вышеперечисленных методов к неравенству (В) в целом или к его части, то из вершины (В) выходит стрелка, оканчивающаяся в вершине (А). 3) Для каждой стрелки укажите тот метод или те методы, которым она соответствует.

В результате решения этой задачи мы получили задачный граф, который отражает взаимозависимость отдельных задач и схему применения методов трансформации одной задачи в другую.

На неравенства (7) можно смотреть с геометрической точки зрения. Действительно, числа a и b можно трактовать как длины оснований трапеции. В этом случае их среднее арифметическое, фигурирующее в неравенствах (7), есть длина средней линии трапеции. Естественно предположить, что средние величины остальных типов также являются длинами каких-либо особых линий в трапеции. Этому посвящены три следующие задачи.

10.9. Пусть четырехугольник $ABCD$ таков, что $BC = a \leq b = AD$ и $BC \parallel AD$, то есть трапеция или параллелограмм. Проведем в нем отрезки l_1, l_2, l_3 и l_4, которые параллельны основаниям и концы которых лежат на сторонах AB и CD. При этом l_1 – средняя линия трапеции, l_2 проходит через точку пересечения диагоналей, l_3 делит трапецию на две подобные трапеции, а l_4 делит трапецию на две равновеликие трапеции. Расположите эти отрезки в порядке возрастания их длин.

10.10. Каков вид четырехугольника $ABCD$ из предыдущей задачи, если длины двух построенных отрезков равны? Зависит ли результат от того, какие именно отрезки имеют равную длину?

10.11. С помощью циркуля и линейки постройте отрезки l_1, l_2, l_3 и l_4 из задачи 10.9.

Итак, мы имеем еще один метод трансформации задач – метод геометризации алгебраических выражений.

В процессе преподавания достаточно часто встречается ситуация, когда учащимся необходимо усвоить ту или иную формулу. Для этого приходится находить или составлять разнохарактерные упражнения, объединенные в целостную группу тем обстоятельством, что все они используют изучаемую формулу. Задачи 10.12–10.13 посвящены выявлению одного из методов составления таких групп упражнений.

10.12. Рассмотрите в совокупности четыре нижеследующие задачи и выявите сходство и различие между ними. Каков *метод составления* этой группы задач?

1) Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 4x + 4$ в точке с абсциссой $x_0 = 3$.

2) Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-4x$ в точке с ординатой $y_0=-3$. Сколько решений имеет задача?

3) В какой точке касательная к графику функции $f(x)=x^2$ а) параллельна прямой $y=2x$? б) перпендикулярна прямой $y=2x+1$?

4) Найдите уравнение параболы $f(x)=x^2+bx+c$, касающейся прямой $y=x$ в точке $M(1,1)$.

Итак, мы нашли еще один метод составления задач – последовательное превращение в неизвестное различных элементов формулы. Назовем его условно «дрейфом неизвестного».

10.13. Составьте систему упражнений для усвоения формулы $a^n\cdot a^k=a^{n+k}$. Сколько упражнений естественно включить в данную систему?

Встречаются ситуации, когда приходится объединять в целостную группу однотипные задания, касающиеся однотипных объектов. Например, при изучении квадратных уравнений обязательно нужно рассмотреть уравнения, не имеющие корней, а также уравнения с одним и двумя корнями. При изучении систем линейных уравнений необходимо предъявлять как несовместные, так и совместные системы, а в последнем случае – определенные и неопределенные. Более того, среди неопределенных систем целесообразно рассмотреть системы, множество решений которых зависит от разного числа параметров, например, от одного, двух и трех параметров. Обобщенно говоря, группа однотипных заданий формируется в тех случаях, когда алгоритм решения может приводить к принципиально разным результатам. Будем говорить, что такие группы заданий формируются методом классификации математических объектов.

Другой причиной, которая заставляет формировать группы однотипных заданий, является необходимость продемонстрировать особенности применения единой математической техники. Задача 10.14 иллюстрирует эту причину.

10.14. Оцените сверху следующие выражения:

1) $S_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}$; 2) $S_n=1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\dots+\frac{2^n}{n!}$;

3) $S_n=1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\dots+\frac{3^n}{n!}$; 4) $S_n=1+4+\frac{4^2}{2!}+\frac{4^3}{3!}+\dots+\frac{4^n}{n!}$.

Опишите сходство и различие в решениях этих задач. Не тратьте время на решение первых двух задач, а сразу просмотрите разделы «Идеи» и «Ответы». Две другие задачи решите самостоятельно и сравните решения всех четырех задач.

Демонстрация особенностей математической техники позволяет вводить в процесс обучения достаточно много примеров. Важно, что на их основе можно применить еще один метод объединения задач в группы: метод углубленного изучения математического объекта.

10.15. Рассмотрите в совокупности четыре следующие задачи.

1) Оцените выражение $S_n = 1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!} + \cdots + \frac{4^n}{n!}$. 2) Докажите, что последовательность S_n сходится. 3) Сходится ли ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$? Если да, то оцените сверху его сумму. 4) Найдите предел $\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!}$.

а) Что является объектом изучения всех четырех задач? б) Выявляется ли в процессе решения взаимосвязь между какими-либо определениями и/или теоремами? Какими? в) Новы ли для вас полученные результаты или методы доказательства?

Рассмотрение предыдущих задач позволило нам выявить ряд методов, с помощью которых отдельные разрозненные задачи могут быть объединены в группы:

- *метод обобщения и конкретизации;*
- *метод замены переменных;*
- *метод тождественных преобразований;*
- *метод оценки выражений;*
- *метод геометризации;*
- *метод «дрейфа неизвестного»;*
- *метод классификации математических объектов;*
- *метод демонстрации особенностей математической техники;*
- *метод углубленного изучения математического объекта.*

Подчеркнем некоторые важные обстоятельства: 1) данный список методов, как и любой подобный список, не является полным; 2) ни один из перечисленных методов не является универсальным; 3) успешное применение учителем указанных методов возможно только на базе глубоких знаний математики.

В заключение данного раздела покажем, что удачно составленная окрестность какой-либо задачи заключает в себе большие возможности для углубленного изучения математического материала, а также для его методико-математического анализа.

10.16. Рассмотрите нижеследующую дидактическую единицу, состоящую из шести задач и их решений. Проведите анализ этой единицы с различных точек зрения. Конкретные вопросы, облегчающие такой анализ, будут предложены после изложения решений.

1°. Вычислите предел $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x}$. ***Ответ*** 3 очевиден.

2°. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую равенству $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$. Приведите возможно большее количество примеров таких функций.

Решение. Поделим на 3 обе части исходного равенства и внесем делитель под знак предела: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)/3}{x} = 1 = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{3x}$. Получаем, что функции x и $f(x)/3$

являются эквивалентными бесконечно малыми, и аналогично функции $f(x)$ и $3x$ также являются эквивалентными бесконечно малыми. Если воспользоваться стандартной цепочкой эквивалентных бесконечно малых

$$x \sim \sin x \sim tgx \sim \arcsin x \sim arctgx \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim (\alpha)^{-1}[(1+x)^{\alpha} - 1],$$

то получим первую серию ответов: $f_1(x) = 3x, f_2(x) = 3\sin x, f_3(x) = \sin 3x$, $f_4(x) = \ln(1+3x)$ и т.д. Однако возможна и другая серия ответов, например, такая: $\bar{f}_i(x) = f_i(x)\varphi(x) + \psi(x)$, где $f_i(x)$ – одна из функций предыдущей серии, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет равенству $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 1$, а функция $\psi(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем x. Таким образом, разнообразие ответов весьма велико.

3°. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 2.

Решение. Возможна тривиальная аналогия, когда единственным отличием нового задания от предыдущего является функция, стоящая в знаменателе. Мы предпочитаем не столь прямую аналогию и меняем место неизвестного компонента задания, делая неизвестным знаменатель. Искомая формулировка звучит так: «Найдите функцию $g(x)$, удовлетворяющую равенству $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{g(x)} = 3$. Приведите возможно большее количество примеров таких функций». Решение задачи 3 аналогично решению задачи 2.

4°. Сформулируйте и решите задачу, обобщающую задачу 3.

Решение. Одно из возможных обобщений равенства, используемого в формулировке задания 3, состоит в замене значения предела на произвольное число. Формулировка нового задания будет звучать так: «Считая, что число $a \neq 0$, найдите функцию $h(x)$, удовлетворяющую равенству $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{h(x)} = a$». Можно свести его к задаче 3 путем умножения обеих частей равенства на дробь $3/a$ или же решить его, не апеллируя к предшествующим задачам.

5°. Найдите число b, для которого выполняется равенство $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{\sin x}{x-b} = 1$.

Решение. Поскольку знаменатель дроби стремится к нулю, а сама дробь имеет конечный предел, числитель дроби стремится к нулю: $\lim\limits_{x\to b}\sin x = 0$. В силу непрерывности синуса получаем, что $\sin b = 0$, откуда $b = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Прямой проверкой получаем, что при нечетном n значение b не удовлетворяет требуемым условиям, а при четном n – удовлетворяет. Окончательно, $b=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Полезно нарисовать на одном чертеже график числителя и различных возможных знаменателей.

6°. При каких соотношениях между параметрами a, b, c, d выполняется равенство $\lim\limits_{x\to b/a}\dfrac{\sin cx}{ax-b} = d$? Считаем при этом, что параметры a и c отличны от нуля.

Ответ: $\begin{cases} d=(-1)^n c/a, \\ b=\pi n a/c, \end{cases}$ где $n\in\mathbf{Z}$. Он может быть получен с помощью рассуждений, аналогичных тем, что были предложены при решении задачи 5. Можно также использовать более сильное техническое средство – правило Лопиталя.

Вопросы для анализа. 1) Какой объект изучает данная дидактическая единица? 2) Какой материал из курса математического анализа лежит в основе решения большинства задач? 3) Перечислите те дополнительные факты школьного и вузовского курса математики, которые, помимо основного, требуются вам для решения. 4) Насколько активно осуществляется повторение ранее изученного материала в процессе решения данной серии задач? 5) Выявляются ли взаимосвязи первого замечательного предела с системой предшествующих знаний? 6) Каким методом составлена данная серия задач? 7) Имеется ли *открытая* задача в данной серии задач? 8) Математик выполняет дополняющие друг друга действия: *решает* задачи, приходящие к нему извне, и *формулирует* новые задачи. Представлены ли эти действия в данной серии задач? 9) Математик ищет методы решения классов *аналогичных* задач. Представлена ли аналогия в данной серии задач? 10) Математик делает *обобщения* ранее известных фактов. Представлено ли обобщение в данной серии задач? 11) Математику приходится *конструировать* математические объекты. Представлено ли конструирование в данной серии задач? 12) Математику приходится решать взаимно обратные задачи. Представлены ли в данной серии пары взаимно обратных задач? 13) В какой мере данная серия задач иллюстрирует работу профессионального математика?

11. Визуализация

Подобные представления об этих вещах весьма полезны, поскольку ничто не является для нас более наглядным, чем фигура, ибо ее можно осязать и видеть.

Р. Декарт

В рамках данного пособия будем трактовать понятие визуализации в контексте общего понятия модели: «Под *моделью* понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте».[2] Процесс построения и/или изучения модели называется моделированием. Приведем несколько примеров.

1) *Объект* – это свободно колеблющийся маятник. *Модель* – это дифференциальное уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$.

2) *Объект* – это электрическая цепь постоянного тока. *Модель* – это система линейных уравнений, составленная по законам Кирхгофа.

---

[2] Штоф В.А. Моделирование и философия. [Текст] – М.;Л., 1966. – С. 19.

3) *Объект* – тело, брошенное под углом к горизонту. *Модель* – это параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t - gt^2/2 \end{cases}$, где v_1 и v_2 – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно.

4) *Объект* – это текст геометрической задачи. *Модель* – это соответствующий чертеж.

5) *Объект* – это аналитически заданная функция. *Модель* – это эскиз ее графика.

6) *Объект* – это алгоритм, записанный на одном из языков программирования. *Модель* – это блок-схема алгоритма.

Будем говорить, что модель называется ***зрительным образом*** объекта, если при ее изучении активно используются органы зрения. Процесс построения зрительного образа будем называть ***визуализацией*** объекта.

Очевидно, что модели, фигурирующие в примерах 1–3, имеют знаково-символическую природу, так что получение информации об этих моделях непосредственно с помощью органов зрения проблематично. Модели, фигурирующие в примерах 4–6, являются зрительными образами объектов, так что процесс построения этих моделей можно назвать визуализацией объектов.

В задачах 11.1–11.3 рассматриваются уравнения малых степеней, а именно, степеней 1, 2 и 3, с вещественными коэффициентами.

11.1. Визуализируйте множество

1. линейных уравнений;
2. уравнений вида $ax + b = 0$;
3. уравнений вида $ax + b = 0$, у которых
   3.1. нет корней;
   3.2. бесконечно много корней;
   3.3. единственный корень;
      3.3.1. единственный положительный корень;
      3.3.2. единственный отрицательный корень;
      3.3.3. единственный нулевой корень.

Это простое упражнение, единственная «изюминка» которого состоит в том, что уравнение вида $ax + b = 0$ является линейным не всегда, а только при том условии, что $a \neq 0$. На этом отличии построены многие уравнения с параметрами.

11.2. Визуализируйте множество квадратных уравнений, а также подмножество таких уравнений, которые

1. имеют два различных вещественных корня;
   1.1. имеют два различных вещественных положительных корня;
   1.2. имеют два различных вещественных отрицательных корня;
   1.3. имеют два различных вещественных корня, один из которых положительный, а другой нулевой;
   1.4. имеют два различных вещественных корня, один из которых отрицательный, а другой нулевой;

1.5. имеют два различных вещественных корня разных знаков;

1.5.1. имеют два различных вещественных корня разных знаков, у которых модуль отрицательного корня больше, чем положительный корень;

1.5.2. имеют два различных вещественных корня разных знаков, у которых модуль отрицательного корня меньше, чем положительный корень;

1.5.3. имеют два различных вещественных корня разных знаков с одинаковыми модулями;

2. имеют один вещественный корень;

2.1. имеют один вещественный положительный корень;

2.2. имеют один вещественный отрицательный корень;

2.3. имеют один нулевой корень;

3. не имеют вещественных корней;

3.1. имеют два чисто мнимых корня;

3.2. имеют два комплексных корня с ненулевой вещественной частью;

3.2.1. имеют два комплексных корня с положительной вещественной частью;

3.2.2. имеют два комплексных корня с отрицательной вещественной частью.

По-видимому, задания 1, 2 и 3 без дальнейших подразделений следует предложить всем студентам, хотя, конечно, данная задача, состоящая из 18 вопросов, чересчур громоздка для того, чтобы каждый студент ответил на каждый из вопросов. Укажем на некоторые возможности ее использования в процессе преподавания. 1) Можно распределить задания среди отдельных студентов или микрогрупп студентов для самостоятельного решения и последующих сообщений для всей академической группы. 2) Можно раскрасить полученные области, линии и точки в разные цвета и определить, какое минимальное количество цветов потребуется для такой раскраски, чтобы два соседних объекта не были окрашены одним цветом. 3) Можно предложить задание на составление возможно большего количества вопросов, касающихся визуализации тех или иных подмножеств во множестве квадратных уравнений. 4) Можно предъявить все перечисленные вопросы «вперемешку» и предложить структурировать их в виде меню, как это сделано в тексте задания. Кстати, при составлении системы вопросов можно использовать не дихотомическое деление, как это сделано тексте, а другую идею. Например, задания 1.1–1.5.3 можно структурировать в зависимости от взаимного расположения начала координат и отрезка $[\alpha,\beta]$, *где* α *и* β *– корни. Достаточно «подвигать» отрезок* $[\alpha,\beta]$ *вдоль числовой прямой «слева направо». 5) Можно сформулировать обратную задачу: для данной области D на плоскости pOq выяснить, какими свойствами обладают корни квадратных уравнений вида* $x^2+px+q=0$, *где* $(p,q)\in D$. *Для учителя важно знать, что даже «простой»* *объект изучения – квадратные уравнения – допускает большое разнообразие вопросов и заданий.*

11.3. Визуализируйте множество кубических уравнений, а также подмножество таких уравнений, которые имеют 1) три различных вещественных корня; 2) два вещественных корня, один однократный, а другой двукратный; 3) один вещественный трехкратный корень; 4) один вещественный корень и два комплексно-сопряженных корня.

Здесь не обойтись без серьезной теории, так что заглянуть в раздел «Идеи, советы, намеки» просто необходимо.

Кстати, мы не просим визуализировать множество уравнений с тремя комплексными корнями. Почему? Потому что уравнение третьей степени (и любой нечетной степени) с вещественными коэффициентами обязательно имеет вещественный корень. Здесь уместно (но не обязательно) восстановить известное доказательство или его идею и обратить внимание на то, что этот алгебраический факт доказывается аналитическим методом.

Задачи 11.4–11.11 посвящены элементам «поведения» функций (монотонность, экстремум, выпуклость, перегиб) и некоторым важным теоремам дифференциального и интегрального исчисления.

Задачи 11.4–11.5 целесообразно рассматривать совместно, поскольку решение одной из них без обращения к другой мало что дает для изучаемого в них понятия монотонности функции и его визуализации. Смотрите также разделы «Идеи» и «Ответы».

11.4. Рассмотрите в совокупности следующую группу функций: $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = \lg x$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x^2$, где $x > 0$, $f_5(x) = 2^x$, $f_6(x) = \operatorname{tg} x$, где $x \in (\pi/2, \pi/2)$. Каждая из них является монотонно возрастающей. Выявите, чем отличаются друг от друга характеры возрастания этих функций.

11.5. Визуализируйте различными способами понятие монотонно убывающей функции.

Следующая задача 6.6 любопытна сама по себе, однако ее основное назначение состоит в том, чтобы служить инструментом для решения задачи 11.7.

11.6. Как следует изображать эскиз графика функции Дирихле, определенной равенством $d(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$?

Решение-соглашение. Если взять достаточно много рациональных точек на каком-либо отрезке и построить соответствующие точки графика, то *визуально* они сольются в прямую линию, параллельную оси абсцисс и проходящую через точку с координатами $(0,1)$. Аналогично, если на этом же отрезке взять достаточно много иррациональных точек, то соответствующие точки графика *визуально* сольются в прямую линию, совпадающую с осью абсцисс. Полученная картинка будет противоречить тому, что каждому значению аргумента должно соответствовать *одно* значение функции. В силу этого целесообразно принять следующее ***соглашение:*** изображать график функции Дирихле в виде двух прямых, но не сплошных, а состоящих из отдельных точек (см. рисунок). Это позволит считать, что при рациональном значении аргумента соответствующая точка графика лежит на верхней линии, а при иррациональном – на нижней. Такое изображение

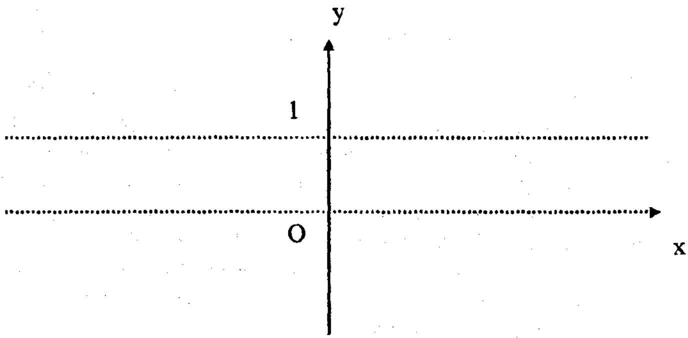


Рис. 6

будет полезно при построении графиков тех функций из следующей задачи, в определении которых участвует функция Дирихле.

11.7. Визуализируйте понятие локального экстремума функции, причем возможно большим количеством способов.

В ответе приведено <u>тринадцать</u> примеров функций, имеющих точку локального минимума, причем экстремальные точки отличаются друг от друга по тому или иному существенному признаку. Такое разнообразие примеров позволяет более полно выявить как содержание понятия экстремума, так и его объем.

11.8. Визуализируйте различными способами понятие функции, выпуклой вверх (вниз) на некотором отрезке.

11.9. Визуализируйте различными способами понятие точки перегиба.

Две последние задачи продолжают идейную линию, начатую в задачах 11.4, 11.5, 11.7: составить возможно более полный перечень различных проявления изучаемого понятия, в данном случае выпуклости и перегиба.

11.10. Визуализируйте основные теоремы дифференциального исчисления: 1) Ферма; 2) Ролля; 3) Лагранжа; 4) Коши.

11.11. Визуализируйте теорему о среднем в интегральном исчислении.

В задачах 11.12–11.14 мы вновь обращаемся к визуализации алгебраических понятий, причем достаточно абстрактных.

