Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ярославский государственный педагогический университет
имени К. Д. Ушинского»

*60-летию
кафедры теории и
методики обучения математике
посвящается*

Вопросы методики обучения математике в средней школе

(Выпуск 2)

Ярославль
2009

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Рецензенты:
Е. И. Смирнов, доктор педагогических наук, профессор; Р. Г. Голубева, заслуженный учитель РФ, учитель-методист школы № 76 г. Ярославля

В 74 Вопросы методики обучения математике в средней школе [Текст]: методическое пособие / отв. ред. Н. М. Епифанова, Т. Н. Карпова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 177 с.

Настоящий сборник предназначен для студентов физико-математического факультета и учителей математики средних школ.

Коллектив авторов: Г. Ю. Буракова
Т. Н. Карпова
Т. М. Корикова
С. В. Латынова
Н. А. Меньшикова
И. Н. Мурина
Н. В. Потехин
И. В. Суслова
И. В. Чуй
Е. Ю. Шарунова
А. В. Ястребов

Ответственные редакторы: Н. М. Епифанова, Т. Н. Карпова

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-87555-536-0

УДК 372.851
ББК 74.262.21

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Рецензенты:
Е. И. Смирнов, доктор педагогических наук, профессор; Р. Г. Голубева, заслуженный учитель РФ, учитель-методист школы № 76 г. Ярославля

Вопросы методики обучения математике в средней школе [Текст]: методическое пособие / отв. ред. Н. М. Епифанова, Т. Н. Карпова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 177 с.

Настоящий сборник предназначен для студентов физико-математического факультета и учителей математики средних школ.

Коллектив авторов: Г. Ю. Буракова
Т. Н. Карпова
Т. М. Корикова
С. В. Латынова
Н. А. Меньшикова
И. Н. Мурина
Н. В. Потехин
И. В. Суслова
И. В. Чуй
Е. Ю. Шарунова
А. В. Ястребов

Ответственные редакторы: Н. М. Епифанова, Т. Н. Карпова

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-87555-536-0

А. В. Ястребов

Роль модельных примеров в преподавании теории вероятностей

В статье иллюстрируется одна простая, но важная для практического преподавания мысль: тщательная проработка некоторых основных, базовых, модельных примеров, включающая неоднократное обращение к ним, может дать весьма много для освоения большого раздела математики. Иллюстрация проводится на материале теории вероятностей и касается четырех вопросов: первоначального введения понятий, алгебры событий, визуализации понятий теории вероятностей, методов доказательства некоторых теорем теории вероятностей.

1. Первоначальное введение терминологии и классическое определение вероятности

Человек, приступающий к ознакомлению с новой для себя областью знания, вольно или невольно усваивает большое количество терминов. Это в полной мере относится и к учащемуся, приступающему к изучению теории вероятностей. Учитель может облегчить для него этот процесс, если будет систематически использовать те выражения бытового русского языка, которые перешли в математику и приобрели там статус точных терминов. Так, превращение свинца в золото *невозможно* (вспомните историческое заблуждение!). Падение астероида на Землю *мало вероятно*, хотя такие случаи имели место. Мы *достоверно* знаем, что день сменяется ночью. Хороший урожай яблок в этом году – *событие случайное*, так как урожай может быть и хорошим, и плохим. Данный список примеров выбран нарочито приземленным, однако выработка терминов в науке очень часто базируется именно на наглядных соображениях. Вот что пишет по этому поводу Р. Декарт: «Всякий раз, когда я хочу ввести новый специальный термин, я выбираю его из слов, находящихся в употреблении, и то из них, которое мне кажется самым подходящим, я всегда употребляю в установленном мной значении» [1, с. 134].

Опишем игру, в результате которой в обиходе учащегося появится целый список понятий теории вероятностей.

Игра. В закрытом пакете находятся 10 предметов, а именно: 5 мандаринов, 2 яблока, 2 конфеты и 1 лимон. Учитель предлагает учащимся *угадать*, какие предметы находятся в пакете, обещая затем реально извлечь эти предметы и показать классу. Два заранее вызванных помощника фиксируют на доске ответы.

Заметим, что хотя ситуация выглядит крайне неопределенной, из нее можно извлечь некоторую информацию. Действительно, 10 предметов небольшого объема позволяют сделать вывод, что в пакете находятся *маленькие предметы*. Можно показать сквозь пакет, что там находится нечто *круглое*. Наконец, утверждение о том, что в пакете находится нечто *съедобное*, является одной из двух естественных альтернатив и напоминает детскую игру.

Итак, учитель «для затравки» предлагает слово «съедобное», а затем учащиеся высказывают другие гипотезы. После нескольких гипотез начинается реальное извлечение предметов, результаты которого также фиксируются. В итоге на доске возникает какой-либо список предметов, например, такой: съедобное, несъедобное, фрукт, лимон, игрушка, цитрус, маленький предмет, мячик, конфета, яблоко, мандарин.

Заметим, что следует позаботиться о том, чтобы в списке слов появились такие, которые соответствуют и невозможным, и достоверным событиям. Это нетрудно сделать, потому что учитель является участником игры и наравне со всеми вносит свои предложения.

Теперь нужно *проанализировать* эту игру и *классифицировать* события, случившиеся в результате извлечения предметов, реального или гипотетического.

Классификация событий. Нетрудно заметить, что в нашем эксперименте некоторые события произойдут *обязательно*, например, извлечение съедобного предмета. Другие *не могут* произойти, например, извлечение игрушки. Третьи *случайны*, то есть могут произойти, а могут и не произойти, например, извлечение конфеты. Подчеркнув соответствующие слова разными способами, получим классифицированный список, который выглядит следующим образом: ***съедобное***, *несъедобное*, фрукт, лимон, *игрушка*, цитрус, конфета, *мячик*, яблоко, ***маленький предмет***, мандарин.

Очевидно, что жирным курсивом, курсивом и обычным шрифтом отмечены достоверное, невозможное и случайное события соответственно.

Теперь учащиеся психологически готовы к введению терминов и выявлению классификации событий.

Будем называть ***испытанием*** такое действие, которое осуществляется при выполнении совокупности некоторых условий. В нашей игре условиями являются закрытый пакет с определенным набором предметов в нем, а действием является извлечение предмета.

Будем называть ***исходами испытания*** те простейшие события, реальные или гипотетические, которые могут произойти в результате испытания. Они называются также ***элементарными событиями.*** В нашей игре имеется четыре реальных исхода испытания – извлечение мандарина, яблока, конфеты, лимона.

Будем называть ***событием, связанным с испытанием***, или просто ***событием***, исход испытания или какую-либо комбинацию исходов испытания. В нашей игре примерами событий являются извлечение цитруса (комбинация исходов мандарин – лимон), извлечение фрукта (комбинация исходов мандарин – лимон – яблоко), а также извлечение чего-либо съедобного.

Событие называется ***невозможным***, если оно не может произойти при данном испытании. В нашей игре примерами невозможных событий являются извлечение мячика или извлечение игрушки.

Событие называется ***достоверным***, если оно обязательно происходит при данном испытании. В нашей игре примерами достоверных событий являются извлечение маленького предмета и извлечение съедобного предмета.

Наконец, мы подходим к центральному определению. Событие называется ***случайным***, если при данном испытании оно может произойти или не произойти. В нашей игре можно извлечь лимон или нечто другое, следовательно, извлечение лимона является случайным событием. Аналогично, случайными событиями являются извлечение конфеты, яблока, фрукта и т. д.

Суммируем итоги наших рассуждений и фиксируем их в виде рис. 1. Мы видим, что события подразделяются на невозможные и возможные. Возможные, в свою очередь, подразделяются на достоверные и случайные. Именно случайные события будут предметом нашего дальнейшего изучения, поэтому на рис. 1 они выделены в рамку.