11.12. Визуализируйте декартовы произведения следующих числовых множеств: 1) $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$; 2) $[1,2)\times(3,5]$; 3) $(3,5]\times[1,2)$; 4) $\mathbf{R}\times\mathbf{Z}$; 5) $\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$;

6) $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$; 7) $\mathbf{R}\times S$, где $S=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$; 8) $S\times S$; 9) $\mathbf{R}\times\overline{S}$, где $\overline{S}=\{z\in\mathbf{C}:|z|\le 1\}$; 10) $S\times\overline{S}$.

11.13. Визуализируйте понятие 1) суммы (не прямой) подпространств; 2) прямой суммы подпространств.

11.14. Визуализируйте несколькими способами понятие линейного многообразия.

Две последние задачи показывают, что абстрактные алгебраические понятия могут быть истолкованы путем описания взаимного расположения в пространстве двух плоскостей, или прямой и плоскости, или двух прямых, то есть в терминах школьной программы.

В задачах 11.15–11.19 мы занимаемся визуализацией геометрических объектов. На первый взгляд, это может показаться излишним, поскольку суть геометрии – это работа с чертежами, фигурами, зрительными образами. Однако мы визуализируем группу преобразований (задача 11.15) и классы треугольников (задачи 11.16–11.18), то есть объекты хотя и вполне определенные, но не имеющие стандартных изображений.

11.15. Визуализируйте группу аффинных преобразований прямой, а также подмножество таких аффинных преобразований прямой, которые 1) сохраняют ориентацию прямой; 2) меняют ориентацию прямой; 3) являются движениями; 4) являются движениями первого рода; 5) являются движениями второго рода; 6) являются параллельными переносами; 7) имеют точно одну неподвижную точку; 8) имеют более одной неподвижной точки; 9) не имеют неподвижных точек.

По окончании решения становится очевидным, что задача 11.15 связывает школьный материал о линейных функциях и линейных уравнениях с вузовским материалом об аффинных преобразованиях прямой.

Полезно выяснить, какие из перечисленных множеств являются подгруппами. Полезно также описать отношения включения между перечисленными подмножествами с помощью диаграмм Эйлера. Вообще, полезно сформулировать возможно большее количество вопросов, касающихся подмножеств во множестве аффинных преобразований. Например, из скольких компонентов связности состоит множество преобразований из пункта 7?

Еще одним направлением работы с группой аффинных преобразований является обращение к теории представлений групп, а именно, представление ее в виде группы обратимых матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Мы опускаем этот аспект, поскольку он лежит вне методики обучения математике.*

11.16. Визуализируйте множество классов подобных треугольников.

11.17. Дано множество треугольников, у которых *наименьшая* сторона равна 1. Оно разбивается на классы конгруэнтных треугольников. Визуализируйте множество этих классов.

Интересно то, что задача 11.17 тесно связана с задачей 11.16, причем результаты решения двух задач, на первый взгляд, противоречат друг другу.

Действительно, в каждом классе подобных треугольников существует треугольник с наименьшей стороной 1, так что множество классов подобных треугольников находится во взаимно однозначном соответствии с точками полосы (см. раздел «Ответы»). Таким образом, одно и то же множество находится во взаимно-однозначном соответствии как со множеством точек треугольника (ограниченное множество), так и с множеством точек полосы (неограниченное множество). Для того, чтобы устранить это кажущееся противоречие, нужно доказать, что между треугольником и полосой можно установить взаимно-однозначное соответствие. Это отдельная интересная задача.

11.18. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 11.17.

В заключение нашей работы с геометрическим материалом приведем задачу на визуализацию, связанную с понятием эквидистантности.

Пусть F – геометрическая фигура на плоскости π. Точки A и B находятся в бинарном отношении ~, если они расположены на одинаковых расстояниях от фигуры F. При этом под расстоянием от точки A до фигуры F понимается число $\rho(A,F) := \inf\limits_{X\in F} AX$. Нетрудно доказать, что бинарное отношение ~ является отношением эквивалентности и что, следовательно, плоскость π разбивается на классы эквивалентности.

11.19. Визуализируйте классы эквивалентности (и тем самым фактор-множество $\pi/\sim$), если фигура F является 1) точкой; 2) прямой; 3) лучом; 4) отрезком; 5) треугольником.

Задача 11.19 показывает, что эквидистанта геометрической фигуры, вообще говоря, может сильно отличаться от самой фигуры. Психологически это обстоятельство тесно связано с важным фактом геометрии Лобачевского и сферической геометрии – эквидистанта прямой не является прямой.

Задания 11.20–11.25 представляют собой задачи на визуализацию из области комбинаторики. При этом первые две из них касаются визуализации различных правил и алгоритмов, а остальные касаются визуализации рекуррентных соотношений, которые связывают различные числа, возникающие в комбинаторике: число сочетаний, числа Стирлинга и Эйлера. Соответствующие определения и формулы будут приведены ниже.

11.20. Визуализируйте два комбинаторных правила: 1) правило суммы; 2) правило произведения. Предложите несколько способов визуализации.

11.21. Визуализируйте процесс перебора, с помощью которого вычисляется 1) число перестановок третьего порядка; 2) число перестановок четвертого порядка; 3) число сочетаний из трех элементов по два; 4) число сочетаний из четырех элементов по два; 5) число размещений из трех элементов по два; 6) число размещений из четырех элементов по два.

11.22. Визуализируйте рекуррентную формулу $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ для числа сочетаний, учитывая при этом «граничные условия» $C_0^0 = C_n^0 = C_n^n = 1$ для натурального n.

В монографической литературе для числа сочетаний обычно используется обозначение $\binom{n}{k} = C_n^k$, *так что наши формулы имеют вид* $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *и* $\binom{0}{0} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. *Такие обозначения являются общепринятыми и хорошо согласуются с обозначениями в задачах 11.23–11.25.*

Числа Стирлинга второго рода. Символом $\left\{ {n \atop k} \right\}$ обозначается число способов разбиения множества из n элементов на k непустых подмножеств. Так, существует семь способов разбиения четырехэлементного множества на две части: $\{1,2,3\} \cup \{4\}$, $\{1,2,4\} \cup \{3\}$, $\{1,3,4\} \cup \{2\}$, $\{2,3,4\} \cup \{1\}$, $\{1,2\} \cup \{3,4\}$, $\{1,3\} \cup \{2,4\}$, $\{1,4\} \cup \{2,3\}$, следовательно, $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

Для чисел Стирлинга второго рода справедливо рекуррентное соотношение $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k} \right\}$ и «граничные условия» $\left\{ {0 \atop 0} \right\} = \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ и $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ при натуральном n. Заметим, что рекуррентное соотношение без множителя k свелось бы к формуле сложения, в соответствии с которой образуется треугольник Паскаля.

11.23. Визуализируйте рекуррентную формулу для чисел Стирлинга второго рода.

Числа Стирлинга первого рода обозначаются символом $\left[{n \atop k} \right]$, удовлетворяют рекуррентным соотношениям $\left[{n-1 \atop k-1} \right] + (n-1) \left[{n-1 \atop k} \right] = \left[{n \atop k} \right]$ и «граничным условиям» $\left[{0 \atop 0} \right] = \left[{n \atop n} \right] = 1$, $\left[{n \atop 0} \right] = 0$ при натуральном n. Мы опускаем содержательный смысл чисел Стирлинга первого рода, отсылая читателя к главе 6 книги Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основания информатики. – М.: Мир, 1998. В ней содержится весьма подробный, интересный и эффектно изложенный материал о специальных числах как комбинаторной, так и некомбинаторной природы.

11.24. Визуализируйте рекуррентную формулу для чисел Стирлинга первого рода.

Числа Эйлера. Символом $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ обозначается число перестановок $\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$, имеющих k участков подъема, а именно, k мест, где $\pi_j < \pi_{j+1}$. Числа Эйлера удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$(n-k)\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle + (k+1)\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ и «граничным условиям» $\left\langle {0 \atop 0} \right\rangle = \left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$, $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$ при натуральном n.

11.25. Визуализируйте рекуррентную формулу для чисел Эйлера.

Отметим, что в упомянутой выше книге Р.Грэхема рассматривается другой, а именно индуктивный, подход к изучению чисел комбинаторной природы: сначала приводится числовой треугольник, а затем, исходя из его содержания, выводятся рекуррентная формула и «граничные условия».

Задачи 11.26–11.32 связаны с основными понятиями и фактами теории вероятностей. Заранее подскажем, что их визуализация может быть выполнена с помощью геометрического определения вероятности или с помощью графов, или обоими способами.

11.26. Визуализируйте понятие 1) полной группы событий; 2) противоположных событий; 3) равновероятных и неравноверятных событий.

11.27. Визуализируйте понятие 1) вероятности события; 2) условной вероятности события.

11.28. Визуализируйте понятие 1) совместных и несовместных событий; 2) независимых событий.

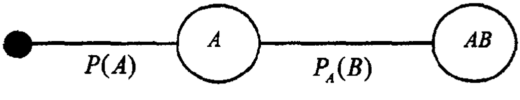
11.29. Визуализируйте доказательство 1) теоремы сложения вероятностей; 2) теоремы сложения вероятностей для несовместных событий; 3) теоремы умножения вероятностей.

11.30. Визуализируйте доказательство 1) теоремы о полной вероятности; 2) теоремы о вероятности гипотезы (Байес).

Для решения многих вероятностных задач полезны следующие мнемонические правила, выраженные с помощью так называемых вероятностных деревьев.

Пусть события А и В изображаются вершинами дерева. Припишем ориентированному ребру число, равное условной вероятности события В при условии, что выполняется событие А. Назовем это число весом ребра.

1) Теорема об умножении вероятностей может быть изображена с помощью графа так, как показано на рисунке 7, и интерпретирована следующим



$P(AB) = P(A)P_A(B)$

Рис. 7

образом: вероятность произведения событий равна весу входящей ветви, то есть произведению весов ребер, из которых состоит ветвь. Здесь черный кружок – это корень дерева.

2) Теорема о сложении вероятностей независимых событий AB и CD также может быть изображена с помощью графа на рисунке 8:

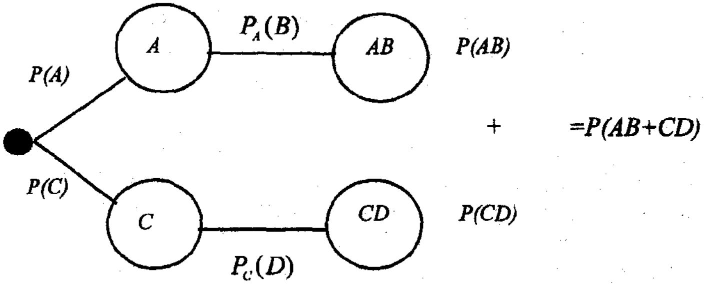


Рис. 8

11.31. Визуализируйте процесс решения следующей задачи по теории вероятностей (задача Гюйгенса): «В урне 2 белых и 4 черных шара. Один азартный человек держит пари с другим, что среди вынутых трех шаров будет ровно один белый. В каком отношении находятся шансы спорящих?».

11.32. Визуализируйте условие следующей задачи по теории вероятностей: «На заводе, изготовляющем болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт является дефектным? б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?».

Многочисленные задачи, решаемые с помощью вероятностных графов, рассмотрены в книге Афанасьев, В.В. Теория вероятностей в вопросах и задачах [Текст]: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004.

ИДЕИ, СОВЕТЫ, НАМЕКИ

1. Сравнение

1.1. Представьте оба числf в каком-либо сходном виде и найдите отличия.

1.2. 1) Выясните, замкнуты ли рассматриваемые множества относительно стандартных операций сложения, вычитания, умножения. 2) Всегда ли можно поделить число a на число b, если выбранные числа рациональны/иррациональны? 3) Пусть u – рациональное число. Определим отображение $A_u : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ с помощью равенства $A_u(x) = x + u$ (сдвиг по сложению). Замкнуты ли рассматриваемые множества относительно этих сдвигов? 4) Пусть u – рациональное число. Определим отображение $M_u : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ с помощью равенства $M_u(x) = xu$ (сдвиг по умножению). Замкнуты ли рассматриваемые множества относительно этих сдвигов?

1.3. Существуют стандартные свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, наличие нейтрального элемента, обратимость операции. Именно их и нужно проверить в первую очередь применительно к каждому из рассматриваемых случаев. **1.4.** См. указания к задаче 1.3.

1.5. В самых общих чертах можно сказать, что теория уравнений того или иного типа должна ответить на несколько вопросов: 1) каков критерий разрешимости уравнения? 2) каков критерий единственности решения уравнения? 3) как перечислить решения уравнения или описать множество его решений? В соответствии с этим целесообразно заполнить таблицу,

Теоремы	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{C}$
Критерий разрешимости уравнения			
Критерий единственности решения			
Формулы корней			

в клетках которой содержатся формулировки соответствующих теорем. После заполнения таблицы можно сравнивать теории, выявляя сходство и различие в формулировках терем.

1.6. См. указания к задаче 1.5.

1.7. Вспомните аксиоматическое описание системы вещественных чисел (математический анализ, 1 курс) и для каждой из систем выясните, какие из аксиом выполняются, а какие нет.

1.8. Целесообразно обсудить два аспекта: а) возможность или невозможность выполнить операцию над конкретными объектами; б) общие и отличительные свойства изучаемых операций. **1.9.** См. указания к задаче 1.8.

1.10. С представлением о согласованности операций и отношений мы сталкиваемся уже в аксиоматике вещественных чисел. Она включает группу аксиом, называемых аксиомами связи, которая и описывает такие согласования. Так, аксиома $a \le b \Rightarrow a + c \le b + c$ говорит о согласованности отношения порядка и сложения. Аксиома $\begin{cases} a \le b \\ 0 \le c \end{cases} \Rightarrow ac \le bc$ говорит о согласованности отношения порядка и умножения. Правая и левая дистрибутивность говорят о согласованности операций сложения и умножения. Интересно, выполняется ли правая/левая дистрибутивность композиции многочленов относительно их сложения? Если вы думаете, что ответ утвердителен, обоснуйте его. В противном случае приведите опровергающий пример.

1.11. Прежде всего, нужно выяснить, обладает ли лексикографический порядок стандартными свойствами отношения порядка: рефлексивностью, антисимметричностью, транзитивностью, линейностью. Если да, то нужно выяснить, согласован ли этот порядок с алгебраическими операциями на множестве комплексных чисел. Сущность перечисленных понятий можно вспомнить, просмотрев, например, аксиоматику системы вещественных чисел.

1.12. Выпишите в два столбца свойства теоретико-множественных операций и логических операций и постарайтесь установить соответствие между ними.

1.13. Каковы особенности области определения и графика четной/нечетной функции?

1.14. Сравнение можно проводить разными способами. Например, можно привлечь алгебраические операции над функциями: сложение, умножение, композицию, умножение на число. Другой способ состоит в том, чтобы поискать примеры «экзотических» функций, которые имеются в одном множестве и отсутствуют в другом.

1.15. Заполните следующую таблицу, поставив в клетках трех последних столбцов знаки плюс или минус в зависимости от наличия ли отсутствия требуемого свойства. Фактически, в трех последних столбцах указаны методы сравнения функций. Можно также провести попарное сопоставление столбцов.

Функция	График	Наличие излома графика в точке $O(0,0)$	Наличие касательной в точке $O(0,0)$	Наличие производной в точке $x=0$
$y=x^2$				
$y=\sqrt[3]{x^2}$				
$y=\|x\|$				

1.16. Во всех трех теоремах речь идет о сумме двух функций и о наличии/отсутствии у этой суммы некоего специального свойства: предела, непрерывности, дифференцируемости. Сформулируйте эти теоремы в условной форме «если…то…» и выявите их логическую структуру.

1.17. См. указания к задаче 1.16. **1.18.** См. указания к задаче 1.16.

1.19. Обсудите условия применимости этих правил, а также степень их универсальности.

1.20. Рассмотрите наборы операций над векторами в обоих пространствах.

1.22. В поисках сходства подумайте о симметрии.

1.23. Если считать, что обе фигуры представляют собой часть плоскости, то можно проводить сравнение топологических свойств: связности, линейной связности, эйлеровой характеристики и т.д. Можно обсудить эти фигуры с точки зрения их выпуклости. Если рассуждать в элементарно-геометрических терминах, то целесообразно сравнить свойства отрезка, соединяющего боковые стороны, критерии равенства боковых сторон и т.д.

1.24. Говоря о взаимном расположении фигур, нужно, прежде всего, обсудить количество их общих точек.

1.25. Обратите внимание на случай, когда окружность/гипербола имеют с прямой одну общую точку.

1.26. Невырожденные кривые второго порядка – это эллипс, гипербола и парабола. Вырожденные кривые второго порядка – это пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых, одна прямая (или, что то же самое, пара совпавших прямых) и точка.

1.27. 1) Пусть отрезок соединяет середины сторон AB и CX. Как он расположен по отношению к отрезку BC? Как выражается его длина через длины отрезков BC и AX? Как вычислить площадь четырехугольника $ABCX$? Попытайтесь понять, отличаются ли ответы на предыдущие вопросы в двух ситуациях: $X \neq D$ и $X = D$. 2) Пусть биссектриса угла CXA пересекает сторону BC или ее продолжение в точке Y. Каков вид треугольника XCY? Попытайтесь понять, отличается ли ответ на этот вопрос в двух ситуациях: $X \neq D$ и $X = D$.

2. Индукция и дедукция

2.1. Вы знаете многие свойства функций: четность/нечетность, периодичность, монотонность, непрерывность, дифференцируемость и т.д. Нет ли среди них общих свойств? Если не удается обнаружить общие свойства, поработайте методом исключения: первая функция не является периодической, а третья является, следовательно, периодичность не является общим свойством.

2.2. См. задачу 2.1. **2.3.** См. задачу 2.1.

2.4. Каков тип умозаключения в процессе *формулировки* гипотезы? Каков тип умозаключения в процессе проверки гипотезы и *доказательства* ее истинности?

2.8. Вычислите несколько первых членов последовательности x_n.

2.9. Начните с простых разрезаний на 4, 9 и 16 квадратиков, а потом сконструируйте из них то, что требуется.

2.10. Разберите случаи одного, двух, трех и четырех колец и попытайтесь понять, как связаны между собой количества перекладываний в различных «соседних» случаях.

2.16. Обратитесь к учебникам младших классов. **2.17.** Просмотрите серию учебников 4-7 классов.

2.21. По поводу схемы доказательства первой теоремы см. задачу 2.18. Вторая теорема доказывается так: рассматриваются случаи $f'(a) > 0$, $f'(a) < 0$, $f'(a) = 0$ и доказывается, что первые два невозможны.

2.22. Воспользуйтесь таблицей истинности. **2.24.** Воспользуйтесь таблицей истинности. **2.26.** Воспользуйтесь таблицей истинности.

3.3. Приведение доказательств к логической схеме (3) означает, что мы докажем *критерий* «параллелограммности» четырехугольника. Являются ли критериями те теоремы, которые используются в ходе приведенных доказательств: признаки равенства треугольников, признаки параллельности прямых?

4. Конкретизация, обобщение и абстрагирование

Конкретизация

4.1. Пусть функция h выбирается таким образом, что левая часть равенства (А) превращается в левую часть требуемого равенства. Приравняйте их и подберите h. **4.2.** Используйте ту же идею, что и в задаче 4.1. **4.3.** Сравните формулы Коши и Лагранжа, особенно те части равенств, которые содержат производные. **4.4.** Сравните условия двух теорем. **4.5.** Вспомните геометрический смысл параметра a. **4.6.** Очевидно, что от параметра q ничего не зависит. Промежуток монотонности указывает на знак a. Где находится абсцисса вершины параболы по отношению к числу 3? **4.7.** Очевидно, что от параметра c ничего не зависит. Промежуток монотонности указывает на знак a. Выделите полный квадрат. **4.8.** Точку перегиба легко найти, приравняв к нулю вторую производную. Угловой коэффициент прямой, через которую перегибается график функции, равен значению первой производной в точке перегиба. **4.9.** Длина полупериода искомой функции должна быть не меньше, чем длина отрезка [-50, 50]. **4.10.** Область определения функции состоит из интервалов, один из которых содержит начало координат. Достаточно, чтобы он содержал указанные числа. **4.12.** Арктангенс имеет единственную точку перегиба – точку 0. Далее см. раздел «Идеи…», задача 4.8. **4.15.** Покажите, что расстояние от начала координат до точки на спирали равно e^{at}, а угол между положительным направлением оси Ox и радиус-вектором точки равен bt. Вырождение спирали в окружность означает, что не меняется расстояние; вырождение спирали в луч означает, что не меняется угол. Угловой коэффициент в точке $P(1,0)$ найдите с помощью формулы о производной функции, заданной параметрически. Движение по винтовой линии является одновременно движением по окружности – направляющей цилиндрической поверхности – и по прямой – ее образующей. При каких особенностях движения происходит то или иное вырождение? **4.17.** Ограничение на число витков означает, что $t \in [0,2\pi]$. **4.19.** В формуле бинома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ нужно специальным образом подобрать числа a и b. Как? Для этого сравните выражения $(a+b)^n$ и 2^n. При каких a и b они совпадают? Можно рассуждать по-другому: мы получим сумму биномиальных коэффициентов, если в каждом слагаемом выражение $a^{n-k}b^k$ равно единице. При каких a и b это бывает? **4.22.** Запишите числа z и u в тригонометрической форме, найдите произведение zu и постройте векторы u и zu. **4.23.** Можно воспользоваться формулой корней из комплексного числа. Можно воспользоваться тем, что корни из единицы являются вершинами правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность, причем одной из вершин обязательно является вещественное число 1. Далее можно подобрать нужное значение k или попытаться вписать в исходный многоугольник другой многоугольник с меньшим числом сторон, или воспользоваться другими соображениями. **4.25.** Простой случай состоит в том, что исследуемые числа могут оказаться вещественными. Более сложна ситуация, когда мнимые части исследуемых чисел отличны от нуля. **4.26.** Вспомните, к какому виду приводятся матрицы при вычислении ранга. **4.27.** Задача теснейшим образом связана с предыдущей задачей. Вспомните, как связаны ранг и число свободных неизвестных при приведении системы к ступенчатому виду. **4.28.** Вспомните критерий совместности. **4.30.** Вспомните свойства определителя. **4.31.** Из задания видно, что речь идет о понижении порядка определителя. В каких случаях это возможно? **4.32.** Что означает взаимная простота числа a и простого числа p? Чему равно $\varphi(p)$? **4.33.** Вспомните соответствующие факты из курса геометрии. **4.34.** Аффинное преобразование прямой представляет собой непостоянную линейную функцию $x' = ax + p$. **4.35.** Используйте идею предыдущей задачи. **4.37.** Каков знак косинуса при остром/прямом/тупом угле C? Что произойдет со знаком равенства, если отбросить слагаемое $-2ab\cos C$? **4.40.** Дуга, на которую опирается вписанный угол, превратится в результате вращения в дугу между хордой и касательной. **4.41.** 1) Если вращается прямая PA, то в предельном положении окажется, что $A = B$. 2) Попытайтесь вращать вторую секущую. **4.45.** Перейдите к пределу в уравнении окружности. **4.46.** Перейдите к пределу в уравнении гиперболы. **4.47.** Перепишите уравнение эллипса в равносильной форме $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ и перейдите в нем к пределу при $b \to 0$. Чему равно y? Продолжите рассуждения дальше. **4.48.** Используйте идею предыдущей задачи.

Обобщение

4.49. Сколько слагаемых участвует в равенстве (А)? Каков порядок производной в равенстве (А)? **4.51.** В первой формуле нужно ввести более подробные обозначения, которые сделают ее похожей на формулу Тейлора. **4.52.** В первой формуле нужно ввести новые обозначения, которые сделают ее похожей на формулу Тейлора. **4.53.** Обратите внимание на то, что в первой теореме ничего не сказано об ограниченности функции. На самом деле она ограничена в силу первой теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях, ограниченных на замкнутом отрезке. **4.54.** Сколько слагаемых участвует в левой части формулы $(a+b)^2 = \cdots$? Каков показатель степени бинома? **4.55.** Если деление нацело возможно, то делимое равно делителю, умноженному на частное. **4.56.** Воспользуйтесь соображениями предыдущей задачи. **4.58.** Почему комплексное число нужно возводить именно во вторую степень? Нельзя ли испытать другие показатели степеней? **4.59.** Обобщение состоит в ответе на следующий вопрос: если для группы $\sqrt[n]{1}$ фиксировать показатель корня, то при каком значении k группа $\sqrt[k]{1}$ будет подгруппой группы $\sqrt[n]{1}$? Для каждого из случаев 1)–3) условия выпишите значение n и соответствующие ему значения k. Как эти числа связаны между собой? **4.60.** Многочлен может иметь нулевую степень или быть равным нулю. **4.62.** Существуют функции-константы, заданные равенством вида $f(x)=c=const$. **4.63.** Известно, что такое матрица четвертого, третьего, второго порядка. А что такое матрица первого порядка? **4.64.** Вспомните содержание курсов алгебры, числовых систем, истории математики. **4.65.** Если мы говорим о *хордах* AB и CD, то они обязаны пересекаться внутри круга. Если же говорить о *прямых* AB и CD, то они могут пересекаться как внутри, так и вне круга. Останется ли верным наше равенство? **4.66.** Если мы выбираем точку P на *хорде* MN, то эта точка лежит внутри пересечения двух кругов. Если же выбрать точку P на *прямой* MN, то она может оказаться снаружи. Останется ли верным наше равенство? **4.67.** Замените слово «отрезок» в формулировке утверждения чем-либо более общим. **4.71.** Вспомните содержание других разделов математического анализа, а также курса дифференциальной геометрии.

Абстрагирование

4.72. Складываемые числа выбираются из *множества* чисел. Функции, образующие композицию, выбираются из *множества* функций. Векторы, которые складываются или перемножаются, выбираются из *множества* векторов. **4.73.** Во всех четырех случаях рассматривается «операция на множестве», то есть пара (Множество, Операция). **4.74.** Быть может, полезно записать свойства 1)-3) для какой-нибудь другой ситуации, например, для параллельности прямых: 1) $a\parallel a$ – рефлексивность; 2) $a\parallel b\Rightarrow b\parallel a$ – симметричность; 3) $\begin{cases}a\parallel b\\ b\parallel c\end{cases}\Rightarrow a\parallel c$ – транзитивность. **4.75.** Попробуйте использовать школьный метод доказательства и вывести формулу квадрата суммы для различных алгебр: поля рациональных/комплексных чисел, кольца целых чисел и/или кольца многочленов, кольца матриц. В некоторых случаях это удастся, а в некоторых – нет. Сделайте выводы. **4.76.** Во всех четырех случаях выразите в точных терминах понятие средней величины, то есть средней скорости движения тела, средней силы тока и т.д. **4.77.** В каждом из случаев ответьте на следующие вопросы: а) что является неизвестным в этом уравнении – число, вектор, функция, матрица и т.п.? б) какие величины входят в это уравнение?

5. Аналогия

5.1. Ответьте на несколько вопросов об изучаемых фигурах. 1) Можно ли выделить ограниченную фигуру на прямой с помощью одной точки? А с помощью двух? 2) Можно ли выделить ограниченную фигуру на плоскости с помощью двух прямых? А с помощью трех? 3) Можно ли выделить ограниченную фигуру в пространстве с помощью трех плоскостей? А с помощью четырех?

5.2. 1) Переместите точку вдоль прямой на конечное расстояние. Какую геометрическую фигуру она опишет? 2) Переместите отрезок параллельно самому себе вдоль прямой, не параллельной отрезку. Какую геометрическую фигуру он опишет? 3) Переместите параллелограмм параллельно самому себе вдоль прямой, не лежащей в плоскости параллелограмма. Какую геометрическую фигуру он опишет?

5.3. Рассмотрите отрезок и многоугольник в плоскости. Переместите их вдоль прямой, не лежащей в плоскости. Какую фигуру опишет каждая из исходных фигур?

5.4. Рассмотрите в плоскости отрезок и многоугольник. 1) Выберите точку вне прямой, содержащей отрезок, и соедините ее с концами отрезка. Какую фигуру вы получите? 2) Выберите точку вне плоскости многоугольника и соедините ее с вершинами многоугольника. Какую геометрическую фигуру вы получите?

5.5. Поместите в вершины графа геометрические фигуры, соедините их ребрами при наличии аналогии и пометьте ребра номерами соответствующих задач.

5.7. Решение можно найти в книге: Пойа Д. «Как решать задачу.» – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959.

5.10. Когда мы говорим о треугольнике, то утверждение можно переформулировать так: центр тяжести треугольника находится на отрезке, соединяющем вершину с центром тяжести противоположной стороны, и делит его в отношении 2:1, считая от вершины. В случае с пирамидой можно использовать векторные выражения для нужных точек. Возможно также решение, не использующее векторы.

5.12. Вспомните *метод*, которым доказывается теорема об описанной окружности, и примените его для пространственных фигур.

5.18. Параллелограмм имеет две диагонали, а параллелепипед – четыре. *Все* диагонали параллелограмма равны тогда и только тогда, когда он является прямоугольником. Что вы думаете о параллелепипеде, у которого *все* диагонали равны между собой?

5.21. Какое пространственное тело можно считать аналогом равнобедренного треугольника? Найдите такие аналоги и среди многогранников, и среди тел вращения.

5.22. 2) Площадь круга находится по формуле $S = \pi r^2 = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r \cdot r$. Преобразуйте похожим образом формулу для объема шара.

5.26. Выпишите парами изучаемые формулы. Напоминаем, что площадь боковой поверхности конуса находится по формуле $S = \pi r l$, где r и l – радиус и образующая конуса. Площадь боковой поверхности усеченного конуса находится по формуле $S = \pi(r_1 + r_2)l$, где r_i – радиусы оснований конуса, а l – его образующая. Интеграл, выражающий площадь криволинейной трапеции, преобразуйте с помощью теоремы о среднем в интегральном исчислении: $S = \int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$, где $c \in (a,b)$.

5.27. Попытайтесь применить к треугольной пирамиде *метод* доказательства планиметрической теоремы. Не забудьте, что существует сфера, вписанная в треугольную пирамиду.

5.28. Рассмотрите случаи малых размерностей 2 и 3 и подберите полуребро кубической окрестности в зависимости от радиуса. Для произвольной размерности сформулируйте аналогичное утверждение.

5.29. Рассмотрите вычислительные формулы для нахождения скалярного произведения в ортонормированном базисе на плоскости и в пространстве. Искомое *определение* в $\boldsymbol{R}^n$ аналогично *вычислительным формулам* в $\boldsymbol{R}^2$ и в $\boldsymbol{R}^3$.

5.30. Напомним две *теоремы*: 1) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, равна абсолютной величине определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$; 2) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$, равен абсолютной величине определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Здесь a_{ij} – координаты вектора в ортонормированном базисе.

5.31. Рассуждая на школьном алгебраическом языке, можно искать общие свойства обеих операций среди стандартного списка: коммутативность, ассоциативность и т.д. Рассуждая на абстрактном алгебраическом языке, можно заметить, что оба множества образуют группу, а взаимосвязи между группами изучаются с помощью гомоморфизмов и изоморфизмов. Наконец, рассуждая на языке анализа, можно вспомнить семейство элементарных функций, у которых множество вещественных чисел является областью определения, а множество положительных вещественных чисел – множеством значений.

5.32. Вспомните тот раздел теории рядов, который связан с перестановкой и группировкой членов ряда, в частности, с теоремой Римана.

5.33. И множество вещественных чисел, и множество S не образует группу по умножению, поскольку 0 не имеет обратного элемента. Тем не менее, оба множества являются коммутативными полугруппами, поскольку в обоих случаях умножение ассоциативно и имеет нейтральный элемент 1. Собственно говоря, сказанное является описанием аналогии, однако оно достаточно примитивно. Для полного описания аналогии рассмотрите правило знаков при умножении чисел.

5.34. Понятно, что нужно отметить точки *O, P, A, B,* заменив тригонометрические функции на гиперболические. В процессе доказательства четвертого соотношения придется использовать определенный интеграл.

5.35. Поэкспериментируйте с правыми частями известных формул, пользуясь определениями тригонометрических функций. Например, если вы вычислите выражение $\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y+\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$, то получите, что оно равно $\operatorname{ch}(x+y)$. Таким образом, будет видна и аналогия с известной формулой тригонометрии, и отличие от нее.

6.6. Число называется *алгебраическим*, если оно является корнем многочлена с целыми коэффициентами. В противном случае оно называется *трансцендентным*.

6.11. В контексте данного задания обсудите равенства $2 = 1,(9) = 6/3$.

6.17. Многоугольник называется звездчатым, если внутри него есть такая точка, что она может быть соединена с любой другой точкой многоугольника с помощью отрезка, целиком лежащего внутри многоугольника.

6.36. Вспомните все необходимые определения.

6.38. В каждом случае нарисуйте диаграмму Эйлера, иллюстрирующую объемы понятий.

6.39. Точка $a \in \boldsymbol{R}$ называется *граничной* точкой множества M, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству M, так и точки, не принадлежащие ему. Точка $a \in M$ называется *внутренней* точкой множества M, если существует окрестность этой точки, целиком содержащаяся во множестве M. Точка $a \notin M$ называется *внешней* по отношению к M, если существует такая окрестность этой точки, которая не имеет общих точек с M.

6.40. Точка $p \in \boldsymbol{R}$ называется *предельной* точкой множества M, если любая ее окрестность содержит точку из множества M, отличную от точки p. Далее можно либо проанализировать структуру определений, либо рассмотреть простой модельный пример. Пусть a, b, c – три вещественных числа, расположенных в порядке их возрастания. Пусть $M = (a,b] \cup \{c\}$. Найдите внутренние, внешние, граничные и предельные точки.

6.41. Рассмотрите три подмножества: 1) $B = (a,b)$; 2) $B = [a,b]$; 3) $B = (a,b]$.

6.42. Для того чтобы решить вопрос о том, является ли данная типология классификацией, нужно понять, существуют ли подмножества, которые являются одновременно и открытыми, и замкнутыми в A. Для примера рассмотрите подмножество $B = (0,+\infty)$.

6.44. Естественно поступить одним из способов: 1) изменить, то есть сузить или расширить, множество классифицируемых объектов; 2) удалить некоторые типы объектов из приведенной типологии или добавить недостающие типы.

6.45. Можно использовать несколько оснований классификации или же различные их сочетания. 1) Конечность группы; коммутативность операции; оба основания классификации. 2) Коммутативность операции умножения; ассоциативность операции умножения; конечность кольца; несколько предыдущих оснований классификации. 3) Конечность поля; алгебраическая замкнутость поля. 4) Размерность векторного пространства. 5) Размерность подпространства. 6) Ранг матрицы. 7) Размерность линейного многообразия решений. 8) Понятие правой или левой пары (тройки) векторов. 9) Вырожденность кривой. 10) «Разность» между левым и правым пределом функции. 11) Непрерывность функции; интегрируемость функции. 12) Квадрируемость фигуры.

7. Необходимое следствие, достаточное условие и критерий

7.1. Трудно дать совет. Попробуйте обсудить свойства каких-либо «индивидуальных» математических объектов.

7.4. Вспомните терминологию и найдите среди высказываний (1)–(4) предыдущей задачи пары взаимно обратных высказываний, пары взаимно противоположных высказываний, пары контрапозитивных высказываний. Воспользуйтесь таблицами истинности.

7.8. Трудно дать совет. Постарайтесь извлечь «неполные» следствия из параллельности прямых. Возможно, что они не будут достаточны для параллельности.

7.10. Трудно дать совет. Постарайтесь извлечь «неполное» следствие из того факта, что четырехугольник является параллелограммом. Возможно, что оно не будет признаком параллелограмма (достаточным условием).

8. Методика работы с понятием

8.1. Сравнить две величины – это значит указать, которая из них больше, или указать на их равенство.

8.2. Воспользуйтесь заданием 8.1.

8.5. Заполните нижеследующую таблицу. Жирным шрифтом указаны делители, которые «неизбежно» присутствуют, а обычным шрифтом – «дополнительные» делители.

Число	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Делители					**1, 6,** 2, 3	**1, 7**					

8.7. При замене неизвестного конкретным числом получается либо верное равенство, либо неверное равенство. Это дает основание подразделить числа на два типа, отнеся к первому типу числа 0, 1 и 2, а ко второму типу – все остальные.

8.12. Примените решето Эратосфена.

8.13. Предположите, что число рационально, и извлеките следствия из этого предположения.

8.15. Рассмотрите систему из *тех же* уравнений, которые образуют совокупность уравнений в предыдущей задаче. Ответьте на *те же* вопросы и сравните ответы.

8.17. Известно, что такое расстояние от точки до прямой. Известно также, что перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, короче любой наклонной. *Переформулируйте* определение расстояния от точки до прямой, не используя при этом понятия перпендикуляра. Новая формулировка поможет ответить на вопрос задания.

8.19. В условии задачи ничего не сказано о парах соответствующих сторон. Попробуйте образовать разные пары.

8.20. Обратите внимание на то, что сумма является нечетным числом, следовательно, одно из простых слагаемых четно. Данное число сконструировано из чисел Ферма, описанных в задаче 2.12.

8.21. Представьте изучаемое число в виде k/n.

8.25. Попытайтесь найти ответ на этот вопрос в контексте теории бинарных отношений.

8.26. Поэкспериментируйте с видом числа $a+b\sqrt{2}$. Заметьте, что $7=9-2=3^2-2$.

8.27. Равенство, задающее число, преобразуйте так, чтобы избавиться от радикалов.

9. Методика работы с теоремой

9.1. При измерении транспортиром, которое выполняют *дети*, часто возникают ошибки в 1°-2°. Быть может, целесообразно учитывать это и позволять учащимся *подгонять* результат под «красивую» гипотезу.

9.3. Для того чтобы результаты измерений были статистически достоверны, необходимо произвести много однотипных измерений. Какие инструменты есть для этого у школьников?

9.9. Очевидно, что если тело движется вперед, то его скорость положительна, а если назад, то отрицательна. У покоящегося тела скорость равна нулю. Допустим, что в момент наибольшего удаления скорость тела больше нуля. Тогда тело, двигаясь по инерции, удалится от начала движения на расстояние, *превосходящее* расстояние *максимального* удаления, что приводит нас к логическому противоречию. Продолжите рассуждения, предположив, что скорость тела в момент наибольшего удаления отрицательна.

9.11. Заполните следующую таблицу:

Формулировка теоремы	Условная формулировка	Структура теоремы		
		Разъяснительная часть	***Условие***	***Заключение***
	Если ..., то...	Теорема рассматривается на множестве ...	1)...2)...	1)...2)...

9.12. Подберите контрпримеры, то есть такие функции, для которых выполняются *только два* из трех условий теоремы и не выполняется заключение.

9.13. Подберите контрпримеры, то есть такие функции, для которых выполняется *только одно* из двух условий теоремы и не выполняется заключение.

9.14. Поэкспериментируйте с функциями, заданными графически.

9.16. Предположите, что квадратичная функция периодична.

9.17. Рассматриваются случаи, когда центр окружности лежит на стороне вписанного угла, внутри него и вне его.

9.19. Напомним теорему о промежуточном значении функции: если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a)<f(b)$, то она принимает *любое* промежуточное значение $c\in[f(a), f(b)]$.

9.20. Сначала делаются некие дополнительные построения, без которых дальнейшие рассуждения просто невозможны.

9.24. Приведем предельно краткие схемы доказательств некоторых теорем. Советуем посмотреть полные доказательства в литературе. 6) Общий член ряда выражается через его частичные суммы так: $a_n = S_n - S_{n-1}$. Далее нужно перейти к пределу в этом равенстве. 7) Поскольку функция непрерывна, она достигает на отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если эти значения различны, то хотя бы одно из них достигается внутри отрезка, то есть в этой точке имеется локальный экстремум. 8) Для изучения функции f рассматривают вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, доказывают, что она удовлетворяет условиям теоремы Ролля и затем применяют к ней теорему Ролля.

9.25. Смотрите материал к предыдущей задаче в разделах «Идеи...» и «Ответы…».

9.30. Представьте себе, что число $\log_a x$ вам известно, а число $\log_b x$ – нет.

9.32. Формула Лагранжа, примененная а отрезку $[a,x]$, выглядит так: $f(x) - f(a) = f'(c)(x-a)$.

9.33. Формула Лагранжа, примененная к отрезку $[x_1, x_2]$, выглядит так: $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Сравните теперь правую часть этого равенства с нулем.

9.36. Смотри раздел «Аналогия», задание 5.35.

9.37. Любопытно то, что на вопрос задания можно ответить даже в том случае, если вы не помните содержания указанных теорем, поскольку необходимая информация содержится в самой формулировке задания. Нужно только решить, какую теорему следует считать важной. Рекомендуем нарисовать схему взаимозависимости теорем в одной из форм: блок-схема, меню, майнд-мэп и т.п.

9.38. Как и в предыдущем случае, на вопрос задания можно ответить даже тогда, когда вы не помните содержания указанных теорем, поскольку необходимая информация содержится в самой формулировке задания. Нужно только решить, какую теорему следует считать важной. Рекомендуем нарисовать схему взаимозависимости теорем в одной из форм: блок-схема, меню, майнд-мэп и т.п.

10. Задача и ее окрестность

10.2. Воспользуйтесь теоремой Безу и ее следствиями.

10.3. 1) Воспользуйтесь методом математической индукции и рекуррентным соотношением $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$. 2) Просто примените формулу Лейбница. 3) Свойства биномиальных коэффициентов можно вывести из формулы бинома Ньютона путем подстановки «удобных» для рассуждения *чисел*. В нашем случае естественно попытаться подобрать «удобные» *функции*. Вопрос только в том, что означает слово «удобные» в двух разных случаях.

10.5. Докажите каждое из этих неравенств методом тождественных преобразований.