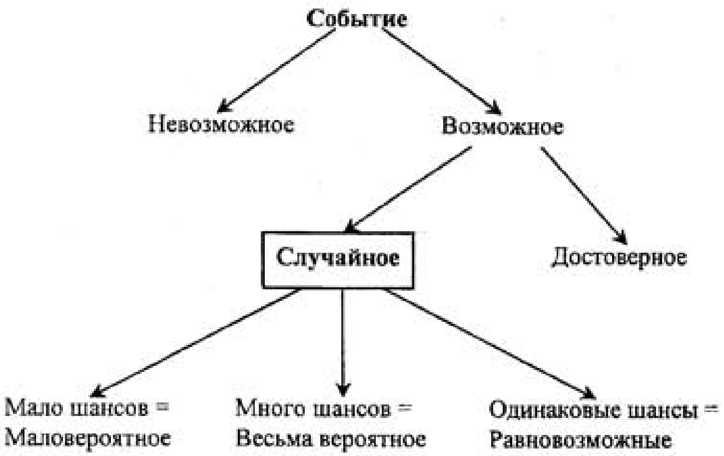


Рис. 1. Классификация событий

Заметим, что при работе в классе целесообразно предъявлять не сразу весь рис. 1, а заполнять его постепенно по мере накопления терминов. На данный момент можно заполнить пять верхних блоков и оставить место для трех нижних.

До сих пор мы проводили *качественный* анализ нашего испытания, не привлекая для анализа числа. Теперь проведем *количественный* анализ и выявим с его помощью *типологию шансов* наступления того или иного события.

Типология шансов. Рассмотрим и оценим шансы наступления некоторых событий, связанных с проведенным испытанием. Для этого заполним таблицу 1.

1. Естественно считать, что если событие не наступает никогда или происходит в 1–2 случаях из 10, то оно имеет *мало шансов* для реализации. Если же событие происходит в 8–9 случаях из 10 или же наступает обязательно, то оно имеет *много шансов* для реализации. Сделаем соответствующие записи в предпоследнем столбце таблицы. Мы видим, что ряд клеток столбца остались пустыми. Это означает, что оценить шансы с бытовых позиций затруднительно, или, другими словами, такая оценка зависит от важности события с точки зрения оценивающего. Действительно, вполне допустимо проиграть 5 из 10 партий в шахматы, или, что то же самое, проиграть одну партию из двух. Однако было бы со-

вершенно недопустимо, если бы одна болезнь из двух заканчивалась смертью больного.

2. Примем следующее соглашение. Если событие имеет мало шансов для реализации, то оно называется *маловероятным*. Если же событие имеет много шансов для реализации, то оно называется *весьма вероятным*. Занесем эти термины на рис. 1.

Оценка шансов — Таблица 1

№	Много ли шансов достать … ?	Шанс	Число	Оценка
1	лимон	1 шанс из 10	1/10	*Мало* шансов
2	конфету	2 шанса из 10	2/10	*Мало* шансов
3	яблоко	2 шанса из 10	2/10	*Мало* шансов
4	мандарин	5 шансов из 10	5/10	
5	цитрус	6 шансов из 10	6/10	
6	фрукт	8 шансов из 10	8/10	*Много* шансов
7	не мандарин	5 шансов из 10	5/10	
8	не яблоко	8 шансов из 10	8/10	*Много* шансов
9	не лимон	9 шансов из 10	9/10	*Много* шансов
10	не цитрус	4 шанса из 10	4/10	
11	съедобное	10 шансов из 10	10/10	*Много* шансов
12	несъедобное	0 шансов из 10	0/10	*Мало* шансов

3. Сравним два события: «извлечение лимона» и «извлечение мандарина». У какого события больше шансов для реализации? Из таблицы видно, что лимон извлекается в одном случае из 10 возможных, а мандарин – в пяти случаях из десяти. На русском языке это выражается двумя *равноправными* способами:

а) извлечение лимона ***менее вероятно, чем*** извлечение мандарина;

б) извлечение мандарина ***более вероятно, чем*** извлечение лимона.

4. Сравним два события: «извлечение конфеты» и «извлечение яблока». У какого события больше шансов для реализации? Из таблицы видно, что шансы этих событий равны, а именно 2 шанса из 10. Аналогично, шансы событий «извлечь фрукт» или «извлечь не яблоко» также равны, а именно 8 шансов из 10. Будем называть два события *равновозможными,* если они имеют равные шансы для реализации. Занесем этот термин на рис. 1. Теперь он полностью завершен.

Тренировка. После того, как первоначальные термины введены, целесообразно провести тренировку, которая должна быть достаточной для их полного усвоения. Содержание такой тренировки, ее характер и длительность зависят от тех педагогических условий, в которых работает конкретный учитель, так что их организация остается на усмотрение читателя.

Приведем примеры таких упражнений. Следует подчеркнуть, что мы отнюдь не считаем нижеследующие упражнения обязательными или достаточными для достижения наших целей.

1. В условиях вышеописанной игры вставьте слова «более вероятно, чем» или «менее вероятно, чем» вместо многоточия. а) Извлечение конфеты … извлечение мандарина. б) Извлечение мандарина … извлечение конфеты. в) Извлечение цитруса … извлечение лимона. г) Извлечение лимона … извлечение цитруса.

2. Испытанием является бросание игральной кости. Вот некоторые вопросы, которые можно поставить перед учащимися:

а) Перечислите возможные исходы испытания. Равновозможны ли они?

б) Назовите какие-либо события, связанные с испытанием, но не являющиеся его исходами.

в) Приведите *несколько* примеров достоверных событий.

г) Приведите *несколько* примеров невозможных событий.

д) Равновозможны ли два события: «выпадение простого числа» и «выпадение нечетного числа»?

е) Равновозможны ли два события: «выпадение делителя числа 6» и «выпадение делителя числа 4»? Если нет, то выразите этот факт двумя способами.

Очевидно, что даже простые испытания порождают большое количество вопросов, причем для данных примеров список возможных вопросов отнюдь не исчерпан. Одним из естественных способов тренировки школьников является постановка ими каких-либо собственных вопросов, задаваемых одноклассникам.

Точные определения. Теперь можно привести основное определение изучаемого раздела математики – классическое определение вероятности события.

Несколько исходов испытания образуют ***полную группу событий,*** если в результате испытания произошло хотя бы одно из них.

Если события из полной группы событий попарно несовместны, то в результате испытания появится *точно одно* из них.

Вероятностью события называется отношение числа исходов, благоприятствующих этому событию, к общему числу всех равновозможных, несовместных элементарных событий, образующих полную группу событий.

Педагогическая рефлексия. Анализируя извлечение предметов из пакета, мы естественным образом и в игровой форме ввели достаточно много терминов, а именно, *девять.* При этом мы психологически подготовили учащихся к восприятию определения вероятности события. По-видимому, одним из компонентов педагогического искусства является умение подобрать частный пример, на котором будут отчетливо видны все закономерности общего случая. Автор убежден, что подбор таких примеров возможен для многих или даже для большинства тем математики.

2. Алгебра событий

Теория вероятностей, как и любая другая математическая теория, имеет свои характерные, типичные задачи. *Первый тип упражнений – это задания на выявление различных событий, происходящих при испытании, и их простейшее подразделение на невозможные, достоверные и случайные.*

Задача 1. Бросается игральная кость. Назовите несколько событий, не менее 10, которые могут произойти в этом испытании.

Решение. Очевидно, что задача имеет много решений. Приведем некоторые из них, представляющиеся естественными с математической точки зрения.

1. Событие A_i = «выпадает число i», где $i = 1, 2, \dots, 6$.

2. Событие B = «выпадает натуральное число».

3. Событие C = «выпадает двузначное число».

4. Событие D = «выпадает четное число».

5. Событие E = «выпадает нечетное число».

6. Событие F = «выпадает простое число».

7. Событие G = «выпадает составное число».

8. Событие H = «выпадает число, не превосходящее 6».

9. Событие I = «выпадает число, не превосходящее 4».

10. Событие J = «выпадает дробное число».

Задача 2. Среди событий, перечисленных в решении задачи 1, укажите невозможные, достоверные и случайные.

Решение. Невозможными являются события C и J, достоверными – события B и H. Остальные события являются случайными.