10.6. 1) Любое число u можно представить как разность двух положительных чисел. Если вы воспользуетесь этим советом, то получите некое промежуточное неравенство, которое мы обозначим как ПН: $u^2 \geq 0 \Rightarrow ПН$. 2) После этого целесообразно выполнить такую последовательность действий: а) вывести из ПН неравенство (1); б) вывести из ПН неравенство (2); в) вывести из неравенства (1) неравенство (3); г) вывести из ПН неравенство (4).

10.7. Из двух чисел одно не превосходит другого. Для определенности будем считать, что $a \leq b$. Для оценки выражений выполните *нетождественное преобразование*, заменив меньшее (большее) число на большее (меньшее) и сравнив исходное и полученное выражения.

10.8. Проанализируйте схему доказательства неравенств (1)-(6).

10.9. Выразите эти отрезки через длины оснований трапеции.

10.10. Подставьте найденные длины в неравенство (7).

10.12. Очевидно, что во всех задачах речь идет об уравнении касательной к графику функции: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Составьте таблицу, в строках которой указаны номера задач, а в столбцах указаны элементы уравнения касательной. В клетках таблицы поставьте знак «+», если соответствующий элемент известен из условия, и вопросительный знак в противном случае. Какая закономерность наблюдается при переходе от строки к строке?

10.13. Это типичная ситуация, когда можно использовать «дрейф неизвестного». Действительно, в изучаемой формуле присутствуют *шесть* структурных элементов: три основания степени и три показателя степени.

10.14. 1) Первая оценка получается стандартным образом, и ее нахождение содержится в большинстве курсов математического анализа. Сгруппируем все слагаемые, кроме первого. Каждый факториал оценим снизу, заменив его множители наименьшим из них, а именно множителем 2. Получим, что $n! = 2 \cdot 3 \cdots n > 2^{n-1}$, откуда $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$. Теперь исходное выражение можно оценить так: $S_n = 1 + \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$. В скобках стоит сумма *конечного* числа членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $1/2$. Заменив ее суммой *бесконечной* прогрессии и найдя ее, получим, что $S_n < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3$.

Итак, $S_n < 3$. Решение второй задачи основано на той же идее, с той разницей, что отделить от большой суммы нужно *не один* множитель.

11. Визуализация

11.2. Рассмотрите приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, а затем используйте дискриминант и теорему Виета.

11.3. Кубическое уравнение всегда можно поделить на старший коэффициент и привести к виду $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Затем можно сделать замену

$x = y - \frac{a}{3}$, благодаря которой исходное уравнение примет вид $y^3 + py + q = 0$ и будет характеризоваться парой чисел (p,q). Например, уравнение $2x^3 + 6x^2 + 4x + 8 = 0$ преобразуется сначала к виду $x^3 + 3x^2 + 2x + 4 = 0$, а затем к виду $y^3 - y + 4 = 0$, который дает пару чисел $(-1,4)$. Далее нужно исследовать дискриминант $D := (p/3)^3 + (q/2)^2$. Смотрите раздел «Ответы и решения».

11.4. Постройте графики этих функций.

11.5. Попросту говоря, нужно привести несколько примеров убывающих функций, у которых скорости убывания различны. Простейшая, «издевательская» идея состоит в том, чтобы умножить на –1 каждую из функций задачи 6.4. Откажитесь от нее и приведете другие примеры нужных типов из числа простейших элементарных функций. Например, убывающая и ограниченная снизу функция – это обратная пропорциональность: $f(x) = \frac{1}{x}$, где $x > 0$.

11.7. Постройте несколько функций, имеющих локальный экстремум (для определенности, минимум) в некоторой точке, причем так, чтобы эти экстремумы отличались друг от друга по какому-либо *существенному признаку*. Например, если в качестве такого признака вы выберете *монотонность*, то нужно будет привести примеры функций, обладающих различными сочетаниями типов монотонности по разные стороны экстремальной точки. Если в качестве такого признака вы выберете *непрерывность*, то нужно будет привести примеры функций непрерывных, разрывных, односторонне непрерывных и проч. в точке локального экстремума. Наконец, если в качестве такого признака вы выберете *дифференцируемость*, то нужно будет привести примеры функций, дифференцируемых и не дифференцируемых в точке экстремума. Разумеется, возможны как другие признаки, так и различные сочетания выбранных признаков.

11.8. Функция, выпуклая вверх на каком-либо отрезке, может возрастать на этом отрезке, убывать на нем или иметь экстремум на нем. То же самое относится и к функции, выпуклой вниз. Таким образом, нужно нарисовать ***шесть*** «картинок». Для *каждой* из «картинок» целесообразно решить задачу, являющуюся естественным продолжением данной: для *всех* функций, изучаемых в школе, указать те участки графика, на которых он имеет такой же тип выпуклости и монотонности, как на изображенной «картинке».

11.9. График функции может «перегибаться»: 1) через горизонтальную прямую; 2) вертикальную прямую; 3) наклонную прямую с положительным угловым коэффициентом; 4) наклонную прямую с отрицательным угловым коэффициентом. При этом в каждом из случаев направление выпуклости может меняться двумя способами: выпуклость вверх переходит в выпуклость вниз или выпуклость вниз переходит в выпуклость вверх. Таким образом, нужно нарисовать ***восемь*** «картинок». Для *каждой* из «картинок» целесообразно решить задачу, являющуюся естественным продолжением данной: для *всех* функций, изучаемых в школе, указать те точки, в которых имеет место перегиб такого же типа, как на изображенной картинке.

11.11. Левая и правая части равенства $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ имеют геометрический смысл. Осталось нарисовать соответствующие фигуры на координатной плоскости xOy.

11.12. Декартово произведение $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ состоит из всевозможных пар вещественных чисел, каждая из которых изображается в виде точки на координатной плоскости xOy. В силу этого изображения множеств из заданий 2-6 представляют собой фигуры на координатной плоскости. При решении заданий 7-10 следует учесть, что множество S является окружностью, а множество $\overline{S}$ – кругом, так что для построения геометрического образа декартова произведения следует рассматривать фигуры в трехмерном пространстве.

11.13. 1) Рассмотрите трехмерное пространство L, которое равно непрямой сумме двумерных подпространств U и V. Полезно изобразить базис (e_1, e_2, e_3), согласованный с равенством $L = U + V$, то есть такой, что $e_1 \in U \cap V$, (e_1, e_2) – базис подпространства U и (e_1, e_3) – базис подпространства V. 2) В трехмерном пространстве L рассмотрите одномерное подпространство U и двумерное подпространство V. Изобразите базис, согласованный с равенством $L = U \oplus V$.

11.14. В трехмерном пространстве L рассмотрите линейное многообразие $M = a + V$, где a – вектор сдвига и V – подпространство размерности 1 или 2.

11.15. Каждое аффинное преобразование прямой представляет собой непостоянную линейную функцию, то есть функцию вида $f(x) = ax + b$, где $a \neq 0$. Следовательно, ее можно изобразить в виде точки на координатной плоскости aOb, а всю группу аффинных преобразований прямой – в виде плоскости с удаленной из нее осью Ob. Очевидно, что подмножествам аффинной группы будут соответствовать фигуры на координатной плоскости.

11.16. Два треугольника подобны тогда и только тогда, когда имеют соответственно равные углы. Пусть α, β и γ – углы треугольника. Первое, что нужно сделать, это построить тройку (α, β, γ), являющуюся «типичным представителем» класса подобных треугольников. Далее нужно записать естественные ограничения на углы треугольника (см. раздел «Ответы»).

11.17. Класс конгруэнтных треугольников из рассматриваемого множества характеризуется длинами двух его сторон, поскольку его наименьшая сторона равна 1. Следовательно, он задается парой чисел (x, y), удовлетворяющих неравенствам $1 \le x \le y$ (см. раздел «Ответы»).

11.18. В качестве исходного множества рассмотрите такое множество треугольников, у которого равна 1 не наименьшая сторона, а: 1) наибольшая; 2) средняя по длине. Далее воспользуйтесь рассуждениями из задачи 6.17.

11.19. Хорошо известно, что является расстоянием между точкой и прямой. Пользуясь приведенным определением, постарайтесь понять, как вычисляется расстояние от точки до луча (от точки до отрезка.) Очевидно, что важную роль играет взаимное расположение точки и луча (точки и отрезка).

11.20. Первый способ визуализации использует прямую для правила суммы и координатную плоскость для правила произведения. Второй способ использует графы.

11.21. 1–2) Ответьте последовательно на такие вопросы: а) сколькими способами можно выбрать первый элемент перестановки? б) если первый элемент уже выбран, то сколькими способами можно выбрать второй элемент? в) если два элемента уже выбраны, то сколькими способами можно выбрать третий элемент? И так далее. Ответы на эти вопросы подсказывают структуру графа, который описывает процесс перебора. 3–4) Сочетания по два образуются стандартным способом: выбирают первый элемент и ставят его «в пару» со всеми последующими элементами, затем берут второй элемент и ставят его «в пару» со всеми последующими и т.д. 5–6) Сначала выбирают подмножество (сочетание) из двух элементов, а потом упорядочивают его.

11.22. Нарисуйте таблицу, строки которой занумерованы параметром n, а столбцы – параметром k:

k / N	0	1	2	...
0				
1				
2				
...				

В клетке таблицы запишите соответствующее число сочетаний.

11.23. Используйте идею решения и процесс решения задачи 11.22.

11.26. В этой задаче и во всех дальнейших будем изображать пространство событий в виде прямоугольника U. Символом S_A будем обозначать площадь фигуры внутри прямоугольника U.

11.27. 2) Не забудьте, что в определении условной вероятности участвуют два события.

11.28. 2) Запишите определение независимых событий в терминах площадей фигур и примите соглашение о том, что $S_U = 1$. Вы увидите, что все зависит от взаимного расположения фигур A и B.

11.29. Запишите все необходимые определения в терминах площадей фигур.

11.30. Для простоты рассмотрите две гипотезы.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Сравнение

1.1. Как рациональное, так и иррациональное число может быть представлено в виде непрерывной дроби. Отличие состоит в том, что рациональное число представляется конечной дробью, а иррациональное число – бесконечной дробью. Придумайте другое представление, более близкое к материалу школьной программы.

1.7. Система вещественных чисел обладает свойством непрерывности (выраженном, например, в виде аксиомы о существовании разделяющего числа), а система рациональных чисел не обладает им. Приведите пример. Остальные аксиомы справедливы для обеих систем.

1.8. Любые два вещественных числа можно сложить, но не любые функции можно сложить, причем таких «нескладываемых» функций много. Приведите примеры и выявите общий принцип построения таких функций. Тем не менее, обе операции имеют ряд одинаковых свойств: коммутативность, ассоциативность, нейтральный элемент… То же самое относится к операции умножения. Что касается деления, то число a невозможно разделить на число b в одном-единственном случае, когда $b=0$. Для функций это неверно.

1.9. 1) Обе операции ассоциативны, имеют нейтральный элемент и необратимы, причем в обоих случаях количество необратимых элементов бесконечно. Отличие в том, что умножение матриц не коммутативно, а умножение функций – коммутативно. 2) Обе операции обладают одинаковым набором свойств: ассоциативностью, наличием нейтрального элемента, необратимостью, некоммутативностью. Сходство не случайно, поскольку умножение матриц можно трактовать как композицию линейных операторов.

1.10. Правая дистрибутивность $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$ имеет место, и это можно доказать с помощью определений. Левая дистрибутивность не выполняется, то есть $h\circ(f+g)\neq h\circ f + h\circ g$. Это можно проиллюстрировать с помощью простых, привычных многочленов: $f(x)=1$, $g(x)=x$, $h(x)=x^2$. Таким образом, сложение и композиция многочленов согласованы в меньшей мере, чем сложение и умножение вещественных чисел.

1.11. Лексикографический порядок обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности, транзитивности и линейности, так что термин «порядок» в его названии вполне уместен. Более того, он согласован с операцией сложения на множестве комплексных чисел, поскольку для любых комплексных чисел верно утверждение $z\le u \Rightarrow z+v\le u+v$. Что касается согласованности отношения порядка и операции умножения, то она отсутствует, поскольку свойство $\begin{cases} z\le u \\ 0\le v \end{cases} \Rightarrow zv\le uv$ не выполняется. Действительно, пусть $z=0$ и $u=v=i$. Тогда требуемое свойство примет вид $\begin{cases} 0\le i \\ 0\le i \end{cases} \Rightarrow 0\le i^2=-1$, а это неверно, поскольку $0>-1$.

Настоятельно рекомендуем провести полные проверки названных свойств. В качестве примера приведем доказательство транзитивности нестрогого лексикографического порядка. Пусть $z = a + bi$, $u = c + di$ и $v = e + fi$. Тогда $\begin{cases} z < u \\ u < v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < c \\ \begin{cases} a = c \\ b < d \end{cases} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} c < e \\ \begin{cases} c = e \\ d < f \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$. Эта сложная система совокупностей равносильна совокупности следующих четырех систем: 1) $\begin{cases} a < c \\ c < e \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a < c \\ \begin{cases} c = e \\ d < f \end{cases} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \begin{cases} a = c \\ b < d \end{cases} \\ c < e \end{cases}$;

4) $\begin{cases} \begin{cases} a = c \\ b < d \end{cases} \\ \begin{cases} c = e \\ d < f \end{cases} \end{cases}$. В первых трех случаях $a < e$, следовательно, $z < v$. В четвертом случае $a = e$ и $b < f$, следовательно, $z < v$, что и доказывает транзитивность.

1.14. Вот фрагмент анализа. Множество нечетных функций, и только оно, содержит такие функции, которые монотонны во всей области определения. Множество четных функций, и только оно, содержит такие функции, которые знакопостоянны во всей области определения. Приведите примеры и обоснуйте общие утверждения.

1.16. Во всех трех случаях теорема имеет два условия, относящиеся к складываемым функциям. Эти условия однотипны, поскольку требуют от слагаемых наличия изучаемого свойства: предела, непрерывности, дифференцируемости. Во всех трех случаях доказывается наличие того же свойства у суммы функций. Кроме того, в первом и третьем случаях выводится вычислительная формула, выражающая предел/производную суммы функций через пределы/производные слагаемых. Все три теоремы являются достаточными условиями: достаточное условие непрерывности суммы и т.д. Что касается различий, то теорема 1 первична, поскольку выводится из определения предела, а теоремы 2 и 3 вторичны, поскольку выводятся с помощью теоремы 1.

1.19. Правило середины применимо к связанным векторам (то есть векторам с общим началом), а правило треугольника – к свободным векторам. Правило параллелограмма равносильно каждому из двух других правил в случае неколлинеарности складываемых векторов.

1.20. Сходство пространств состоит в том, что оба они имеют конечный базис, а это бывает далеко не всегда. Очевидное отличие – количество векторов в базисе, которое порождает все дальнейшие различия: количество координат, различный набор операций над векторами и т.д.

1.21. Обе фигуры неограниченны и состоят из двух компонент связности (прямых). Эти прямые не имеют общих точек и имеют общий перпендикуляр. Отличия найдите самостоятельно.

1.23. Обе фигуры связны, односвязны, линейно связны. Обе имеют одинаковую эйлерову характеристику. Обе гомеоморфны кругу и имеют мощность континуум. (Если считать треугольник и трапецию ломаными линиями, то обе фигуры гомеоморфны окружности. Докажите это.) Обе фигуры выпуклы. Отрезок, соединяющий боковые стороны этих фигур, параллелен основанию. Кроме того, он равен полусумме оснований, если условиться считать вершину треугольника стороной нулевой длины. При этом площади обеих фигур равны произведению средней линии на высоту. У обеих фигур боковые стороны равны тогда и только тогда, когда равны углы при основании. Отличия фигур найдите самостоятельно.

1.27. Свойства фигуры, выраженные в ответах на вопросы раздела «Идеи...», являются общими для параллелограмма $ABCD$ и трапеции $ABCX$. Отличия найдите самостоятельно.

2. Индукция и дедукция

2.1. Все функции нечетны и дифференцируемы (за исключением одной точки для последней функции). Все производные четны. Гипотеза: если функция нечетна и дифференцируема, то ее производная четна. Доказательство этого утверждения легко получить, если продифференцировать равенство $f(-x)=-f(x)$. (Можно также воспользоваться определением производной.)

2.2. Гипотеза: если функция четна и дифференцируема, то ее производная нечетна. **2.3.** Гипотеза: если функция периодична и дифференцируема, то ее производная периодична. **2.4.** При *формулировке* гипотезы делается *индуктивное* умозаключение, выполняемое на основе *неполной* индукции. В процессе проверки гипотезы и *доказательства* ее истинности выполняется *дедуктивное* умозаключение. **2.5.** 1) Нет. 2) Из сообщений других студентов, то есть в результате обмена информацией. 3) Да. 4) Нет. **2.6.** Сценарий 1.

2.7. При $n=1$ тождество справедливо. Допустим, что оно справедливо при $n=k$, то есть что верно равенство $1^3+2^3+\cdots k^3=\dfrac{k^2(k+1)^2}{4}$. Докажем справедливость тождества при $n=k+1$. Для этого преобразуем левую часть, пользуясь предположением индукции:

$$1^3+2^3+\cdots k^3+(k+1)^3=(1^3+2^3+\cdots k^3)+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)^2(k^2/4+k+1)=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4},$$ что и завершает математическую индукцию.

2.8. Прямым вычислением получаем, что $x_1=6$, $x_2=48$, $x_3=342$, $x_4=2400$. Все эти числа делятся на 6, поэтому возникает гипотеза, что при любом n изучаемые числа делятся на 6. Допустим, утверждение верно при $n=k$, то есть 7^k-1 делится на 6. Другими словами, $7^k-1=6t$, или $7^k=6t+1$. Рассмотрим теперь число x_{k+1} и преобразуем его: $x_{k+1}=7^{k+1}-1=7\cdot 7^k-1=7\cdot(6t+1)-1=42t+6=6\cdot(7t+1)$, что и доказывает делимость на 6.

2.9. 1) Легко разрезать квадрат на 4, 9, 16 квадратиков, если провести прямые, параллельные сторонам и делящие их на 2, 3 и 4 равные части соответственно. 2) Если в разбиении на 9 квадратиков объединить 4 из них, стоящие в левом верхнем углу, то получим разрезание исходного квадрата на 6 (неравных) квадратов. Аналогично, если в разбиении на 16 квадратиков объединить 9 из них, стоящих в левом верхнем углу, то получим разрезание исходного квадрата на 8 квадратов. Итак, первая часть задачи решена. 3) Разрезание на 7 квадратов получается так: сначала квадрат разрезается на 4 квадрата, а затем его четвертинка еще раз разрезается на 4 квадрата. Отсюда следует *основная идея*: если мы разрезали квадрат на k квадратов, то существует разрезание и на $k+3$ квадрата. 4) Итак, мы умеем разрезать исходный квадрат на 6, 7, 8 квадратов. *Методом математической индукции* нетрудно доказать, что мы можем разрезать квадрат на $6+3n$ квадратов, на $7+3n$ квадратов и на $8+3n$ квадратов, то есть мы можем разрезать его на любое число частей, большее 6. Окончательно получаем, что мы можем разрезать квадрат на любое число квадратов, отличное от 2, 3, 5.

2.10. Будем решать задачу для произвольного числа n колец. Очевидно, что при $n=1$ потребуется одно перекладывание, а при $n=2$ – три перекладывания. Для того чтобы переложить башню из трех колец, необходимо: а) снять верхние два кольца; б) переложить нижнее кольцо на свободную палочку; в) положить на него два кольца меньшего диаметра. Таким образом, потребуется 3+1+3 = 7 перекладываний. Аналогично для перемещения башни из четырех колец необходимо: а) снять верхние три кольца; б) переложить нижнее кольцо на свободную палочку; в) положить на него три кольца меньшего диаметра. Таким образом, потребуется 7+1+7 = 15 перекладываний. Из приведенных рассуждений следует рекуррентная формула $p_{n+1}=2p_n+1$, где p_n – это требуемое число перекладываний для башни из n колец. По этой формуле легко найти значения чисел p_n: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127 и так далее, откуда вытекает гипотеза о том, что $p_n=2^n-1$. Последняя формула легко доказывается методом математической индукции.

2.11. Нет, так как $f(41)=41^2$.

2.12. Нет, так как $F(5)=4294967297=641\cdot 6700417$.

2.13. Неверно выбрана база индукции: ее первый шаг должен начинаться с рассмотрения группы из *двух* студентов.

2.14. 1) Для любых вещественных (комплексных) чисел справедливо неравенство $|a_1+a_2+\dots+a_n|\le|a_1|+|a_2|+\dots+|a_n|$. 2) Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180^\circ(n-2)$. 3) Любое натуральное число, большее единицы, разлагается на простые множители. 4) Любой многочлен, степень которого не меньше единицы, разлагается на неприводимые множители. 5) Формула бинома Ньютона. 6) Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Необходимо заметить, что а) список может быть пополнен; б) некоторые теоремы могут быть доказаны не только методом математической индукции, но и другим методом.

2.15. 1) Те и другие. 2) Индуктивные умозаключения применяются на первом и втором этапах, дедуктивные – на третьем. 3) Неполная индукция. 4, 5) Нельзя обойтись только индуктивными или только дедуктивными умозаключениями, *необходимы* оба типа.

2.16. Например, законы арифметики: переместительный, сочетательный, распределительный, правило сложения с нулем, правило умножения на единицу. Список не полон.

2.17. Уменьшается. **2.18.** Полной индукции.

2.19. Вот некоторые примеры: 1) неравенство $|a+b|\leq|a|+|b|$; 2) необходимое следствие экстремума для всюду дифференцируемой функции; 3) прямая не может пересекать окружность более чем в двух точках. Список далеко не полон.

2.20. Оба тождества доказываются методом полной индукции.

2.21. Обе теоремы доказываются методом полной индукции. При доказательстве второй теоремы применяется также метод от противного.

2.22. Составим таблицу истинности, включив в нее высказывания *A, B,* и *C* и три импликации, фигурирующие в условии задачи:

A	B	C	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow C$	$A\Rightarrow C$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Одновременная истинность импликаций $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow C$ имеет место в первой, второй, четвертой и восьмой строках, которые выделены жирной рамкой. Последний столбец таблицы показывает, что в этих случаях импликация $A\Rightarrow C$ также истинна, что и доказывает правило силлогизма. *Рекомендация*: для доказательства теоремы $A\Rightarrow C$ нужно (достаточно) доказать две другие теоремы: $A\Rightarrow B$ и $B\Rightarrow C$. Возможно, что каждая из двух промежуточных теорем доказывается существенно легче, чем требуемая теорема.

2.23. Если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники подобны $(A\Rightarrow C)$. Действительно, из условия теоремы следует, что все три угла одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника $(A\Rightarrow B)$. Отсюда следует, что треугольники подобны $(B\Rightarrow C)$.

2.24. *Рекомендация*: для доказательства теоремы $A\vee B\Rightarrow C$ нужно доказать две другие теоремы: $A\Rightarrow C$ и $B\Rightarrow C$. Возможно, что каждая из двух промежуточных теорем доказывается существенно легче, чем требуемая теорема.

2.25. Пусть *X, Y, Z, U* – различные точки окружности. Если хорды *XY* и *ZU* пересекаются в точке *P*, то $PX\cdot PY=PZ\cdot PU$ $(A\vee B\Rightarrow C)$. При доказательстве рассматриваются два частных случая: точка пересечения хорд лежит внутри круга ($A \Rightarrow C$) или вне круга ($B \Rightarrow C$).

2.26. 1) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ нужно (достаточно) предположить, что условие истинно, а заключение ложно, а затем доказать, что условие все-таки является ложным. Получим, что условие теоремы одновременно и истинно, и ложно. 2) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ нужно (достаточно) предположить, что условие истинно, а заключение ложно, а затем доказать, что заключение все-таки является истинным. Получим, что заключение теоремы одновременно и истинно, и ложно. 3) Для доказательства теоремы $A \Rightarrow B$ нужно (достаточно) предположить, что условие истинно, а заключение ложно, а затем опровергнуть некоторое третье утверждение, истинность которого была установлена ранее. Получим, что это третье утверждение одновременно и истинно, и ложно.

2.27. 1) Если прямая a параллельна прямой b, лежащей в плоскости α, то прямая a параллельна плоскости α. 2) Если функция линейна, то она не периодична. 3) Если две различные прямые перпендикулярны третьей, то они не пересекаются.

2.28. Составим таблицу истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Одновременная истинность импликации и ее посылки имеют место в четвертой строке таблицы, выделенной жирной рамкой. Ячейка второго столбца той же строки показывает, что ее заключение также истинно, что и доказывает правило.

2.29. Если два треугольника подобны, то их площади относятся как квадраты сходственных сторон. $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ с коэффициентом подобия k. Следовательно, $S_{ABC} : S_{A'B'C'} = k^2$.

2.30. Составим таблицу истинности:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Одновременная истинность импликации и ложность заключения имеют место в первой строке таблицы, выделенной жирной рамкой. Ячейка первого столбца той же строки показывает, что посылка является ложной, что и доказывает правило.

2.31. Если две всюду определенные функции равны, то для любого значения аргумента соответствующие значения функций также равны. Функции f и g не равны друг другу. Следовательно, существует такое значение x, что $f(x) \neq g(x)$.

3. Анализ и синтез

3.1. Та часть решения 1, которая является поиском способа решения задачи, выполнена методом восходящего анализа по логической схеме (1). Ответы на вопросы 1)–3) –это синтетические шаги. Решение 2 является синтетическим, поскольку представляет собой преобразование условий задачи. Аналитический элемент решения также присутствует, хотя и выражен слабо: мы знаем, что для получения уравнения достаточно приравнять друг к другу два *разных* выражения некоторой физической величины, в нашем случае, веса груза.

3.2. *Доказательство 1* является синтетическим и следует логической схеме (4). *Доказательство 2* – это восходящий анализ, схема 1. Шаг 5 чисто синтетический, а шаги 1 и 4 – частично синтетические, поскольку все они используют условия теоремы. *Доказательство 3* – это нисходящий анализ, схема 2. Шаги 6-9 можно считать синтетическими, так как они представляют собой преобразование условий задачи.

3.3. Все используемые теоремы – признаки параллельности прямых и признаки равенства треугольников – являются критериями, поэтому в доказательствах можно просто обратить все стрелки.

3.4. Приведенное свойство четырехугольника является критерием его «параллелограммности».

3.7. Данные задачи решаются методом нисходящего анализа и следуют логической схеме (2). Синтетическим элементом аналитического решения можно считать этап доказательства, на котором обосновывается тот факт, что предлагаемый алгоритм построения действительно дает требуемый результат.

3.8. Задание интересно тем, что две различные трактовки можно обосновать в равной или почти равной мере. С одной стороны, равенство $\sqrt{x+11}=x-1$ представляет собой *условие* задачи, так что любые действия по решению уравнения являются преобразованием условия, то есть синтезом. С другой стороны, решение уравнения – это поиск множества M, обладающего свойством $\sqrt{x+11}=x-1 \Leftrightarrow x\in M$. Решая его, например, методом следствий, мы получим, что $\sqrt{x+11}=x-1 \Rightarrow x+11=(x-1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Далее прямой проверкой убеждаемся, что число 5 является корнем, а число -2 не является таковым. Здесь ясно виден нисходящий анализ, реализованный по логической схеме (2). При этом этапу обращения стрелок в общей схеме соответствует проверка «возможных корней»: для числа 5 стрелки обратимы, поскольку оно является корнем, а для числа -2 стрелки не обратимы. Решая данное уравнение методом равносильных переходов, мы можем сказать, что действуем в рамках метода нисходящего анализа, реализованного по логической схеме (3). В дальнейшем будем считать, что уравнения решаются на основе аналитического метода.

3.9. Все задачи решаются методом нисходящего анализа. В процессе решения присутствуют два неочевидных аналитических момента. Во-первых, это *определение типа* неравенства или тождества. Так, в задаче 1 мы видим показательное уравнение, в задаче 2 – одно из многочисленных тригонометрических тождеств, в задаче 3 – алгебраическое неравенство. Во-вторых, это *выбор метода* доказательства. Так, задачу 2 можно решить, по крайней мере, *двумя* методами. Назовите эти методы для каждой из задач. К синтетическим элементам процесса решения можно отнести *реализацию* выбранного метода решения.

3.10. ***Решение 1*** содержится во всех учебниках по математическому анализу. Его идея в следующем. Поскольку последовательность (x_n) ограничена сверху, существует число $s=\sup\{x_n\}$. Именно оно и является пределом. При доказательстве этого последнего факта используется возрастание последовательности и критерий точной верхней грани.

Решение 2. 1) Поскольку последовательность (x_n) ограничена сверху, существует число $s=\sup\{x_n\}$. 2) Теперь достаточно выяснить, может ли быть пределом последовательности: а) число $b>s$; б) число $c<s$; в) само число s. 3) В случаях а) и б) ответ отрицателен, а в случае в) положителен. При доказательстве используется возрастание последовательности и критерий точной верхней грани.

Решения 3, 4. 1) Возрастающая последовательность может быть либо неограниченной (возрастание «до бесконечности»), либо ограниченной. Достаточно рассмотреть каждую из ситуаций в отдельности. 2) Можно доказать, что неограниченная последовательность не имеет предела. 3) Изучая ограниченную последовательность, можно повторить решение 2.

4. Конкретизация, обобщение и абстрагирование

Конкретизация

4.1. (А): $h=\overset{c}{0}$, где $\overset{c}{0}(x):=0$. (Б): $h=\overset{c}{1}$, где $\overset{c}{1}(x):=1$. **4.2.** $h=\mathrm{id}$, где $\mathrm{id}(x)=x$. **4.3.** $g(x)=x$. **4.4.** Добавьте в условие теоремы Лагранжа требование $f(a)=f(b)$. **4.5.** $a=\sqrt{3}$, $b=-3\sqrt{3}$. **4.6.** $\forall q$, $a>0$, $p\le 3$; $p_{\max}=3$. **4.7.** $\forall c$, $a<0$, $b\ge -6a$; $b_{\min}=6$. **4.8.** 1) $3b<a^3$; 2) $3b=a^3$; 3) $3b>a^3$. **4.9.** $a\le 0{,}01\pi$; $a_{\max}=0{,}01\pi$. **4.10.** $a<1/3$. **4.11.** 1а) $a=\sqrt[3]{5}$; 1б) $a=\sqrt[3]{1/3}$; 2) $p<0$ или $p=1$. **4.12.** $a=-\sqrt{3}/3$. **4.13.** $C=10$. **4.14.** $C=e^{-1}$. **4.15.** 1) $a=b=0$; 2) $a=0$; 3) $b=0$; 4) $a=b$. **4.16.** 1) $a=b=0$; 2) $b=0$; 3) $a=0$. **4.17.** $b=3/2$. **4.18.** $a=-1$. **4.19.** $a=b=1$. **4.20.** Положите $a=1, b=-1$ в формуле бинома Ньютона. **4.22.** 1) $z=a\in \boldsymbol{R}$; 2) $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$. **4.23.** 1) $k=2$; 2) $k=2,3$; 3) $k=2,3,4,6$. **4.24.** $k=2,3,4\ldots$ **4.25.** Либо числа оба вещественны, либо взаимно сопряжены. **4.26.** 1) $a_{11}=1$, $a_{2i}=a_{3i}=0$ при любых i; 2) $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{21}=a_{3i}=0$ при любых i. 3) $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$, $a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$. **4.27.** 1) $a_{11}=1$, $a_{2i}=a_{3i}=0$ при любых i; 2) $a_{11}=a_{22}=1$, $a_{21}=a_{3i}=0$ при любых i. 3) $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$, $a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$. **4.28.** Например, $\begin{cases} x_1+ax_2+bx_3=1 \\ x_1+ax_2+bx_3=2 \end{cases}$. **4.29.** Равны нулю. **4.30.** 1) $a_{11}=a_{22}=a_{33}=1$, $a_{21}=a_{31}=a_{32}=0$. 2) Например, $a_{3i}=0$ при любом i. Придумайте другие ответы. **4.31.** Например, $a_{31}=a_{32}=0$, $a_{31}=1$. Придумайте еще один ответ. **4.32.** Из теоремы Эйлера получаем не менее знаменитую Теорему Ферма: если число a не делится на простое число p, то $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$.
4.33. 1) $a=d=1$, $b=c=p=q=0$; 2) $a=d=1$, $b=c=0$; 3) $p=q=0$;
4) $b=c=p=q=0$, $d=a$; 5) $p=q=0$, $a=d=\cos\varphi$, $-b=c=\sin\varphi$.
4.34. $b=c=0$, $ad\ne 0$. **4.35.** 1) $b=c=q=0$, $d=1$, $a\ne 0$;

2) $b=c=p=0$, $a=1$, $d\neq 0$. **4.36.** Второй. **4.37.** 1) $c^2<a^2+b^2$; 2) $c^2=a^2+b^2$; 3) $c^2>a^2+b^2$.

4.38. 1) Если из некоторой точки окружности опустить перпендикуляр на диаметр, то квадрат перпендикуляра равен произведению отрезков, на которые перпендикуляр делит диаметр. 2) Квадрат высоты прямоугольного треугольника, опущенной из вершины прямого угла, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

4.39. Пусть AC – общая касательная двух окружностей, пересекающихся в точках M и N, где A и C – точки касания. Точка пересечения прямых AC и MN делит отрезок AC пополам.

4.40. Угол между хордой и касательной, проведенной в одном из концов хорды, равен половине дуги, отсекаемой хордой на окружности. Детали уточните самостоятельно. **4.41.** 1) $PA^2=PC\cdot PD$.

4.43. Параметрическая кривая $\overline{\beta}(t)=\mathbf{i}\cos bt+\mathbf{j}\sin bt$ задает окружность. Параметрическая кривая $\overline{\gamma}(t)=e^{at}\mathbf{i}$ задает луч, совпадающий с положительным направлением оси Ox. Параметрическая кривая $\overline{\delta}(t)=\mathbf{i}$ задает точку $P(1,0)$.

4.44. Параметрическая кривая $\overline{\beta}(t)=\mathbf{i}+\mathbf{k}bt$ задает прямую, а именно, образующую, проходящую через точку $P(1,0,0)$. Параметрическая кривая $\overline{\gamma}(t)=\mathbf{i}\cos at+\mathbf{j}\sin at$ задает направляющую, а именно окружность в плоскости xOy. Параметрическая кривая $\overline{\delta}(t)=\mathbf{i}$ задает точку $P(1,0,0)$.

4.45. В точку – начало координат. **4.46.** В биссектрисы координатных углов: $y=\pm x$. **4.47.** 1) В пару точек $P(-a,0)$ и $Q(a,0)$. 2) В пару точек $R(0,-b)$ и $S(0,b)$. **4.48.** В пару точек $P(-a,0)$ и $Q(a,0)$.

Обобщение

4.49. Равенство (А) может быть обобщено по числу слагаемых, по порядку производной, по обоим признакам одновременно, а также для более широкого класса функций, дифференцируемых не во всех точках области определения. В последнем случае формулировка теоремы усложнится.

4.51. Положим в первой формуле $\Delta x=x-x_0$. Получим, что $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x)-f(x_0)$. Кроме того, известно, что $A=f'(x_0)$. Первая формула перепишется в виде $f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$. Очевидно, что она получается из формулы Тейлора при $n=1$.

4.52. Пусть $a=x_0$, $b-x$. При этих обозначениях формула Лагранжа примет вид $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)$. Очевидно, что она получается из формулы Тейлора при $n=0$.

4.53. Вторая теорема является обобщением первой.

4.54. Возможные обобщения таковы: 1) формула бинома Ньютона; 2) формула для квадрата суммы трех или более слагаемых; 3) полиномиальная формула типа $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n=\cdots$. Последнюю формулу полезно найти в книгах или вывести. Другое направление обобщений связано с использованием слагаемых не из множества действительных чисел, а из множеств другой природы (см. задачу 4.75).

4.55. Разность одинаковых степеней двух чисел делится без остатка на разность этих чисел, то есть $x^n - a^n$ делится на $x - a$. При этом частное равно $\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}$.

4.56. Разность одинаковых *четных* степеней двух чисел делится без остатка на сумму этих чисел, то есть для любого *четного* n двучлен $x^n - a^n$ делится на $x + a$. При этом частное равно $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k x^{n-1-k}$.

4.57. Сумма одинаковых *нечетных* степеней двух чисел делится без остатка на сумму этих чисел. При этом частное равно $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k x^{n-1-k}$.

4.58. При возведении в куб получим стандартные выражения для $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$. Испытайте другие степени.

4.59. Группа $\sqrt[k]{1}$ является подгруппой группы $\sqrt[n]{1}$ тогда и только тогда, когда k является делителем n.

4.60. Второе понятие является обобщением первого. **4.61.** Второе понятие является обобщением первого. **4.62.** Второе понятие является обобщением первого. **4.63.** Второе понятие является обобщением первого.

4.64. 1) Уравнения вида $kx = n$, где натуральное n не делится на натуральное k. 2) Уравнения вида $x + a = b$, где $a > b$. 3) Измерение гипотенузы прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом длины 1. 4) Решение квадратных уравнений, сводящихся к уравнению $x^2 + 1 = 0$.

4.65. Обобщенное утверждение звучит следующим образом: «Пусть *A, B, C, D* – четыре точки одной окружности. Пусть прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *P*. Тогда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$».

4.66. Обобщенное утверждение звучит следующим образом: «Пусть две окружности пересекаются в точках *M* и *N*. Через точку *P* прямой *MN*, отличную от *M* и *N*, проведены в каждой из окружностей секущие *AB* и *CD*. Тогда $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

4.67. Обобщенное утверждение звучит следующим образом: «Пусть прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *P* так, что $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. В этом случае точки *A, B, C, D* лежат на одной окружности».

4.71. Изучаются несколько обобщений: 1) отображения $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, то есть функции многих переменных; 2) отображения $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ и $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, то есть теория плоских и пространственных кривых соответственно; 3) отображения $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, то есть теория поверхностей; 4) отображения $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, то есть функции комплексного переменного. Разумеется, существуют и другие обобщения, правда, вне рамок курса педагогического университета.

4.72. Бинарная алгебраическая операция на множестве. **4.73.** Группа. **4.74.** Отношение эквивалентности. **4.75.** 1) Да; 2) да; 3) нет.

4.76. Средняя скорость тела за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$ равна $V_{ср} = \dfrac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$. Здесь $x(t)$ – это координата тела в момент времени t. Таким образом, в числителе дроби стоит разность между координатой тела в *конечный* момент времени и в *начальный* момент времени, которая и равна перемещению тела за промежуток времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Эта же идея используется при вычислении других средних величин. Так, средняя сила тока равна $I_{ср} = \dfrac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$. Средняя скорость роста кристалла равна $\dfrac{m(t_0 + \Delta t) - m(t_0)}{\Delta t}$, где $m(t)$ – это масса кристалла в момент времени t. Средняя мощность равна $N_{ср} = \dfrac{A(t_0 + \Delta t) - A(t_0)}{\Delta t}$. Осталось перейти к пределу.

4.77. Для всех перечисленных уравнений неизвестной величиной является *функция*. Не число, как при решении квадратных уравнений, не арифметический вектор, как при решении систем линейных уравнений, а именно функция. Все перечисленные уравнения содержат *производную* неизвестной функции, первую или вторую. Все перечисленные уравнения связывают неизвестную функцию, аргумент неизвестной функции (пусть и в неявном виде) и производную неизвестной функции. Таким образом, мы приходим к понятию дифференциального уравнения.

5. Аналогия

5.1. Отрезок, треугольник и треугольная пирамида являются простейшими ограниченными фигурами на прямой, на плоскости и в пространстве соответственно.

5.2. Каждая из фигур получается с помощью параллельного перемещения некоторой фигуры меньшей размерности.

5.3. Каждая из фигур получается с помощью параллельного перемещения некоторой фигуры.

5.4. Обе фигуры получаются из более простых с помощью единообразной конструкции.

5.6. Если каждую строку таблицы дополнить слева числом 1, то получится начало треугольника Паскаля:

	Размерность граничных элементов и компонентов связности			
	0	1	2	3
Отрезок	2	1		
Треугольник	3	3	1	
Треугольная пирамида	4	6	4	1

5.7. Он совпадает с точкой пересечения ее шести медианных плоскостей. Медианной плоскостью называется плоскость, проходящая через середину ребра и противоположное ребро.

5.8. $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$.

5.10. Центр тяжести треугольной пирамиды находится на отрезке, соединяющем вершину с центром тяжести противоположной грани, и делит его в отношении 3:1. Пусть $ABCD$ – пирамида, M – ее центр тяжести, и P – центр тяжести грани ABC. Тогда $\overline{OM}=\frac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$ и $\overline{OP}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Найдите теперь векторы $\overline{MD}$ и $\overline{MP}$ и убедитесь, что они коллинеарны.

5.17. Нет. **5.18.** Параллелепипед является прямоугольным тогда и только тогда, когда все его диагонали равны между собой. Схема доказательства достаточности состоит в следующем. 1) Сначала нужно рассмотреть параллелограмм, образованный диагоналями оснований параллелепипеда и боковыми ребрами параллелепипеда. У этого параллелограмма равны диагонали, откуда можно сделать первый важный вывод. 2) Затем нужно рассмотреть *другой* параллелограмм, образованный *другими* диагоналями оснований параллелепипеда и другими боковыми ребрами параллелепипеда. У этого параллелограмма диагонали также равны, откуда можно сделать второй важный вывод. 3) Теперь можно сравнить диагонали оснований параллелограмма и сделать третий важный вывод, который и доказывает требуемое.

5.20. Теорема Пифагора. При всем сходстве равенств в данной задаче и в теореме Пифагора налицо существенное отличие: пифагорово равенство относится к квадратам единиц длины, а равенство в задаче – к четвертым степеням единиц длины.