Работая с парами событий, мы выясняем, являются ли два события совместными или несовместными, равновозможными или нет. Работая с группами событий, мы выясняем, полна или не полна указанная группа событий.

Задача 3. Из событий, перечисленных в решении задачи 1, образовано несколько групп. Для каждой из групп выясните, являются ли события совместными, равновозможными, образуют ли они полную группу событий.

1) D и E;
2) I и I;
3) F и G;
4) F и ${}_1A$;
5) I, A_4 и A_5;
6) G и E;
7) G, E и A_2;
8) D, F и ${}_1A$;
9) A_i, где $i = 1, 2, \ldots, 6$.

Решение. По мере решения постепенно заполните следующую таблицу.

№	События	Совместность	Равновозможность	Полная группа
1	D и E	Нет	Да	Да
2	I и $\bar{I}$	Нет	Нет	Да
3	F и G	Нет	Нет	Нет
4	F, G и ${}_1A$	Нет	Нет	Да
5	I, A_4 и A_5	Нет	Нет	Да
6	G и E	Нет	Нет	Нет
7	G, E и A_2	Нет	Нет	Да
8	D, F и ${}_1A$	Да	Нет	Да
9	A_i, где $i = 1, 2, \ldots, 6$	Нет	Да	Да

Напомним теперь определения операций над событиями. Событием, ***противоположным*** событию A, называется новое событие, которое обозначается как $\overline{A}$ и которое состоит в том, что событие A не наступает. ***Суммой*** событий A и B называется новое событие, которое обозначается как $A + B$ и состоит в том, что наступает событие A или событие B (союз «или» в данном случае имеет неразделительный смысл). ***Произведением*** событий A и B называется новое событие, которое обозначается как AB и состоит в том, что наступают *одновременно* события A и B. Геометрическая иллюстрация сформулированных понятий приведена в следующем разделе.

Работая с группами событий, мы выявляем те взаимосвязи между ними, которые выражаются в терминах операций над событиями: сложения, умножения и нахождения противоположного события.

Задача 4. Из событий, перечисленных в решении задачи 1, образовано несколько групп. Выразите одно из событий через остальные события группы, используя операции алгебры событий:

сумму, произведение, нахождение противоположного события. В заданиях, отмеченных звездочкой, приведите два решения.

1) $D,\ A_2,\ A_4,\ A_6$;	2)* $A_1,\ D,\ A_3,\ A_5$;	3) $A_1,\ A_3,\ E,\ A_5$;
4)* $A_2,\ A_4,\ A_6,\ E$;	5) $F,\ A_2,\ A_3,\ A_5$;	6)* $A_1,\ F,\ A_4,\ A_6$;
7) $G,\ A_4,\ A_6$;	8)* $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_5,\ G$;	9) $A_1,\ A_2,\ I,\ A_3,\ A_4$;
10)* $I,\ A_5,\ A_6$;	11) $J,\ D,\ E$;	12) $A_2+A_3,\ F,\ I$;
13)* $A_1,\ F,\ G$;	14) $D,\ F,\ A_2$;	15) $E,\ A_3,\ F,\ I$;
16) $I,\ G,\ A_4$;	17) $A_5,\ I,\ F$;	18) $A_6,\ G,\ I$.

Решение. Приведем решение задания 13. Известно, что число 1 не является ни простым, ни составным. На языке алгебры событий это означает, что при выпадении единицы наступает событие $\overline{F}$ (выпавшее число не является простым) *и* событие $\overline{G}$ (выпавшее число не является составным). На языке формул это означает, что $A_1=\overline{F}\cdot\overline{G}=\overline{F+G}$. Приведем ответы для остальных заданий.

$$1,2)\ D=A_2+A_4+A_6=\overline{A_1+A_3+A_5}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_5}.$$

$$3,4)\ E=A_1+A_3+A_5=\overline{A_2+A_4+A_6}=\overline{A_2}\cdot\overline{A_4}\cdot\overline{A_6}.$$

$$5,6)\ F=A_2+A_3+A_5=\overline{A_1+A_4+A_6}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_4}\cdot\overline{A_6}.$$

$$7,8)\ G=A_4+A_6=\overline{A_1+A_2+A_3+A_5}=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}\cdot\overline{A_5}.$$

$$9,10)\ I=A_1+A_2+A_3+A_4=\overline{A_5+A_6}=\overline{A_5}\cdot\overline{A_6}.$$

11) $J=DE$. 12) $A_2+A_3=FI$. 13) $A_1=\overline{F}\cdot\overline{G}=\overline{F+G}$.

14) $A_2=DF$. 15) $A_3=EFI$. 16) $A_4=GI$.

17) $A_5=F\overline{I}$. 18) $A_6=G\overline{I}$.

Естественная задача – нахождение вероятности события на основе его классического определения.

Задача 5. Определите вероятности событий, перечисленных в решении задачи 1.

Решение. Воспользуемся классическим определением вероятности и запишем результат в виде следующей таблицы:

Событие	A_i	B	C	D	E
Вероятность	1/6	1	0	1/2	1/2
Событие	F	G	H	I	J
Вероятность	1/2	1/3	1	2/3	0

Педагогическая рефлексия. Итак, в задачах 1–5 анализируется стандартное испытание – бросание игральной кости. Для учителя важно, что даже такое весьма простое испытание порождает *десятки* вопросов. По-видимому, это свойство характерно для очень многих задач по теории вероятностей, так что, встретив то или иное задание в учебной литературе, полезно составить программу изучения задачной ситуации, которую затем можно *предъявить* учащимся, *составить* ее вместе с ними, *предложить* ее в качестве индивидуального или коллективного задания для внеклассного изучения и т. п.

Отметим, что многие факты теории вероятностей могут быть проиллюстрированы с помощью стандартных, исторически «проверенных» испытаний: бросания одной или двух игральных костей, бросания одной или двух монет, экспериментов с колодой карт, экспериментов с разноцветными шарами, извлекаемыми из урны. Здесь важно соблюсти меру. С одной стороны, удобно использовать стандартные испытания. С другой стороны, использование только игровых примеров может завуалировать тот важный факт, что понятия и теоремы теории вероятностей могут быть эффективно применены в самых разнообразных ситуациях, далеких от игр и важных в практической деятельности людей. Таким образом, для учителя важно *накапливать* сюжетные задачи, решаемые с помощью теории вероятностей.

3. Геометрическое определение вероятности, или визуализация с помощью диаграмм Эйлера

Подобные представления об этих вещах весьма полезны, поскольку ничто не является для нас более наглядным, чем фигура, ибо ее можно осязать и видеть.

Р. Декарт

Классическое определение вероятности, будучи удобным и естественным, имеет свои слабые стороны. Во-первых, оно предполагает, что число элементарных исходов испытания является конечным. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Во-вторых, очень часто невозможно представить результат испытания в виде совокупности элементарных событий. В-третьих, бывает крайне трудно указать основания, позволяющие считать элементарные события равновозможными. Таким образом, необходимо предпринять специальные усилия для преодоления слабых сторон классического определения. Одним из таких способов является рассмотрение геометрического определения вероятности, которому посвящен этот параграф.

Прежде чем говорить о геометрическом определении вероятности, посмотрим на наш предмет с психолого-педагогической точки зрения. Бросается в глаза, что пока у нас отсутствует наглядный образ понятия вероятности. Такой образ, если удастся его построить, должен обладать двумя взаимно дополнительными свойствами. С одной стороны, он должен подключать к изучению вероятностей органы чувств, а не только логику. С другой стороны, он должен быть достаточно конструктивным, то есть давать возможность иллюстрировать понятия и доказывать теоремы из области теории вероятностей. Построение такого образа мы начнем с общенаучных понятий модели и моделирования и более частного понятия визуализации.

Классическое понятие модели таково: «Под *моделью* понимается такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте» [2, с. 19]. Процесс построения и/или изучения модели называется моделированием. Приведем несколько примеров.

1) *Объект* – это свободно колеблющийся маятник. *Модель* – это дифференциальное уравнение $x'' + \omega^2 x = 0$.

2) *Объект* – это электрическая цепь постоянного тока. *Модель* – это система линейных уравнений, составленная по законам Кирхгофа.

3) *Объект* – тело, брошенное под углом к горизонту. *Модель* – это параметрически заданная функция $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t - gt^2/2 \end{cases}$,

где v_1 и $_2v$ – горизонтальная и вертикальная составляющие скорости соответственно.

4) *Объект* – это текст геометрической задачи. *Модель* – это соответствующий чертеж.

5) *Объект* – это аналитически заданная функция. *Модель* – это эскиз ее графика.

6) *Объект* – это алгоритм, записанный на одном из языков программирования. *Модель* – это блок-схема алгоритма.

Будем говорить, что модель называется ***зрительным образом*** объекта, если при ее изучении активно используются органы зрения. Процесс построения зрительного образа будем называть ***визуализацией*** объекта.

Очевидно, что модели, фигурирующие в примерах 1–3, имеют знаково-символическую природу, так что получение информации об этих моделях непосредственно с помощью органов зрения проблематично. Модели, фигурирующие в примерах 4–6, являются зрительными образами объектов, так что процесс построения этих моделей можно назвать визуализацией объектов.

Теперь мы можем привести геометрическое определение вероятности события.

Пусть внутри плоской фигуры U находится плоская фигура A. На фигуру U наудачу бросается точка. ***Вероятностью*** попадания точки на фигуру A называется число $P(A)$, определяемое равенством $P(A) = \frac{S_A}{S_U}$, где S_A и S_U – площади фигур A и U соответственно. При этом всегда предполагается, явно или неявно, что брошенная точка может оказаться в любой точке фигуры U и что результат испытания не зависит ни от форм фигур, ни от расположения фигуры A внутри фигуры U.

Шутливым, но точным образом описанной ситуации является следующий. На газон U случайным образом падает капля дождя. Вероятность ее попадания на клумбу A, находящуюся на газоне, равна отношению площадей клумбы и всего газона.

Проведем визуализацию ряда понятий и теорем теории вероятностей. При этом мы иногда будем пользоваться «официальными» терминами «фигура» и «площадь фигуры», а иногда будем использовать рассуждения на уровне газонов и клумб. Рекомендуем читателю каждый раз дополнять точные рассуждения шутливыми, а шутливые – точными.

Понятие *полной группы событий* может быть проиллюстрировано рисунком 2.

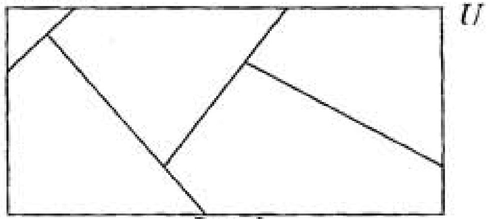


Рис. 2.

Событие: капля дождя падает на данный сектор газона. Полная группа событий: капля дождя падает на первый, второй и т. д. сектор газона.

Понятие *противоположных событий* может быть проиллюстрировано рисунком 3.

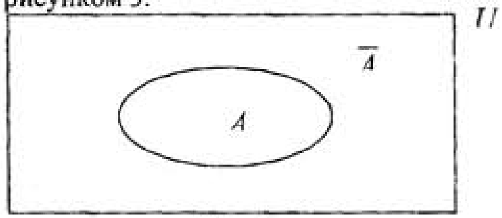


Рис. 3.

Событие: капля дождя падает на клумбу A. Противоположное событие: капля дождя падает вне клумбы, хотя и на газон.

Понятие *равновозможных* и *неравновозможных* событий может быть проиллюстрировано рисунком 4.

Рис. 4.

События A и B равновозможны, поскольку соответствующие фигуры имеют равные площади, хотя и расположены в разных частях объемлющей фигуры U. События A и C не равновозможны, поскольку соответствующие фигуры имеют разные площади. Событие C более вероятно, чем событие A.

Понятия *вероятности события* и *условной вероятности* события могут быть проиллюстрированы рисунком 5 и парой соответствующих формул.

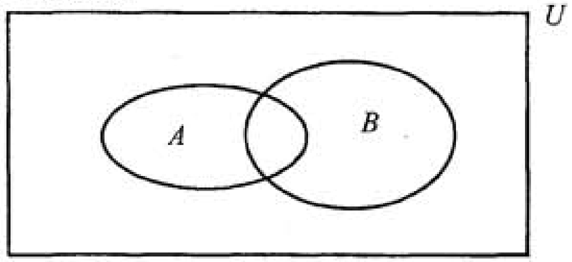


Рис. 5.

$$P(A)=\frac{S_A}{S_U},\quad P_A(B)=\frac{S_{A\cap B}}{S_A}$$

При этом по первой формуле вычисляется вероятность попадания точки на фигуру A, а по второй формуле – вероятность попадания точки на фигуру B при условии, что точка уже попала на фигуру A.

Понятия *совместных событий* и *несовместных событий* могут быть проиллюстрированы рисунком 6.

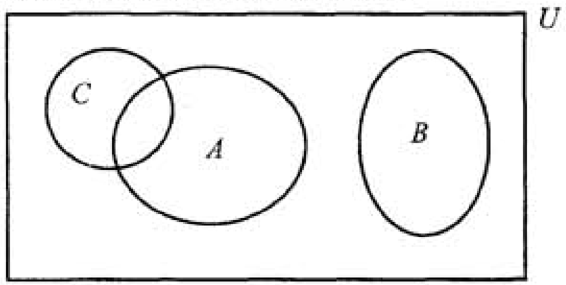


Рис. 6.

События A и B несовместны, события A и C совместны. Интересную визуализацию имеет понятие *независимых событий*.

Независимость событий A и B означает, что $P(AB)=P(A)P(B)$. В геометрических терминах это означает, что $\frac{S_{A\cap B}}{S_U}=\frac{S_A}{S_U}\frac{S_B}{S_U}$. Если $S_U=1$, то получаем равенство $S_{A\cap B}=S_A S_B$. Оно показывает, что при данной форме и размерах фигур A и B причиной зависимости или независимости событий является взаимное расположение фигур: они должны пересекаться, причем пересечение не может быть ни слишком большим, ни слишком маленьким. Еще более специализируем ситуацию: пусть U является квадратом со стороной 1, а фигуры A и B – прямоугольниками со сторонами 1 и 0,5. Советуем нарисовать такое взаимное расположение прямоугольников, при котором события независимы; в геометрических терминах это означает, что площадь пересечения прямоугольников должна быть равна 0,25.

Теорема о вероятности суммы событий иллюстрируется рисунком 7 и таким рассуждением:

$$S_{A\cup B}=S_A+S_B-S_{A\cap B}\Leftrightarrow\frac{S_{A\cup B}}{S_U}=\frac{S_A}{S_U}+\frac{S_B}{S_U}-\frac{S_{A\cap B}}{S_U}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Если события несовместны, то $S_{A\cap B}=0$, поэтому

$$\Leftrightarrow P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема о вероятности произведения событий иллюстрируется также рисунком 7, однако сопровождается другим рассуждением: $P(AB)=\frac{S_{A\cap B}}{S_U}=\frac{S_A}{S_U}\cdot\frac{S_{A\cap B}}{S_A}=P(A)P_A(B)$.

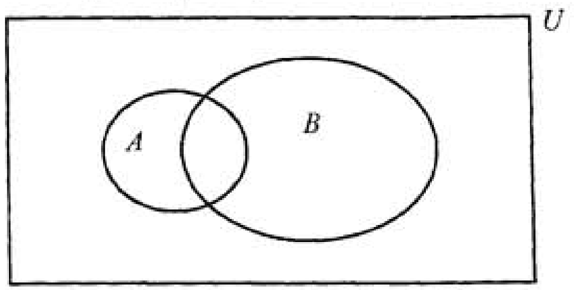


Рис. 7.

Теорема о полной вероятности события иллюстрируется рисунком 8.