5.21. Назовем пирамиду равнобедренной, если все ребра, выходящие из ее вершины, равны. В этом случае все их проекции на плоскость основания равны, следовательно, многоугольник, лежащий в основании, вписан в некоторую окружность; заметим, что в общем случае неравнобедренной пирамиды это не так. Теперь теорема звучит следующим образом: «Основание равнобедренной пирамиды можно вписать в окружность, а высота пирамиды проходит через центр окружности». Еще проще обстоит дело с конусом.

5.22. 1) Призма, прямая призма, шар. 2) Объем шара равен объему некоторой пирамиды.

5.23. Используйте теорему Фалеса. **5.25.** Используйте неравенство треугольника. **5.27.** $V=\frac{1}{3}Sr$, где S – полная поверхность пирамиды, а r – радиус вписанной в нее сферы. **5.28.** $\varepsilon\le\frac{r}{\sqrt{n}}$.

5.29. Скалярное произведение арифметических векторов по определению равно сумме произведений их одноименных координат.

5.30. Объемом четырехмерного параллелотопа в $\boldsymbol{R}^4$ *называется* абсолютная величина определителя, составленного из координат векторов, порождающих параллелотоп.

5.31. Отображение $f(x)=e^x$ является изоморфизмом групп, т.е. взаимно однозначным отображением, сохраняющим операции.

5.32. В абсолютно сходящемся ряде (в частности, в знакопостоянном) можно переставлять его члены в произвольном порядке. При этом ряд останется сходящимся и его сумма не изменится. Для условно сходящихся рядов это неверно. Что касается группировки, то сгруппируйте *двумя способами* члены бесконечного ряда $1-1+1-1+1-1+\cdots$ и покажите, что сумма зависит от того, какая группировка применена.

5.33. Отображение сигнум из курса математического анализа является гомоморфизмом изучаемых алгебр. Напомним, что оно определяется равенствами $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

5.34. $OB=\operatorname{ch} t$, $AB=\operatorname{sh} t$, $1=\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t$, $t=2S_{OPA}$.

5.35. Для гиперболических функций справедливы едва ли не все формулы, аналогичные тригонометрическим. Аналогия столь глубока, что правомерно говорить о гиперболической тригонометрии. Причины этой аналогии выявляются в теории функций комплексного переменного.

5.36. Этап выдвижения гипотезы или предположения индукции.

6. Классификация

6.1. Нет, т.к. число 1 не является ни простым, ни составным.

6.2. Нет, т.к. подмножества чисел указанных типов включаются одно в другое.

6.3. Нет, т.к. число 0 ни положительно, ни отрицательно.

6.4. Да. **6.5.** Да.

6.6. Нет, т.к. некоторые подмножества чисел указанных типов включаются одно в другое.

6.7. а), б) Нет.

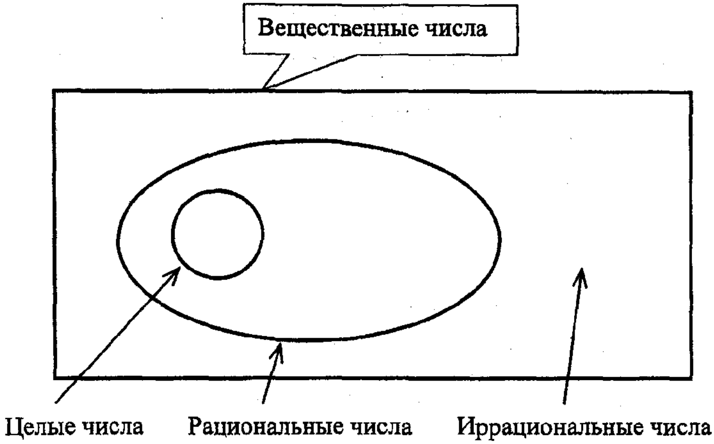


Рис. 9

6.8. Да. **6.9.** Да. **6.10.** Да.

6.11. Нет. Термин «целое число» относится к *природе* числа, а термин «дробь» – к *форме записи* числа. Не случайно в предлагаемом примере целое число 2 может быть записано как дробь, да еще двумя способами.

6.12. Нет, т.к. существуют другие типы дробей, например, непрерывные.

6.13. Трудно дать ответ, поскольку несократимая и сократимая дробь могут быть равны: $2/3 = 4/6$.

6.14. Трудно дать ответ, поскольку конечная и бесконечная дробь могут быть равны: $1{,}5 = 1{,}4(9)$.

6.15. Да. **6.16.** Да.

6.17. Нет. Смотри диаграмму:

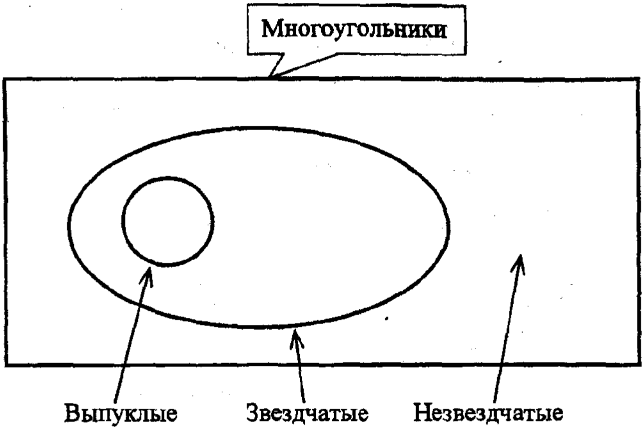


Рис. 10

6.18. Да. **6.19.** Нет. **6.20.** Нет. **6.21.** Да. **6.22.** Да. **6.23.** Нет. **6.24.** Да.

6.25. Нет. **6.26.** Нет. **6.27.** Да. **6.28.** Диаграммы однотипны!

6.29. Нет. Бросается в глаза, что «забыты» функции общего вида.

6.30. Нет. Функция, тождественно равная нулю, является и четной, и нечетной.

6.31. Нет. Композиция функций разных типов не принадлежит ни одному из них. Например, функция $f(x)=\sin(x^2)$ не является ни тригонометрической, ни степенной. Читателя не должно смущать то обстоятельство, что в условии задачи приведена полная система образующих для класса элементарных функций.

6.32. Нет. Например, скользящая симметрия, которая является композицией осевой симметрии и параллельного переноса, не принадлежит ни к одному из названных типов движений.

6.33. Да.

6.34. Нет, т.к. многие из подмножеств пересекаются, как показано на диаграмме Эйлера. Жирная точка в центре круга означает, что функция, тождественно равная нулю, является и четной, и нечетной.

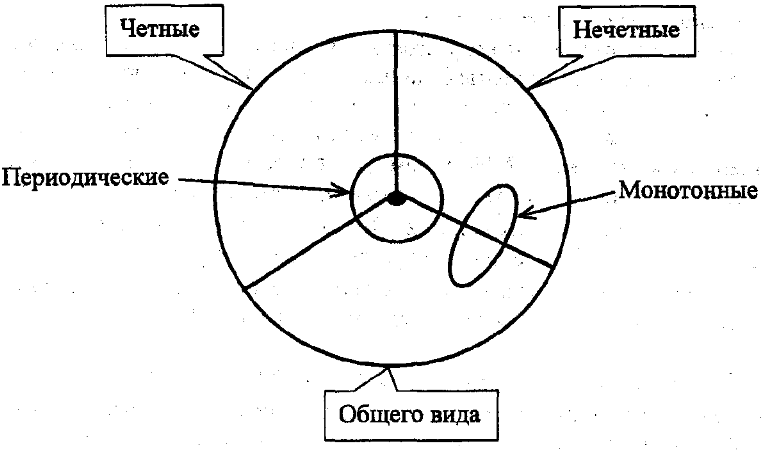


Рис. 11

6.35. Нет. **6.36.** Нет. Смотри диаграмму Эйлера:

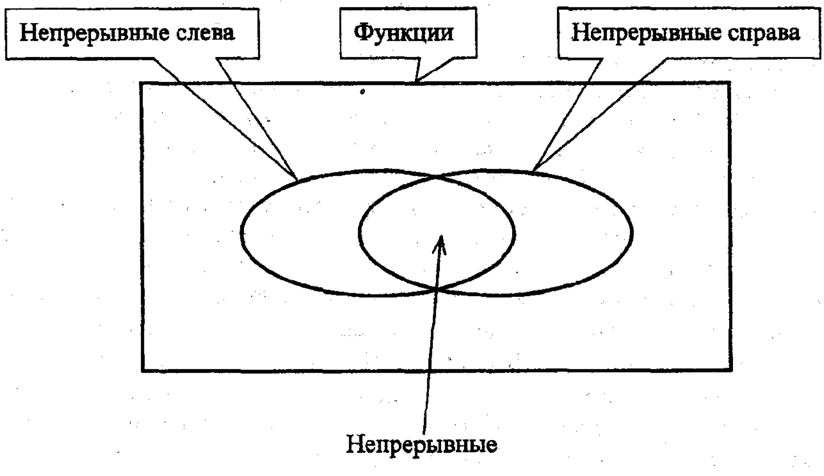


Рис. 12

6.38. Для всех этих случаев диаграммы Эйлера одинаковы.

6.39. Да.

6.40. В данном примере (a,b) – внутренние точки, $(-\infty,a)\cup(b,c)\cup(c,+\infty)$ – внешние точки, $\{a,b,c\}$ – граничные точки, $[a,b]$ – предельные точки. На этом примере видно, что во множество предельных точек входят *все* внутренние точки и *некоторые* граничные точки.

6.41. Интервал, отрезок и полуинтервал являются примерами множеств открытых, замкнутых и ни открытых, ни замкнутых соответственно. Для того чтобы решить вопрос о том, является ли данная типология классификацией, нужно понять, существуют ли подмножества, которые являются одновременно и открытыми, и замкнутыми в $\boldsymbol{R}$. На самом деле таких множеств не существует. Действительно, если подмножество B и открыто, и замкнуто в $\boldsymbol{R}$, то его дополнение $\overline{B}$ обладает этими же свойствами. Получается, что множество вещественных чисел можно разбить на два непересекающихся открытых подмножества B и $\overline{B}$. Это противоречит связности множества вещественных чисел. Таким образом, приведенная типология подмножеств множества $\boldsymbol{R}$ является их классификацией.

6.42. Легко видеть, что подмножество $B=(0,+\infty)$ и открыто, и замкнуто в A. Следовательно, рассматриваемая типология подмножеств не является классификацией. Мы видим, что имеет место существенное отличие от предыдущей задачи.

6.43. В данном списке типологий содержится 15 классификаций, среди них 10 дихотомических и 5 классификаций, содержащих по 3 типа объектов каждая. Некоторые дихотомические классификации описаны в заданиях 5, 9, 15, 21. Некоторые классификации, содержащие 3 типа объектов, описаны в заданиях 22, 39. Остальные найдите самостоятельно.

6.44. Выполнение этого задания допускает большую вариативность.

7. Необходимое следствие, достаточное условие и критерий

7.1. Вот десяток теорем, касающихся чисел и выбранных в соответствии со вкусами автора. 1) Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника несоизмерима с его катетом. (Благодаря этой теореме в математику вошли иррациональные числа.) 2) Отношение длины окружности к ее диаметру постоянно, то есть не зависит от окружности. (Так в математику вошло число π.) 3) $\pi \approx 3{,}14$. (Так число π вошло с инженерные расчеты.) 4) Число π трансцендентно. (Тем самым выявлена его природа.) 5) Последовательность $x_n=(1+1/n)^n$ имеет предел. (Благодаря этой теореме в математику вошло число e.) 6) Число e трансцендентно. 7) Множество простых чисел бесконечно. 8) Любое натуральное число, большее 1, либо является простым, либо разлагается на простые множители. (Эту теорему даже называют основной теоремой арифметики.) 9) Множество рациональных чисел счетно, а множество вещественных чисел несчетно. 10) Многочлен с комплексными коэффициентами имеет корень. *Найдите другие примеры!*

7.2. Теоремы, для которых верны обратные к ним утверждения, таковы: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16. **7.3.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. 4) Нет. 5) Да.

7.5. В приведенной таблице число означает номер задания, а знаки плюс и минус в нижележащих клетках – истинность и ложность высказывания соответственно. При этом высказывания логического квадрата расположены в таблице в том же порядке, что и в задаче 7.3: исходное, обратное, противоположное, контрапозитивное. Критерии могут быть образованы в тех случаях, когда все четыре утверждения логического квадрата являются истинными.

1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+
+	+	+	+	–	+	+	+	+	+	+	–	+	+	+	+	–	+	+	+

11		12		13		14		15		16		17	
+	–	+	+	–	+	+	+	–	+	+	+	+	–
–	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+	–	+

7.6. 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16 – необходимо и достаточно. 3, 6, 9, 17 – необходимо, но не достаточно. 11, 13, 15, – достаточно, но не необходимо. Приводя контрпримеры, настоятельно советуем найти другие контрпримеры. 3. Для пересекающихся прямых точка пересечения является центром симметрии. 6. Сумма последовательностей $x_n = (-1)^n$ и $y_n = (-1)^{n+1}$ имеет предел (какой?), хотя слагаемые не имеют пределов (почему?). 9. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, однако его члены не удовлетворяют требуемому неравенству. 11. Функция $y = \{x\} - 0{,}5$ разрывна в каждой целочисленной точке, однако функция $z = y^2$ всюду непрерывна (почему?). 13. Тонкий пример: функции $f(x) = |x|$ и $g(x) = -|\sin x|$ не имеют производной в точке $a = 0$, однако их сумма имеет производную в этой точке. Докажите эти факты и приведите пример попроще. 15. Функция $f(x) = \begin{cases} x, \textit{ если } x \neq 0 \\ -1, \textit{ если } x = 0 \end{cases}$ имеет локальный минимум в точке $a = 0$, однако ее производная положительна всюду, где она существует (чему равна?). 17. Вторая производная функции $y = x^4$ обращается в нуль при $x = 0$, однако не имеет перегиба в этой точке.

7.7. Необходимые следствия параллельности прямых – это теоремы 3.1–3.3. Достаточные условия параллельности прямых – это теоремы 2.1-2.3. Критерии параллельности образуются при группировке теорем 2.1 и 3.1, 2.2 и 3.2, а также 2.3 и 3.3. Например, первая пара дает нам такой критерий: две прямые параллельны *тогда и только тогда*, когда при пересечении их секущей накрест лежащие углы равны.

7.8. Рассмотрим множество фигур, состоящих из двух прямых. Необходимое следствие параллельности: если прямые параллельны, то фигура имеет более двух осей симметрии. Обратное неверно. Контрпримером служит фигура, состоящая из двух взаимно перпендикулярных прямых, которая имеет четыре оси симметрии. Разумеется, пример не является единственным. Придумайте другие.

7.9. Необходимые следствия – это теоремы 2.1 и 2.2, причем теорему 2.1 возможно (и, по мнению автора, целесообразно) разбить на две теоремы, одна из которых утверждает равенство противоположных сторон, а другая – равенство противоположных углов. Достаточные условия – это теоремы 3.1-3.3. Критерий свойства «быть параллелограммом» образуется при группировке теорем 2.1 и 3.2, 2.2 и 3.3. Например, первая пара дает нам такой критерий: для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, *необходимо и достаточно*, чтобы его противоположные стороны были попарно равны. Отметим, что это не полный список критериев. Придумайте другие. Например, естественно обсудить, является ли равенство противоположных углов четырехугольника достаточным условием того, что он является параллелограммом.

7.10. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, M – точка пересечения биссектрисы угла A со стороной BC или ее продолжением, а N – точка пересечения этой биссектрисы со стороной CD или ее продолжением. Тогда по крайней мере один из треугольников ABM и ADN является равнобедренным. Обратное утверждение неверно, поскольку таким же свойством обладает трапеция. Докажите эти факты.

7.11. Необходимое следствие – это теорема 2. Достаточные условия – это теоремы 3.1-3.3. Эти теоремы не могут быть сгруппированы так, чтобы пара теорем образовывала критерий подобия.

7.12. 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. **7.13.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Нет. 4) Нет. 5) Да.

7.14. 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. **7.15.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. **7.16.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Нет. 4) Да. **7.17.** 1) Нет. 2) Нет. 3) Да.

8. Работа с понятием

8.1. Данное задание служит формированию мотива к изучению понятия биссектрисы. Интересно, что ему можно придать аналитическую трактовку. Для этого нужно построить графики величин углов AOX и XOB в зависимости от времени. Абсцисса точки их пересечения (которая существует в силу *непрерывности* графиков!) дает особый момент времени, в который эти величины равны, то есть тот момент, когда вращающийся луч становится биссектрисой.

8.3. Данное задание служит формированию мотива к введению понятия параллельности прямых.

8.4. Данное задание служит формированию мотива к введению понятия подобных треугольников.

8.5. Данное задание служит формированию мотива к введению понятия простого числа.

8.6. Данное задание служит формированию мотива к введению понятия иррационального числа.

8.7. Данное задание служит формированию мотива к введению понятия корня уравнения.

8.8. 1) Нет. 2) Нет. 3) Да. 4) Нет. Это задание на подведение под понятие.

8.9. Да, хотя формально понятие угла между прямыми в пространстве не изучалось.

8.11. Да. Это задание на подведение под понятие.

8.12. Это задание на подведение под понятие.

8.13. Иррационально. Это задание на подведение под понятие.

8.14. 1) Да, нет, да. 2) Да, да, да. 3) Например, 5. 4) 1, 2, 3, 4. Это задание на подведение под понятие.

8.16. Равнобедренный. Нет. Это задание на извлечение следствий из понятия.

8.17. Это задание на извлечение следствий из понятия.

8.18. Биссектрисы параллельны, в частности, они могут совпадать.

8.19. Либо 4, либо 13,5 см.

8.20. 2 и 65537. Это задание на выведение следствий из определения простого числа.

8.21. $b = 8^{k/n}$. Это задание на извлечение следствий из понятия рационального числа.

8.22. Например, в теореме о свойствах равнобедренного треугольника понятие биссектрисы сочетается с понятиями высоты (а следовательно, и перпендикуляра) и медианы (а следовательно, и середины отрезка). Приведите другие примеры. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

8.23. Например, в теореме о диагоналях ромба понятие перпендикулярности сочетается с понятием биссектрисы. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

8.24. Эквидистантой прямой является параллельная ей прямая, а эквидистантой окружности – концентрическая ей окружность. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

8.25. Уже сама формулировка задания подсказывает, что его естественно использовать на этапе систематизации понятий. Понятие параллельности прямых, как и понятие подобия треугольников, является рефлексивным, симметричным и транзитивными, то есть является отношением эквивалентности. Кроме того, отношениями эквивалентности являются параллельность плоскостей, сонаправленность лучей, равенство (эквиполлентность) векторов, коллинеарность ненулевых векторов, конгруэнтность треугольников, равенство чисел, равенство функций. Таким образом, школьный курс математики насыщен отношениями эквивалентности, хотя понятие эквивалентности и не входит в школьный курс.

8.26. Нет. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

8.27. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

8.28. $b \le a \le c$. Задание естественно использовать на этапе систематизации понятий.

9. Методика работы с теоремой

9.1. Различные вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, равны между собой.

9.4. Сумма углов треугольника равна развернутому углу.

9.9. Скорость тела в момент наибольшего удаления равна нулю. Другими словами, существует момент времени t_0, такой, что $v(t_0) = 0$. Если воспользоваться физическим смыслом производной координаты тела $x(t)$, то мы получаем равенство $x'(t_0)=0$, то есть, фактически, теорему Ролля. Рассуждая тем же методом, что и при решении данной задачи, можно прийти к теореме Лагранжа, критерию постоянства функции, достаточному условию монотонности функции.

9.10. Гипотеза, завершающая эксперимент, способствует первоначальному ознакомлению с теоремой, которая впоследствии будет изучена в полном объеме. Главное же состоит в том, что *самостоятельно* высказанная гипотеза является мощным внутренним стимулом для изучения теоремы.

9.12. Нет. Рассмотрите три функции: 1) $f(x)=x$, где $x\in[0,1]$; 2) $f(x)=|x|$, где $x\in[-1,1]$; 3) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x, & x\in(0,1]\end{cases}$.

9.14. Рассмотрите четыре функции: 1) $f(x)=\operatorname{sgn}x+0{,}5$, где $x\in[-1,1]$; 2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$, где $x\in[-1,1]$; 3) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ x^{-1}, & x\in(0,1]\end{cases}$; 4) $f(x)=\{x\}$, где $x\in[0,1]$.

9.15. Выявление логической структуры теоремы способствует усвоению содержания теоремы и запоминанию ее формулировки.

9.16. Метод от противного. Этим же методом доказывается иррациональность числа $\sqrt{2}$, необходимое условие экстремума и целый ряд других важных теорем.

9.17. Метод разбора случаев. Этим же методом доказывается, например, неравенство треугольника $|a+b|\le|a|+|b|$ для вещественных чисел: сначала рассматривается ситуация, когда оба числа положительны, затем когда оба отрицательны и т.д. Методом разбора случаев доказывается необходимое условие экстремума: сначала предполагают, что производная в точке экстремума положительна, и приходят к противоречию; затем предполагают, что она отрицательна, и вновь приходят к противоречию; остается единственная из трех априорных возможностей, когда производная в точке экстремума равна нулю.

9.18. Можно воспользоваться либо методом равносильных переходов, либо методом тождественных преобразований. Последний реализуется так: рассматривается разность $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ и сравнивается с нулем. Среди многочисленных теорем, доказываемых теми же методами, упомянем две: неравенство $a+\frac{1}{a}\ge 2$ для положительного числа a и формулу $\log_b x=\log_a x\cdot\log_b a$, позволяющую перейти от логарифма числа x по основанию a к логарифму того же числа по основанию b. Последняя получается, если мы прологарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a x}=x$ по основанию b.

9.19. Все три факта доказываются методом замены переменной. В первом случае достаточно положить $b=-c$, во втором случае достаточно положить

$y=-z$, а в третьем случае достаточно ввести новую функцию $\varphi(x)=f(x)-c$.

9.20. Метод дополнительных построений. Очевидно, что он используется в геометрии весьма широко.

9.21. Метод включения изучаемых элементов в равные треугольники в качестве соответственных элементов.

9.22. Метод от противного и метод разбора случаев – это универсальные общематематические методы. Метод равносильных переходов, метод тождественных преобразований, метод замены переменных – это методы достаточно большой общности, применяемые в алгебре. Метод дополнительных построений, метод включения элементов в равные треугольники – это методы различной общности, применяемые в геометрии. *Указание* на метод доказательства, *предшествующее* самому доказательству, выполняет ряд функций: во-первых, и это тривиально, такое указание знакомит со способом доказательства конкретной теоремы; во-вторых, оно способствует усвоению данного доказательства; в-третьих, и это главное, оно является частью длительного процесса *накопления методов доказательства*, которое придает множеству математических теорем свойство *системности*. В частности, целесообразно группировать теоремы по методам их доказательства.

9.23. Составление плана доказательства теоремы способствует его усвоению, а также служит тренировкой на применение ранее изученных теорем. К нему можно прибегать на разных стадиях изучения теоремы. Например, если изучается аналитическое доказательство, то план его фактически создается в процессе доказательства. Если изучается синтетическое доказательство, особенно если оно велико по объему, то по его завершении целесообразно составить план, который служит выявлению *структуры* доказательства и способствует процессу его запоминания

9.24. Перечисление используемых при доказательстве теоремы математических фактов способствует его усвоению, а также служит тренировкой на применение ранее изученных теорем. 6) Теорема о пределе суммы двух последовательностей. 7) Вторая теорема Вейерштрасса и теорема Ферма. 8) Теоремы о непрерывности и дифференцируемости линейной функции, функции-константы, суммы непрерывных функций, теорема Ролля.

9.26. «Привязка» каждого из условий к месту доказательства теоремы способствует усвоению доказательства, а также служит тренировкой на применение ранее изученных теорем.

9.27. Выявление логической структуры доказательства теоремы способствует усвоению доказательства теоремы, в частности, запоминанию доказательства. Кроме того, изучение логической структуры доказательства является упражнением на применение ранее изученных понятий и теорем.

9.30. График функции $y=\log_a x$ преобразуется в график функции $y=\log_b x$ путем растяжения в $\log_b a$ раз вдоль оси ординат.

9.31. Сумма биномиальных коэффициентов равна ...

9.32. Поскольку производная всюду равна нулю, формула Лагранжа принимает вид $f(x) = f(a) = const$. Наши рассуждения приводят ко критерию постоянства функции на отрезке.

9.33. Мы приходим к достаточному условию возрастания функции на отрезке $[a,b]$.

9.34. Во-первых, осуществляется тренировка в применении изучаемых теорем. Во-вторых, возникает мотив к изучению новых теорем. В-третьих, и это главное, в процессе преподавания моделируется процесс создания математики как науки.

9.35. Этап систематизации группы теорем, этап применения теоремы.

9.36. Приведем один неочевидный фрагмент схемы взаимной зависимости теорем:

$$\sin(x+y) = \cdots \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \sin(x+\pi) = -\sin x \end{cases} \Rightarrow \cos(x+y) = \cdots$$

Таким образом, из теоремы сложения для синуса следуют две из многочисленных формул приведения, а из них следует теорема сложения для косинуса. Далее можно работать так, как предложено в учебниках.

9.37. Условимся о том, что важными считаются те теоремы, которые имеют большое количество следствий. В этом случае теоремы Архимеда и Кантора следует отнести к числу наиболее важных. Отметим, что данный ответ носит условный характер, причем даже в том случае, если мы согласимся с вышеописанным понятием важности теоремы. Действительно, мы не рассматривали дальнейшие следствия из теорем.

9.38. На роль самых важных теорем претендуют две теоремы – Ролля и Лагранжа.

10. Задача и ее окрестность

10.1. 1) Первая задача решается прямой проверкой. 2) Вторая задача является *обобщением* первой и может быть решена двумя методами: а) методом математической индукции, где базой индукции является утверждение первой задачи; б) на основе теоремы Безу. 3) Третья задача является *конкретизацией* второй задачи: достаточно положить $a=1$, $x=25$ и заменить n на $2n+1$. Такую конкретизацию можно считать решением третьей задачи. Кроме того, она может быть решена независимо от предыдущей задачи методом математической индукции. Другими делителями всех чисел p_n являются 2 и 26.

10.2. Учителю известна теорема Безу и одно из ее следствий: при любом n многочлен $x^n - a^n$ делится на двучлен $x-a$. Этот факт можно *конкретизировать* разными способами. Во-первых, можно взять $n=4$ и получить формулу $(x^4 - a^4) = (x-a)(x^3 + x^2a + xa^2 + a^3)$, которая дополняет список формул сокращенного умножения. Во-вторых, можно взять $a=2$ и получить утверждение о том, что при любом n многочлен $x^n - 2^n$ делится на двучлен $x-2$. В последнем утверждении можно взять $x=5$ и получить утверждение о том, что при любом

n число $5^n - 2^n$ делится на 3. В тот период времени, когда школьникам неизвестна теорема Безу, вполне естественно предложить им следующие задачи. **1°.** Известно, что $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$ и $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$. Получите аналогичные формулы для $x^4 - a^4$ и $x^5 - a^5$. Отметим, что если первую формулу можно вывести «кустарным» способом, то для получения второй придется делить многочлен на многочлен – прекрасный повод ввести эту операцию. **2°.** Докажите, что для любого n многочлен $x^n - 2^n$ делится на двучлен $x-2$. Здесь придется использовать один из *трех* методов решения: либо теорему Безу, либо математическую индукцию, либо алгоритм деления многочленов в столбик. Сопоставление различных методов решения всегда представляет самостоятельный интерес. Кстати, для данной задачи применение метода математической индукции не столь уж просто и требует некоторого неочевидного вспомогательного преобразования. **3°.** Докажите, что при любом n числа вида $p_n = 5^n - 2^n$ делятся на 3. Рекомендуем провести доказательство методом математической индукции.

10.3. Первая задача представляет собой *обобщение* стандартного правила дифференцирования. Для решения второй и третьей задач нужно использовать три разнохарактерные *конкретизации* формулы Лейбница. 1) Решение первой задачи не приводим. 2) Положим $v = x^2$ и $u = \cos x$. Учитывая, что $u^{(k)} = \cos\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, получаем

$$(uv)^{(50)} = x^2\cdot\cos\left(x + 50\cdot\frac{\pi}{2}\right) +$$
$$+50\cdot 2x\cdot\cos\left(x+49\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{50!}{2!\cdot 48!}\cdot 2\cdot\cos\left(x+48\cdot\frac{\pi}{2}\right) = (2450 - x^2)\cos x - 100x\cdot\sin x$$

. 3а) Положив в формуле Лейбница $u = v = e^x$, получим требуемое равенство. 3б) Положив в формуле Лейбница $u = e^x$ и $v = e^{-x}$, получим требуемое равенство.

10.4. Задача 2 *обобщает* задачу 1, поскольку наличие равенства не зависит от того, где пересекаются хорды, внутри или вне круга. Задача 3 *обобщает* задачи 1 и 2, поскольку снято ограничение на то, что четыре исходные точки различны. Условие таково, что две из них (но не более двух!) могут совпадать. Правда, в случае совпадения двух исходных точек равенство оказывается бесполезным, так как в каждой части равенства один из сомножителей равен нулю. Задача 4 *конкретизирует* задачу 2, поскольку касательная к окружности может трактоваться как *предельное положение* одной из двух секущих. Задача 5 еще больше *конкретизирует* задачу 2, поскольку теперь уже обе секущие принимают свое предельное положение. Наконец, задача 6 является *следствием* задачи 4; можно доказать, что построенный треугольник является прямоугольным. Докажите это.

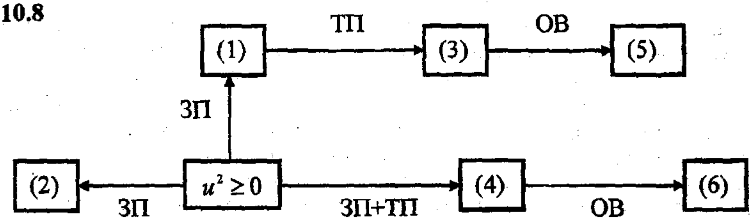
10.5. Квадрат вещественного числа неотрицателен.

10.6. Метод замены переменных (неравенства ПН и (1)) и метод тождественных преобразований.

10.7. 1) $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \le \sqrt{\dfrac{b^2+b^2}{2}} = b = \max\{a,b\}$.

2) $\dfrac{2ab}{a+b}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}\geq\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}}=a=\min\{a,b\}$.

10.8



ЗП – замена переменных; ТП – тождественные преобразования; ОВ – оценка выражений.

Рис. 13

10.9. l_2, l_3, l_1, l_4, поскольку длины отрезков таковы:

Отрезок	l_1	l_2	l_3	l_4
Длина	$(a+b)/2$	$2ab/(a+b)$	$\sqrt{ab}$	$\sqrt{(a^2+b^2)/2}$

10.10. Если длины всех отрезков различны, то $ABCD$ – трапеция. Если длины двух *любых* отрезков совпадают, то четырехугольник является параллелограммом, то есть длины *всех* четырех отрезков совпадают.

10.12. Искомая таблица имеет вид

	$f(x)$	x_0	y_0	$f'(x_0)$
1	+	+	?	?
2	+	?	+	?
3	+	?	?	±
4	?	+	+	±

Знак ± в некоторых клетках таблицы показывает, что, хотя информация о соответствующем элементе формулы содержится в условии задачи, она представлена в косвенной, завуалированной форме, из которой ее следует извлечь. В каждом из четырех случаев мы видим, что часть элементов формулы известна непосредственно из условия задачи, а часть предстоит найти. При переходе от строки к строке неизвестные *перемещаются* на другие места, образно говоря, дрейфуют. Данная группа задач была составлена именно этим методом – перемещением неизвестных на различные места. Дадим этому методу условное название, которое не является общепринятым, – «дрейф неизвестного».

10.13. Последовательно сделаем неизвестными в данной формуле каждое из оснований степени и каждый из показателей степени. В одних случаях будем читать формулу «слева направо», а в других – «справа налево». Таким образом, естественно включить в систему упражнений 12 элементов и сформулировать задание следующим образом: «Вставьте в квадратик такое число, которое сделает данную формулу верной: 1) $2^3\cdot 2^4=2^{\square}$; 2) $2^3\cdot 2^4=\square^7$; 3) $2^{\square}\cdot 2^4=2^7$;

4) $2^3\cdot 2^{\square}=2^7$; 5) $\square^3\cdot 2^4=2^7$; 6) $2^3\cdot\square^4=2^7$; 7) $3^{\square}=3^2\cdot 3^6$; 8) $\square^8=3^2\cdot 3^6$; 9) $3^8=3^{\square}\cdot 3^6$; 10) $3^8=3^2\cdot 3^{\square}$; 11) $3^8=\square^2\cdot 3^6$; 12) $3^8=3^2\cdot\square^6$». В первых шести упражнениях данной серии в основании степени стоит одно и то же число 2, а в последних шести заданиях – число 3. Можно несколько усложнить эту серию, если в разных упражнениях выбирать разные основания. Можно сделать ее «совсем сложной», если менять и основания, и показатели степеней.

10.14. 2) Разобьем слагаемые на две группы следующим образом: в одну группу включим первые два слагаемые, а в другую – все остальные. Из второй группы вынесем общий множитель $2^2/2!=2$. Получим, что $S_n=3+2\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3\cdot 4}+\dots+\frac{2^{n-2}}{3\cdot 4\cdots n}\right)$. В знаменателях дробей заменим каждый из множителей на наименьший из них, а именно на 3. Получим первую оценку: $S_n<3+2\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)$. В скобках стоит сумма *конечного* числа членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем $2/3$. Заменив ее суммой *бесконечной* прогрессии и найдя ее, получим окончательную оценку $S_n<3+2\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\right)=3+2\cdot\frac{1}{1-2/3}=9$. 3) Решается тем же методом, с той разницей, что от исходной суммы отделяются первые три слагаемые. Ответ: $S_n<26{,}5$. 4) $S_n<77$.

10.15. 1) При решении задачи 10.14(4) получена оценка $S_n<77$. 2) Последовательность S_n возрастает, следовательно, она сходится в силу теоремы Вейерштрасса. 3) Последовательность S_n является последовательностью частичных сумм для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$, следовательно, ряд сходится в силу определения. При этом автоматически получается оценка $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}\le 77$. 4) Выражение $\frac{4^n}{n!}$ является общим членом сходящегося ряда, следовательно, стремится к нулю. Получается, что выражение $n!$ растет быстрее, чем показательная функция 4^n. а) Итак, данная серия задач углубленно изучает ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{n!}$ и его общий член $\frac{4^n}{n!}$. б) Процесс решения выявил тесную взаимосвязь между теоремой Вейерштрасса, определением сходимости ряда, сравнением скоростей роста функций. в) Обычно сходимость ряда из задачи 3) доказывается с помощью признака Даламбера. В данном случае это удалось сделать *менее сильными* средствами, а именно, на основе определения. При этом получена достаточно неожиданная оценка суммы ряда.

10.16. 1) Первый замечательный предел. 2) Цепочка эквивалентных бесконечно малых. 3) Бесконечно малая более высокого порядка, следствия из теоремы о пределе частного, непрерывность синуса, метод следствий с последующей проверкой, формулы приведения или правила Лопиталя (задача 5°). При выполнении поисковой части задачи 5° вам может потребоваться геометрический образ – построение на одном чертеже синусоиды и графика линейной функции. 4) Весьма активно. Можно даже утверждать, что осуществляется обобщающее повторение. 5) Да. 6) Методом дрейфа неизвестного. 7) Да, это задачи 2°-4°. 8) Да. Самостоятельно или с минимальной помощью преподавателя формулируются задачи 3° и 4°. 9) Да, задачи 2° и 3° аналогичны друг другу. 10) Да, задача 4° обобщает задачу 3°, а задача 6° обобщает задачи 3°-5° сразу по нескольким признакам. 11) Да, задания 2°-4° - это задания на конструирование функций. 12) Да, задания 2° и 3° в определенном смысле обратны к заданию 1, поскольку в одном случае ищется значение предела, а в другом случае ищется выражение под знаком предела. 13) Весьма хорошо, и ответы на вопросы 8-12 убеждают в этом.

11. Визуализация

11.2. 1) Точки на координатной плоскости pOq, лежащие ниже параболы, заданной уравнением $q = p^2/4$. 2) Точки на этой параболе. 3) Точки, лежащие ниже этой параболы.

11.3. Известно следующее: 1) $D > 0$ тогда и только тогда, когда уравнение имеет один вещественный корень и два комплексно-сопряженных корня; 2) $D < 0$ тогда и только тогда, когда уравнение имеет три различных вещественных корня; 3) $D = 0$ и $(p,q) \neq (0,0)$ тогда и только тогда, когда уравнение имеет два вещественных корня: один однократный, а другой двукратный; 4) $p = q = 0$ тогда и только тогда, когда уравнение имеет один трехкратный вещественный корень. (См. учебник Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., 1962. – Гл. 9.) Осталось построить кривую с уравнением $(p/3)^3 + (q/2)^2 = 0$ и выделить те области на координатной плоскости pOq, которые соответствуют знакам дискриминанта.

11.4. Первая из этих функций монотонно возрастает, но в отличие от других функций ограничена сверху. Остальные стремятся к $+\infty$ при росте аргумента. При этом каждая из функций $f_2 - f_5$ растет быстрее предыдущей при стремлении аргумента к $+\infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)} = +\infty$, где $i = 2$, 3, 4. Последняя функция отличается от предыдущих функций тем, что для «ухода на бесконечность» достаточно *ограниченного* изменения аргумента.

11.5. Например, $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$; $f_2(x) = \lg(1/x)$; $f_3(x) = -\sqrt{x}$; $f_4(x) = -x^2$; $f_5(x) = -2^x$; $f_6(x) = \lg(-x)$, где $x \in [-1,0)$.

11.7. Для построения требуемых функций используем несколько вспомогательных функций: линейную, квадратичную, модуль, функцию Дирихле, функцию Δ, заданную равенством $\Delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$, а также функцию sgn, заданную равенством $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$. В нижеследующей таблице рассмотрены 13 функций и их свойства в окрестности точки локального минимума $x_0=0$. Наличие непрерывности, односторонней непрерывности и дифференцируемости отмечено знаком +. В столбце, описывающем монотонность, точка означает точку экстремума, а стрелки вниз и вверх – убывание и возрастание соответственно в левой и правой полуокрестностях точки локального минимума. Так, для функции № 6 мы видим, что она возрастает в левой полуокрестности экстремальной точки, имеет локальный минимум, возрастает в правой полуокрестности экстремальной точки. При этом она односторонне непрерывна, разрывна и, как следствие, не дифференцируема. Постройте эскизы графиков этих функций.

«Экзотические» экстремумы

№	Функция	Монотонность	Непрерывность	Односторонняя непрерывность	Дифференцируемость
1	x^2	$\downarrow.\uparrow$	+	+	+
2	$\|x\|$	$\downarrow.\uparrow$	+	+	
3	$x^2+\operatorname{sgn}(x)-\Delta(x)$	$\downarrow.\uparrow$		+	
4	$x^2-\Delta(x)$	$\downarrow.\uparrow$			
5	$-x^2-\Delta(x)$	$\uparrow.\downarrow$			
6	$\{x\}$	$\uparrow.\uparrow$		+	
7	$x-\Delta(x)$	$\uparrow.\uparrow$			
8	$\{-x\}$	$\downarrow.\downarrow$		+	
9	$-x-\Delta(x)$	$\downarrow.\downarrow$			
10	$x^2(d(x)+1)$	Немонотонна	+	+	+
11	$\|x\|(d(x)+1)$	Немонотонна	+	+	
12	$x^2(d(x)+1)+\operatorname{sgn}(x)-\Delta(x)$	Немонотонна		+	
13	$d(x)-2\Delta(x)$	Немонотонна			

Например, если к функции № 11 применить определение функции Дирихле, то ее можно задать следующим образом: $f_{11}(x)=|x|(d(x)+1)=\begin{cases}2|x|, & x\in\mathbf{Q}\\ |x|, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$. В силу этого е график будет выглядеть так, как показано на рис. 14.

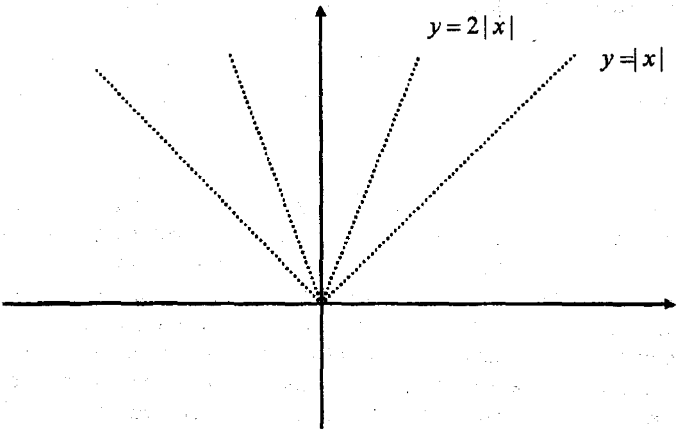


Рис. 14

11.8. Различные участки синусоиды дают все необходимые примеры, что и отражено в следующей таблице.

Промежутки выпуклости синусоиды

Выпуклость вниз			Выпуклость вверх		
Убывание	Возрастание	Экстремум	Убывание	Возрастание	Экстремум
$[-\pi,-\pi/2]$	$[-\pi/2,0]$	$[-\pi,0]$	$[\pi/2,\pi]$	$[0,\pi/2]$	$[0,\pi]$

Постройте график и решите ту же задачу с помощью других функций.