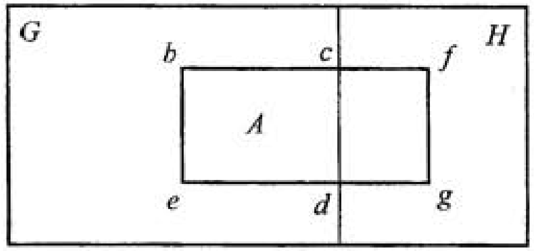


Рис. 8.

Здесь рассматривается случай двух гипотез G и H и события A, которое может наступать как при выполнении одной из них, так и при выполнении другой.

Теорема доказывается следующим образом. Очевидное геометрическое равенство $S_A=S_{bcde}+S_{cfgd}$ поделим на S_U и получим равенство $\frac{S_A}{S_U}=\frac{S_{bcde}}{S_U}+\frac{S_{cfgd}}{S_U}$. Первое слагаемое в правой части умножим и разделим на S_G, а второе – на S_H. Получим, что $\frac{S_A}{S_U}=\frac{S_G}{S_U}\cdot\frac{S_{bcde}}{S_G}+\frac{S_H}{S_U}\cdot\frac{S_{cfgd}}{S_H}$. Если теперь к каждой дроби применить определение либо вероятности события, либо условной вероятности события, то получим равенство

$$P(A)=P(G)P_G(A)+P(H)P_H(A).$$

Теорема Байеса о вероятности гипотезы также иллюстрируется рисунком 8, однако имеет другое доказательство:

$$P_A(G)=\frac{S_{bcde}}{S_A}=\frac{S_{bcde}/S_U}{S_A/S_U}=\frac{(S_G/S_U)(S_{bcde}/S_G)}{P(A)}=\frac{P(G)P_G(A)}{P(A)}.$$

Педагогическая рефлексия. Как и в предыдущем разделе, мы построили *базовый пример*, связанный с геометрической фигурой, вложенной в другую фигуру. Оказалось, что с его помощью достаточно эффективно иллюстрируются многие понятия теории вероятностей и доказательства многих теорем. Для учителя важно, что восприятие математического материала осуществляется не только с помощью логики, но и с помощью органов чувств, в данном случае зрения. При этом именно зрительный образ объекта подсказывает логику доказательства, а это, по мнению автора, способствует лучшему усвоению изучаемого материала.

Библиографический список

1. Реньи, А. Трилогия о математике [Текст]. – М.: Мир, 1980.
2. Штоф, В. А. Моделирование и философия [Текст]. – М.–Л., 1966.

Т. М. Корикова, И. В. Суслова

Вычисление расстояний и углов в пространстве

Согласно программе для общеобразовательных учреждений целью изучения стереометрии в 10–11 классах является систематическое изучение свойств пространственных фигур, формирование устойчивых пространственных представлений, развитие логического мышления, формирование умения применять полученные знания в практической деятельности. Стереометрия как раздел геометрии обладает значительным мировоззренческим потенциалом, возможностями для показа эффективности использования научных методов в познании окружающего мира, выявления условий формирования понятий и путей их возникновения. Кроме того, изучение стереометрии способствует формированию интеллектуальных умений, навыков изображения пространственных фигур, расширению кругозора, повышению общекультурного уровня развития. Подтверждением вышесказанного являются слова А. Д. Александрова: «Геометрия – средство восприятия среды и выражения себя».

Существенную проблему при обучении стереометрии представляет несоответствие между объемом материала, который необходимо усвоить учащимся, и количеством учебного времени, отводимого на его изучение. Естественно встает вопрос о совершенствовании процесса обучения таким образом, чтобы ученики приобщились к общенаучным методам познания, осознали богатые возможности курса. Использование наглядности и визуализации знаний, практической их значимости при решении задач позволит избежать формализма усвоения знаний и сформировать целостное представление о курсе стереометрии, обеспечить прочность фундаментальных знаний и умений, необходимых при изучении других дисциплин.

Одной из основных содержательных линий начал стереометрии является взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Изучение отношений параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей тесно связано с другими не менее значимыми вопросами, а именно вопросами о нахождении величин углов и расстояний между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями. При рассмотрении вторых из вышеназванных вопросов активно усваиваются основы ранее полученных знаний по параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Однако в силу ограниченности учебного времени эти вопросы не раскрываются должным образом для учащихся на уроках.

Работа с задачным материалом на вычисление расстояний и величин углов в пространстве является связующим звеном между началами стереометрии и решением содержательных задач на многогранники и тела вращения.

При решении задач на нахождение величин углов и расстояний между объектами, также как и при решении стереометрических задач в целом, учащиеся, исходя из наглядности и кажущейся очевидности, могут высказывать основанные на интуиции утверждения. Но даже в том случае, когда эти утверждения являются верными, каждое из них нуждается в логическом обосновании. Поэтому необходимо сформировать умение быстро и грамотно выполнять изображения фигур, заданных в условии задачи, проводить анализ стереометрической конфигурации на модели, с помощью чертежа аргументированно обосновывать каждое утверждение, появляющееся на конкретном этапе ее решения. Предлагаемый учащимся задачный материал должен содержать как задачи, направленные на формирование основных умений (репродуктивная деятельность по использованию базовых знаний), так и те, которые способствуют приобретению новых знаний об объектах и новых способах деятельности (продуктивная деятельность).

Введем основные понятия, связанные с углами и расстояниями на плоскости и в пространстве, выделим основные приемы их нахождения, проиллюстрируем применение этих приемов в задачах.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

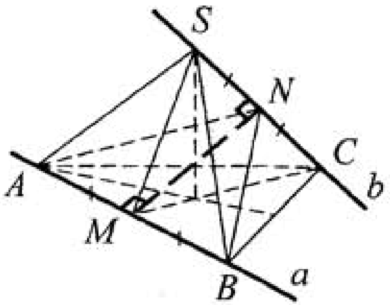
Определение. ***Расстоянием ρ между скрещивающимися прямыми*** называется длина отрезка с концами на этих прямых, перпендикулярного каждой из них (длина их общего перпендикуляра).

Основные приемы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми a и b

1. Построить общий перпендикуляр к прямым a и b (его изображение на плоскости) и вычислить его длину.

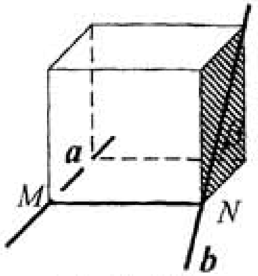
Используя векторный метод, достаточно предположить, что MN – общий перпендикуляр к прямым a и b, выбрать векторный базис, разложить вектор $\overrightarrow{MN}$ по базисным векторам. Из условий $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SC} = 0$ найти коэффициенты разложения $\overrightarrow{MN}$ по базисным векторам, а затем – длину вектора $\overrightarrow{MN}$.

$SABC$ – правильный тетраэдр



$a \dot{-} b$, $\rho(a;b) = \rho(AB;CS)MN$.

2. Через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную другой прямой. Найти расстояние от второй прямой до построенной плоскости (найти расстояние от любой точки второй прямой до ее ортогональной проекции на построенную плоскость).

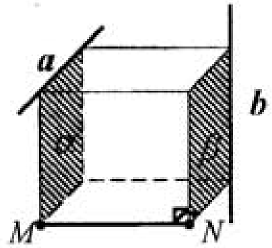


$a \dot{-} b$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$,

N – проекция M на β;

$\rho(a;\, b) = \rho(a;\, \beta) = \rho(M;\, \beta) = MN$.

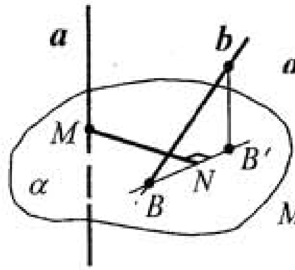
3. Через каждую из скрещивающихся прямых провести параллельные между собой плоскости и найти расстояние между ними (найти длину перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости к другой плоскости).

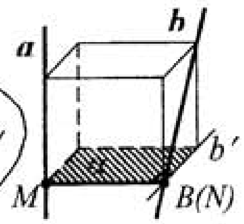


$a \dot{-} b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, $MN \perp \beta$;

$\rho(a;\, b) = \rho(\alpha;\, \beta) = MN$.