11.9. В нижеследующей таблице приведены примеры функций, имеющих в качестве точки перегиба начало координат. В свободном столбце таблицы нарисуйте эскизы их графиков, а также прямую, через которую «перегибается» график функции. Настоятельно рекомендуем решить задачу с помощью других функций.

Виды точек перегиба

Прямая	**Направление выпуклости**	**Пример**	**Картинка**
Горизонтальная	Вып. вверх → вып. вниз	$y=x^3$	
	Вып. вниз → вып. вверх	$y=-x^3$	
Вертикальная	Вып. вверх → вып. вниз	$y=-\sqrt[3]{x}$	
	Вып. вниз → вып. вверх	$y=\sqrt[3]{x}$	
Наклонная, $k>0$	Вып. вверх → вып. вниз	$y=\operatorname{tg}x$	
	Вып. вниз → вып. вверх	$y=\sin x$	
Наклонная, $k<0$	Вып. вверх → вып. вниз	$y=-\operatorname{tg}x$	
	Вып. вниз → вып. вверх	$y=-\sin x$	

11.10. Для первых трех заданий ответы содержатся во всех учебниках математического анализа. 1) Касательная к графику в точке экстремума горизонтальна. 2) На графике существует точка, в которой касательная к графику горизонтальна. 3) На графике существует точка, в которой касательная к графику параллельна хорде, соединяющей концы графика. 4) Ответ на четвертое задание менее известен, поэтому приведем полное решение. На координатной плоскости vOu построим параметрически заданную кривую $\begin{cases} v = g(x) \\ u = f(x) \end{cases}$, где аргумент x трактуется как параметр, принадлежащий отрезку $[a,b]$. При этих обозначениях кривая имеет начальную точку $P(v(a),u(a))$ и конечную точку $Q(v(b),u(b))$. Формулу Коши $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$) можно переписать в виде $\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = \frac{u'(c)}{v'(c)} = u'(v_0)$, где $v_0 = g(c)$. Равенство $\frac{u'(c)}{v'(c)} = u'(v_0)$ получено на основании теоремы о производной функции, заданной параметрически. В левой части нашей окончательной формулы $\frac{u(b)-u(a)}{v(b)-v(a)} = u'(v_0)$ стоит угловой коэффициент отрезка PQ, а в правой части – угловой коэффициент касательной к кривой. Таким образом, геометрический смысл теоремы Коши и визуализация соответствующей формулы те же самые, что и у теоремы Лагранжа: существует точка на графике, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей концы графика.

11.11. Площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника со сторонами $b-a$ и $f(c)$, где c – некоторая точка из интервала $[a,b]$.

11.12. 2) $)x,y)\in[1,2)\times(3,5] \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[1,2) \\ y\in(3,5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le x<2 \\ 3<y\le 5 \end{cases}$. Таким образом, искомое множество изображается в виде прямоугольника на координатной плоскости xOy, не включающего в себя нижнюю горизонтальную и правую вертикальную стороны и включающего в себя две остальные стороны. Обдумайте, какие вершины включаются в искомое множество, а какие нет. 3) Решается аналогично. 4) Все горизонтальные прямые, проходящие через точки с целочисленными координатами на оси Oy. 5) Все вертикальные прямые, проходящие через точки с целочисленными координатами на оси Ox. 6) Целочисленная решетка. 7) Если множество S изобразить на комплексной плоскости, то получится окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Ее можно вложить в трехмерное пространство в виде окружности на координатной плоскости xOy, заданной уравнением $x^2+y^2=1$. Множество вещественных чисел можно представить себе в виде прямой, параллельной оси Oz. Окончательно получим, что декартово произведение $\mathbf{R}\times S$ представляет собой цилиндриче-

скую поверхность: над каждой точкой направляющей S «растет» образующая R. Можно привести другое, чисто аналитическое, решение этой задачи. 8) Тор. 9) Полный цилиндр, то есть цилиндрическая поверхность вместе с ее внутренностью. 10) Полноторие.

11.13.

1)

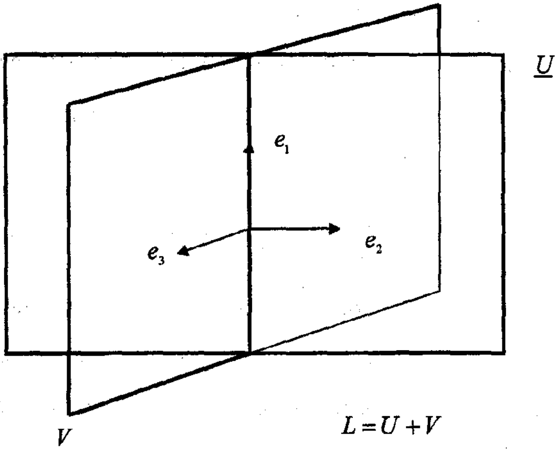


Рис. 15

2)

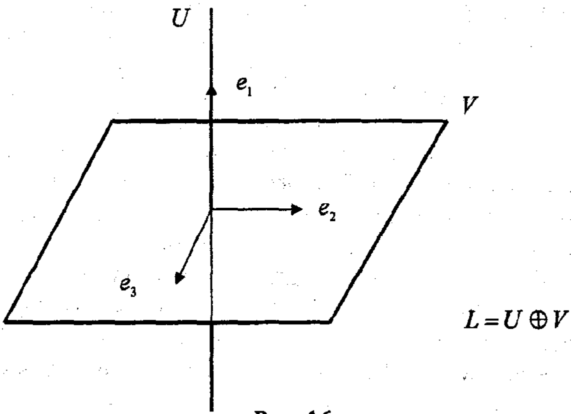


Рис. 16

11.14. Искомая картинка получается из соотношения $y \in M \Leftrightarrow (\exists x \in V) y = a + x$, которое можно трактовать как формулу параллельного переноса направляющего пространства на вектор a.

11.15. Все задания решаются единообразно, поскольку каждое геометрическое свойство характеризуется теми или иными ограничениями на параметры a и b, задающие аффинное преобразование. 1), 2) Аффинное преобразование сохраняет ориентацию прямой тогда и только тогда, когда $a>0$. 3) Аффинное преобразование является движением тогда и только тогда, когда $a=1$ или $a=-1$. 4), 5) Движением первого/второго рода называется такое движение, которое сохраняет/меняет ориентацию прямой. 6) Аффинное преобразование является параллельным переносом тогда и только тогда, когда $a=1$. 7) Точка x_0 называется неподвижной, если она обладает свойством $f(x_0)=x_0$, откуда следует, что $ax_0+b=x_0$ и $(a-1)x_0=-b$. Рассмотрите теперь два случая: $x_0=0$ и $x_0\neq 0$. 8) Если аффинное преобразование прямой имеет две неподвижные точки, то оно является тождественным преобразованием (докажите). 9) Решается на основании пунктов 7 и 8.

11.16. Пусть углы треугольника удовлетворяют неравенствам $\alpha\le\beta\le\gamma$. В этом случае упорядоченная тройка чисел (α,β,γ) однозначно определяет класс подобных треугольников. Очевидно, что углы удовлетворяют системе ограничений $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=\pi\\ 0<\alpha,\beta,\gamma<\pi\end{cases}$. Она означает, что точка пространства с координатами (α,β,γ) находится на основании трехмерного симплекса. Неравенства $\alpha\le\beta\le\gamma$ означают, что они заполняют на этом основании треугольник, ограниченный отрезками двух его медиан и стороной. При этом отрезки медиан входят в искомое множество, а отрезок стороны треугольника – нет. Итак, множество классов подобных треугольников находится во взаимно-однозначном соответствии с точками треугольника ABM на рис. 17.

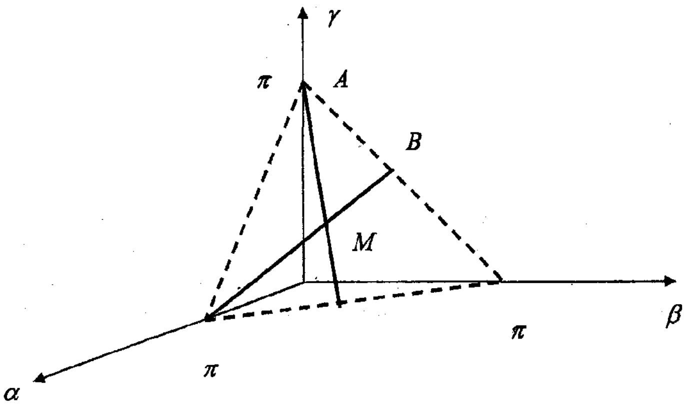


Рис. 17

вписанной окружности. в) Если расстояние меньше радиуса вписанной окружности, но больше нуля, то к фигуре из пункта а) добавляется треугольник, лежащий внутри исходного треугольника. г) Если расстояние равно нулю, то класс есть фигура F. Детали уточните самостоятельно.

11.17. В силу неравенства треугольника $y < x+1$. Система неравенств $\begin{cases} 1 \le x \le y \\ y < x+1 \end{cases}$ имеет равносильную форму $\begin{cases} x \ge 1 \\ x \le y < x+1 \end{cases}$. Соответствующее множество точек на координатной плоскости xOy представляет собой наклонную полосу. Итак, множество классов конгруэнтных треугольников с наименьшей стороной 1 находится во взаимно однозначном соответствии с точками полосы.

11.19. 1) Окружность или фигура F (точка). 2) Пара параллельных прямых или фигура F (прямая). 3) Объединение двух параллельных лучей и полуокружности или фигура F (луч). 4) Объединение двух отрезков и двух полуокружностей или фигура F (отрезок). 5) а) Если расстояние от точки до фигуры больше радиуса вписанной окружности, то класс есть объединение трех отрезков и трех дуг окружностей. б) Если расстояние равно радиусу вписанной окружности, то к фигуре из пункта а) добавляется точка, являющаяся центром вписанной окружности. 3) Если расстояние еще меньше, решите задачу самостоятельно.

11.20. 1) Пусть множество A состоит из трех элементов, а множество B из двух элементов. Если на прямой отметить элементы множества А кружочками, а элементы множества В черточками, то очевидно, что выбрать элемент из множества А или из множества B можно пятью способами, как это показано на рис. 18.

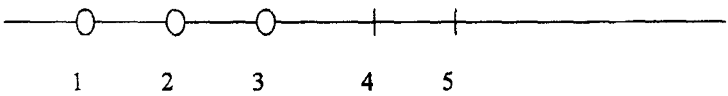


Рис. 18

2) Элементы множества A отметим на оси Ox, а элементы множества B – на оси Oy. Очевидно, что выбор пары (a,b), где $a \in A$ и $b \in B$, можно сделать шестью способами, которые соответствуют точкам пересечения вертикальных и горизонтальных прямых, проведенных через отмеченные точки, как это сделано на рис. 19. Визуализацию с помощью графов сделайте самостоятельно.

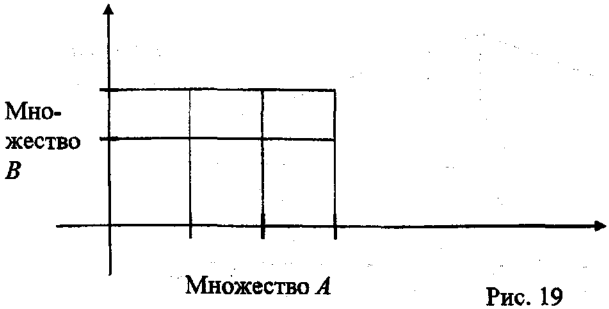


Рис. 19

11.21.

1)

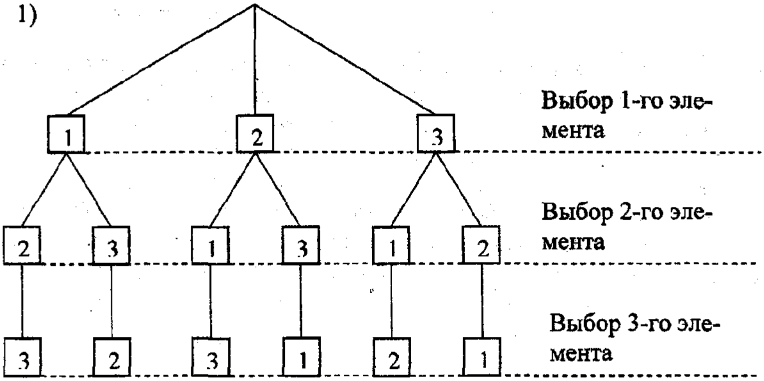


Рис. 20

4)

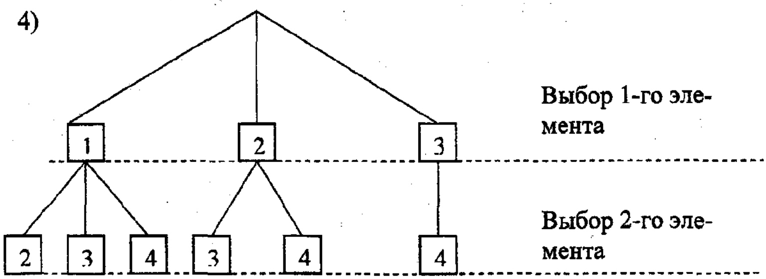


Рис. 21

5)

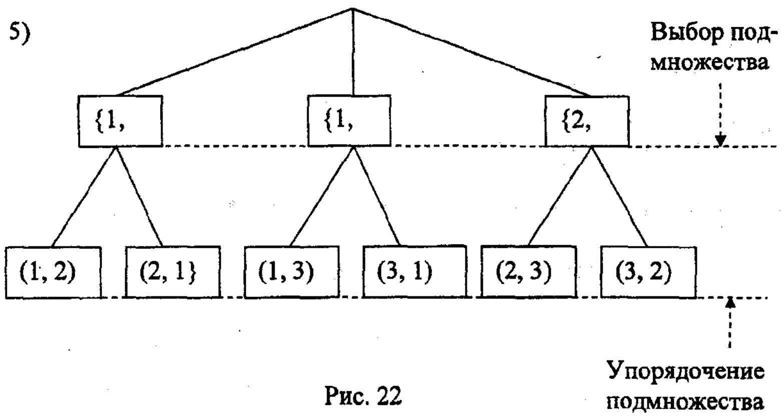
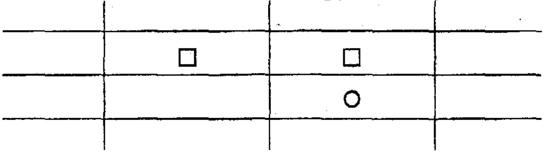


Рис. 22

11.22. Поскольку в формуле числа сочетаний $n \geq k$, то заполнять следует только те клетки, которые лежат на диагонали или ниже нее. При этом граничные условия позволяют заполнить первый столбец и диагональ таблицы, так что нулевая и первая строки сразу оказываются заполненными. Рекуррентное соотношение показывает, как надо заполнять строку, если предыдущая строка уже заполнена: над двумя последовательными числами заполненной строки (отмечены квадратиками) проделывается арифметическая операция (в нашем случае сложение) и результат помещается в следующую строку *ниже правого* из двух последовательных чисел (отмечено кружочком):



В результате получается треугольник Паскаля:

k / n	0	1	2	3	6	5	6	...
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
...								

Данный метод решения применяется при работе с другими числами, встречающимися в комбинаторике: числами Стирлинга и Эйлера.

11.23. Треугольник Стирлинга для числа подмножеств:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**6**	**5**	**6**	**...**
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
...								

11.24. Еще один треугольник Стирлинга:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**3**	**6**	**5**	**6**	**...**
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	2	3	1				
4	0	6	11	6	1			
5	0	24	50	35	10	1		
6	0	120	274	225	85	15	1	
...								

11.25. Треугольник Эйлера:

n \ k	**0**	**1**	**2**	**.3**	**6**	**5**	**6**	**...**
0	1							
1	1	0						
2	1	1	0					
3	1	4	1	0				
4	1	11	11	1	0			
5	1	26	66	26	1	0		
6	1	57	302	302	57	1	0	
...								

11.26. Смотри рис. 19-21.

1)

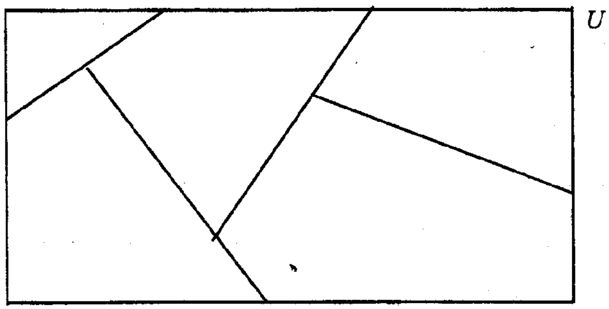


Рис. 23

Событие: капля дождя падает на сектор газона.
Полная группа событий: капля дождя падает на один из секторов газона.

2)

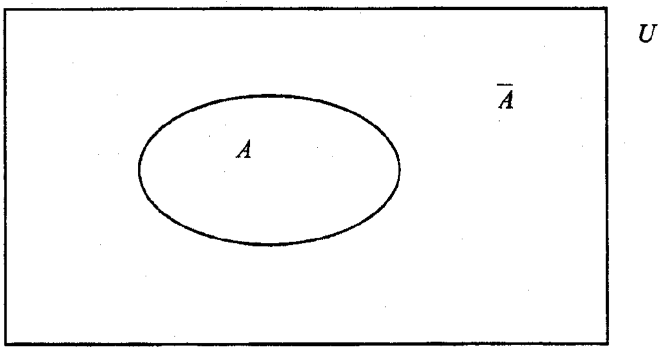


Рис. 24

3)

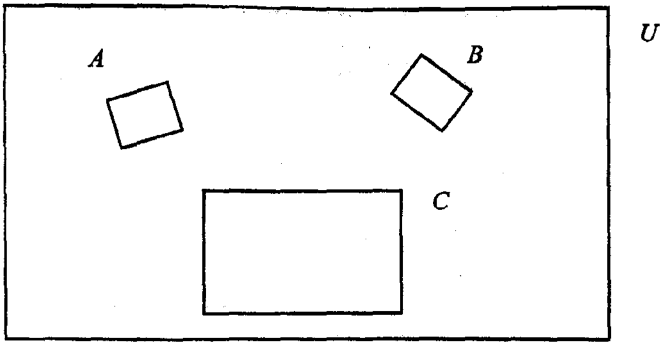


Рис. 25

События A и B равновероятны. Событие C более вероятно, чем событие A.

11.27.

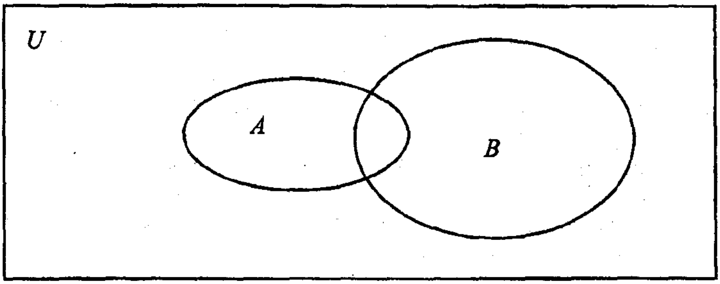
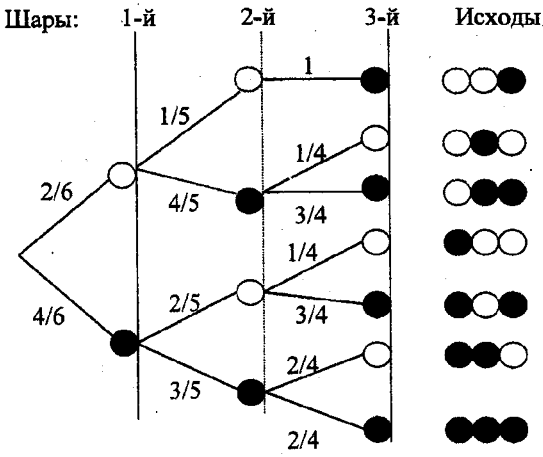


Рис. 26

$$P(A)=\frac{S_A}{S_U},\quad P_A(B)=\frac{S_{A\cap B}}{S_A}$$

11.28. 1) См. рис. 27.



Запишите вероятности нужных исходов.

Рис. 30

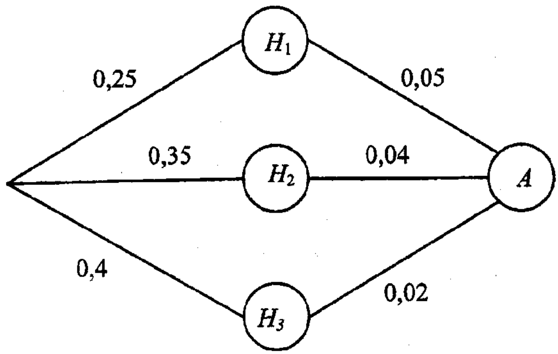


Рис. 31