4. Провести плоскость, перпендикулярную одной из двух данных скрещивающихся прямых, а затем найти расстояние от точки пересечения этой прямой с плоскостью до проекции другой прямой на ту же плоскость.





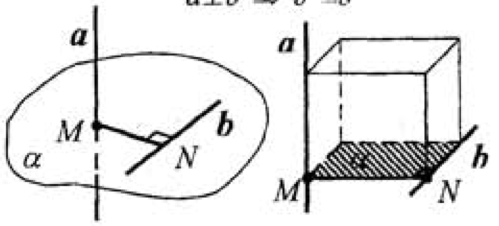
$a \dot{-} b$, $\alpha \perp a$, $\alpha \cap a = M$,

b' – проекция b на α, $MN \perp b'$;

$\rho(a;\, b) = \rho(a;\, b') = MN$.

4_1. Если скрещивающиеся прямые взаимно перпендикулярны, то через одну из этих прямых провести плоскость, перпендикулярную второй прямой, а затем найти расстояние от точки пересечения ее с плоскостью до первой прямой.

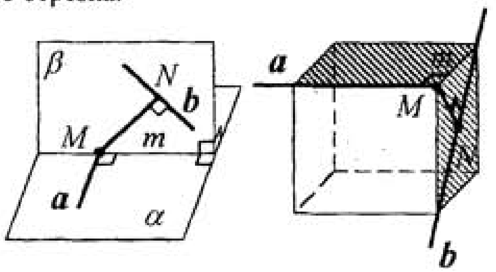
$$a \perp b \Rightarrow b' \equiv b$$



$$b \subset \alpha,\ \alpha \perp a,\ \alpha \cap a = M,\ MN \perp b;$$

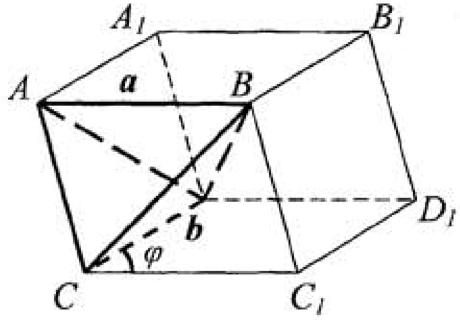
$$\rho(a;\, b) = MN.$$

5. Если скрещивающиеся прямые принадлежат соответственно двум взаимно перпендикулярным плоскостям и одна из них перпендикулярна линии пересечения этих плоскостей, то провести через точку пересечения первой прямой с линией пересечения плоскостей перпендикуляр к другой прямой и найти длину соответствующего отрезка.



$$a \dot{-} b,\ a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ \alpha \perp \beta,\ \alpha \cap \beta = m,$$
$$a \perp m,\ a \cap m = M,\ MN \perp b;$$
$$\rho(a;\, b) = \rho(M;\, b) = MN.$$

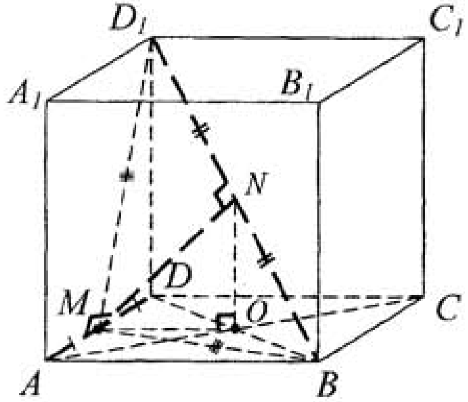
6. Если на двух скрещивающихся прямых взяты точки A и B, C и D соответственно так, что объем пирамиды $ABCD$ равен V, $AB = a$, $CD = b$, $\varphi = \angle(AB;\, CD)$, то $\rho(AB;CD) = \dfrac{6V}{ab\sin\varphi}$.



Задача 1. Найдите расстояние между диагональю BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и ребром основания AD, если сторона куба равна a.

Решение

Так как $AD \subset (ABC)$, $BD_1 \cap (ABC) = B$ и $B \notin AD$, то по признаку прямые AD и BD_1 скрещивающиеся ($AD \dot{-} BD_1$).



I способ

Построим общий перпендикуляр к прямым AD и BD_1 и найдем его длину (*прием* 1).

Пусть M – середина AD, N – середина BD_1. Докажем, что $MN \perp AD$ и $MN \perp BD_1$. $NO \perp (ABC)$, где $O = AC \cap BD$, MN – наклонная, MO – ее проекция на плоскость (ABC) и $MO \perp AD$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp AD$.

В равнобедренном треугольнике BMD_1 медиана MN является высотой, то есть $MN \perp BD_1$. Тогда $\rho = (AD; BD_1) = MN$.

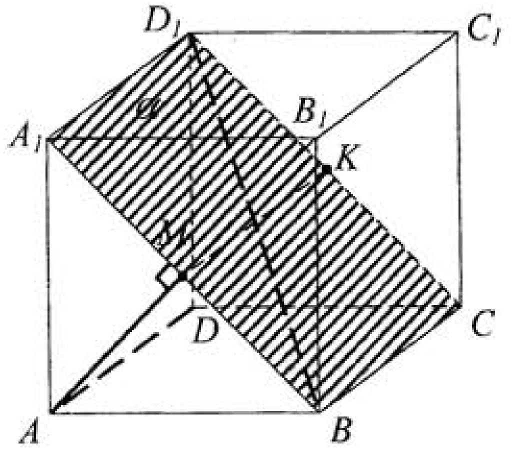
Из прямоугольного треугольника MON ($MO = NO = \frac{a}{2}$) находим $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

II способ

Через одну из скрещивающихся прямых (BD_1) и пересекающую ее прямую BC проведем плоскость α, параллельную второй прямой (AD). $AD \| \alpha$, так как $AD \| BC$. В плоскости ABA_1 построен $AM \perp A_1B$, а в плоскости α – $MK \| BC$. MK – ортогональная проекция AD на плоскость α. Используя *прием* 2, имеем:

$$\rho(AD; BD_1) = \rho(AD; \alpha) = \rho(AD; MK) = AM.$$

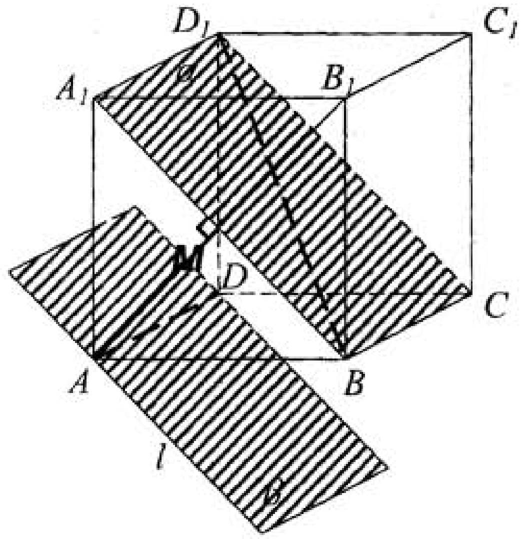
Из прямоугольного треугольника A_1AB ($AA_1 = AB = a$) находим: $A_1B = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ и $AM = \frac{1}{2}A_1B = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



III способ

Пересекающиеся прямые A_1D_1 и A_1B определяют плоскость α, содержащую BD_1. В плоскости (ABA_1) через точку A проведем прямую l параллельно прямой A_1B. Пересекающиеся прямые l и

AD определяют плоскость β. Так как $A_1D_1 \| AD$ и $A_1B \| l$, то $\alpha \| \beta$ и $\rho(BD_1; AD) = \rho(\alpha; \beta)$ (*прием* 3).

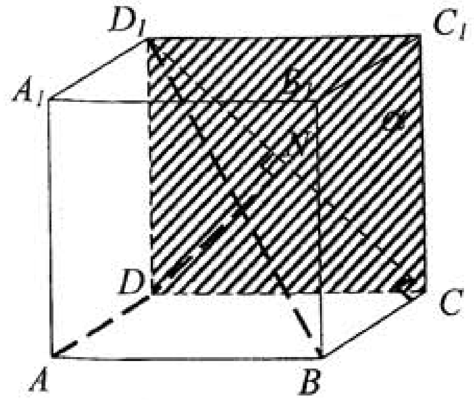


Из точки A ($A \in \beta$) в плоскости ABA_1 проведем $AM \perp A_1B$. Учитывая, что $(ABA_1) \perp (A_1BC)$, получаем $AM \perp \alpha$. Следовательно, $\rho(BD_1; AD) = \rho(\alpha; \beta) = AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. способ II).

IV способ

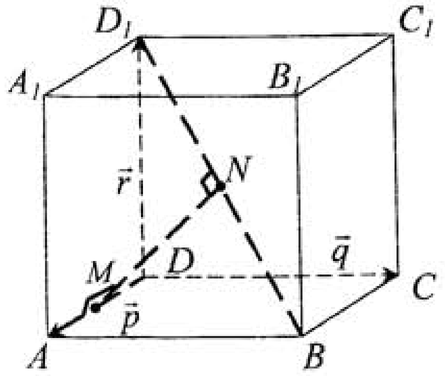
Через точку D одной из скрещивающихся прямых (AD) проведем плоскость α, перпендикулярную AD. На чертеже такая плоскость уже есть – $\alpha = (D_1DC)$. Так как в кубе $BC \perp \alpha$, а, следовательно, $BC \perp CD_1$, то проекцией отрезка BD_1 на α является отрезок CD_1. Достаточно найти расстояние от точки D, точки пересечения прямой AD и плоскости α, до проекции AD на α (*прием* 4):

$$\rho(BD_1; AD) = \rho(D; CD_1) = DN = \frac{1}{2}CD_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



V способ (*векторный метод*)

Пусть MN – искомый отрезок общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым AD и BD_1. Для нахождения его длины (*прием* 1) запишем на «векторном языке» условия перпендикулярности прямых.



Введем векторный базис.

Пусть $\overrightarrow{AD}=\vec{p}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{q}$, $\overrightarrow{DD_1}=\vec{r}$, тогда $|\vec{p}|=|\vec{q}|=|\vec{r}|=a$.

Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через базисные:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1N}=-x\vec{p}+\vec{r}+y\overrightarrow{D_1B}=$$

$$=-x\vec{p}+\vec{r}+y(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r})=(y-x)\vec{p}+(1-y)\vec{r}+y\vec{q}.$$

Так как $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BD_1}$, то их скалярные произведения равны нулю, то есть $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{DA}=0$ и $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{D_1B}=0$. Из этого условия находим x и y, учитывая при этом, что $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$, $\vec{p}\cdot\vec{r}=0$ и $\vec{q}\cdot\vec{r}=0$.

$$\begin{cases}\left((y-x)\vec{p}+(1-y)\vec{r}+y\cdot\vec{q}\right)\cdot\vec{p}=0,\\ \left((y-x)\vec{p}+(1-y)\vec{r}+y\cdot\vec{q}\right)\cdot\left(\vec{p}+\vec{q}-\vec{r}\right)=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-x)\vec{p}^{\,2}=0,\\ (y-x)\vec{p}^{\,2}+y\vec{q}^{\,2}+(y-1)\vec{r}^{\,2}=0;\end{cases}\quad \begin{cases}(y-x)\vec{a}^{\,2}=0,\\ (3y-x-1)\vec{a}^{\,2}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x,\\ x=3y-1;\end{cases}\quad \begin{cases}y=\dfrac{1}{2},\\ x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}.$$

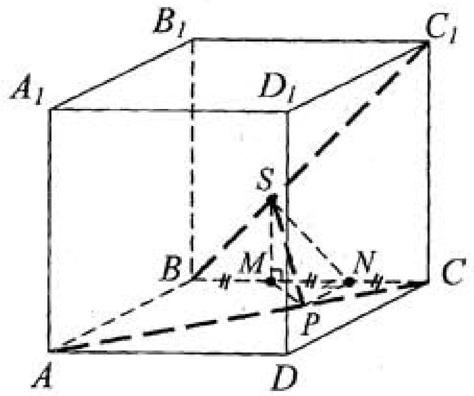
$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}|\vec{q}|\right)^2+\left(\frac{1}{2}|\vec{r}|\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a. В каком отношении делит каждую из этих диагоналей их общий перпендикуляр?

Решение

Рассмотрим несколько способов решения задачи, варьируя при этом смежные грани куба и их диагонали.

I способ. Будем находить расстояние между скрещивающимися прямыми AC и BC. Чтобы найти между ними расстояние, построим к ним общий перпендикуляр (*прием* 1). Возьмем точки M и N на ребре BC такие, что $BM=MN=NC=\dfrac{a}{3}$. В плоскости BCC_1 проведем $SM\perp BC$, а в плоскости ABC – $PN\perp BC$.



Докажем, что SP – общий перпендикуляр к AC и BC_1. $(ABC)\perp(B_1BC)$ и $PN\perp BC$, следовательно, $PN\perp(B_1BC)$.

PS – наклонная к плоскости (B_1BC), NS – её проекция. В прямоугольном треугольнике SMB $\angle SBM=45°$, значит ΔSMB – равнобедренный и $SM=BM=MN=\frac{1}{2}BN$, откуда заключаем, что $\angle BSN=90°$ или $BC_1\perp NS$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $PS\perp BC_1$.

Аналогично доказывается, что $PS\perp AC$. $\rho(AC;\ BC_1)=SP$.

Найдем длину отрезка PS из ΔSMP, в котором $\angle SMP=90°$;

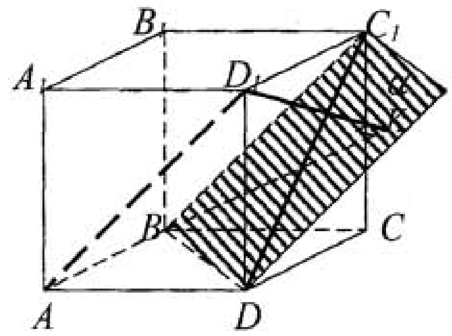
$$SM=BM=\frac{a}{3}.\ MP=\sqrt{MN^2+NP^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

$$SP=\sqrt{SM^2+MP^2}=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{2a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ BS:SC_1=AP:PC=2:1.$$

Замечание. Этот способ решения требует геометрической интуиции, догадки при выборе точек M и N.

II способ. Найдем расстояние между прямыми AD_1 и DC_1 ($AD_1 \dot{-} DC_1$).

Построим плоскость α, заданную пересекающимися прямыми BC_1 и BD и содержащую DC_1. Так как $BC_1\|AD_1$, то $\alpha\|AD_1$. Задача сводится к нахождению расстояния между любой точкой прямой AD_1, например, точкой D_1, и плоскостью α (*прием* 2), то есть $\rho(AD_1;DC_1)=\rho(AD_1;\ \alpha)$.



Рассмотрим пирамиду $BDCC_1D_1$, которую можно разбить на две пирамиды – C_1CDB и D_1BDC_1.

Тогда $V_{BDCC_1D_1}=V_{C_1CDB}+V_{D_1BDC_1}$.

$$V_{BDCC_1D_1}=\frac{1}{3}h\cdot S_{\text{осн.}}=\frac{1}{3}BC\cdot S_{CDD_1C_1}=\frac{1}{3}a^3.$$

$$V_{C_1CDB}=\frac{1}{3}CC_1\cdot S_{\Delta BCD}=\frac{1}{3}a\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{1}{6}a^3\ \ (CC_1\perp(BCD)).$$

$$V_{D_1BDC_1}=\frac{1}{3}D_1K\cdot S_{\Delta BC_1D}=\frac{1}{3}D_1K\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}=D_1K\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{6},$$

$(BC_1=C_1D=BD=a\sqrt{2})$.

Имеем: $\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{6}a^3=D_1K\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$, откуда $D_1K=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

III способ

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и DC_1, достаточно построить параллельные плоскости α и β, содержащие их, и найти расстояние от любой точки, например, точки M плоскости α до плоскости β (*прием* 3).

Пусть M_1 и M – середины B_1D_1 и BD.

В плоскости MM_1C $M_1N\perp MC_1, N\in MC_1$.

$$\rho(AD_1;DC_1)=\rho(\alpha;\beta)=\rho(M_1;\beta)=M_1N.$$

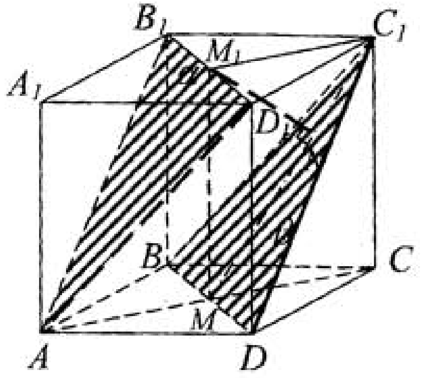
$$B_1D_1\|BD,\ AB_1\|DC_1\Rightarrow\alpha\|\beta.$$

Рассмотрим прямоугольные треугольники C_1NM_1 и C_1M_1M:

$\Delta C_1NM_1 \sim \Delta C_1M_1M \Rightarrow \frac{M_1N}{M_1M} = \frac{M_1C_1}{C_1M}$. $M_1C_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$C_1M = \sqrt{CC_1^2 + CM^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

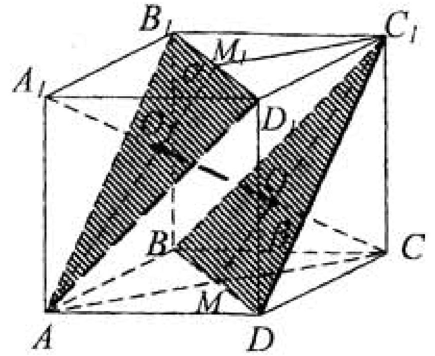
$$M_1N = \frac{M_1M \cdot M_1C_1}{C_1M} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



IV способ

Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и DC_1, как и в предыдущем случае, проведя плоскости α и β, содержащие эти прямые, причем α||β (*прием* 3).

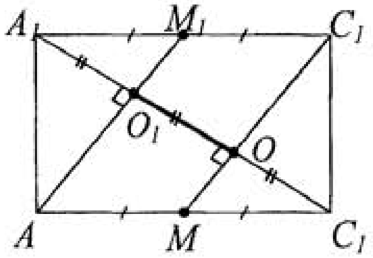
Проведем в кубе диагональ A_1C. $A_1C \cap \alpha = O_1$, $A_1C \cap \beta = O$, причем O_1 и O лежат на медианах треугольников B_1AD_1 и BC_1D и $A_1C \perp \alpha$ и $A_1C \perp \beta$. Следовательно, $\rho(AD_1;DC_1)=\rho(\alpha;\beta)=O_1O$.



Рассмотрим плоскость диагонального сечения куба AA_1C_1C.

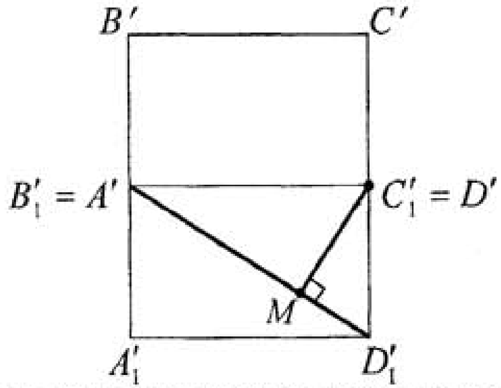
$A_1O_1 = O_1O = OC = \frac{1}{3}A_1C$, где $A_1C = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

$O_1O = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



V способ

Чтобы найти расстояние между AD_1 и DC_1, мысленно проведем через D плоскость, перпендикулярную DC_1, и найдем расстояние от точки D до проекции прямой AD_1 на эту плоскость (*прием* 4). Спроектируем куб на мысленно построенную плоскость. Проекции вершин куба обозначены теми же буквами только со штрихами.



Задача сводится к нахождению расстояния от точки D' до прямой $A'D'_1$, то есть длины отрезка $D'M$. В прямоугольном треугольнике $A'D'D'_1$ $A'D'=a$, $D'D'_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $D'M$ – высота, проведенная из вершины прямого угла.

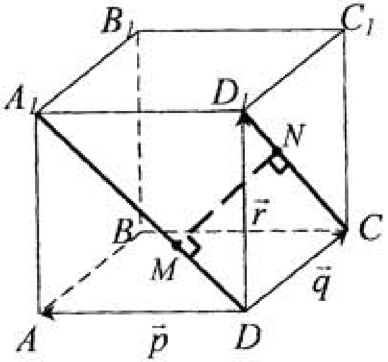
Имеем: $A'D' \cdot D'D'_1 = A'D'_1 \cdot D'M$, откуда $D'M = \dfrac{A'D' \cdot D'D_1'}{A'D_1'} = \dfrac{a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}.$

VI способ (*векторный метод*)

Найдем расстояние между прямыми AD_1 и DC_1.

Пусть MN – общий перпендикуляр к этим прямым.

Пусть векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{r}$ будут базисом, причем $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = a$. В этом базисе $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$.



Используя условие коллинеарности векторов, получаем:

$\overrightarrow{MD} = x\overrightarrow{DA_1} = x(\vec{p} + \vec{r})$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CD_1} = y(\vec{r} - \vec{q})$ и

$\overrightarrow{MN} = x(\vec{p} + \vec{r}) + \vec{q} + y(\vec{r} - \vec{q}) = x\vec{p} + (x + y)\vec{r} + (1 - y)\vec{q}.$

Так как $MN \perp DA_1$ и $MN \perp CD_1$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA_1} = 0$ $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x\vec{p} + (1 - y)\vec{q} + (x + y)\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{q}) = 0, \\ (x\vec{p} + (1 - y)\vec{q} + (x + y)\vec{r}) \cdot (\vec{p} + \vec{r}) = 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $\vec{p} \cdot \vec{r} = 0$, $\vec{r} \cdot \vec{q} = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, получаем:

$\begin{cases} 2x + y = 0, \\ x + 2y = 0; \end{cases}$ откуда $x = -\dfrac{1}{3}$; $y = \dfrac{2}{3}$.

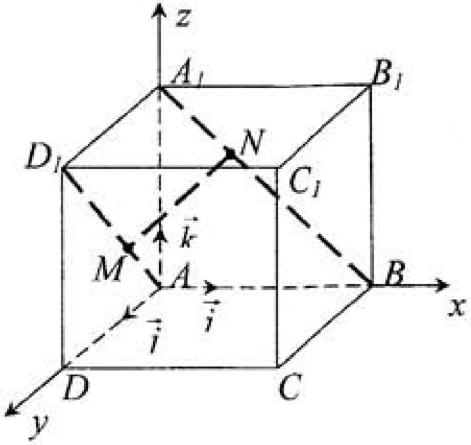
Тогда $|\overrightarrow{MD}| = \dfrac{1}{3}|\overrightarrow{A_1D}|$, $|\overrightarrow{NC}| = \dfrac{2}{3}|\overrightarrow{CD_1}|$.

$$\rho(A_1D; CD_1) = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 a^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

VII способ (*координатно-векторный метод*)

Найдем расстояние между скрещивающимися прямыми BA_1 и AD_1.

Пусть MN – общий перпендикуляр к этим прямым. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A. Векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ составляют базис.



Тогда имеем: $\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{AA_1} = a\vec{k}$, $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ и $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = a\vec{j} + a\vec{k} = (0;a;a)$, $\overrightarrow{A_1B} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1A} = a\vec{i} - a\vec{k} = (a;0;-a)$.

Применяя условие коллинеарности векторов, получаем: $\overrightarrow{MD_1} = \alpha \cdot \overrightarrow{AD_1} = (0;\alpha a;\alpha a)$, $\overrightarrow{A_1N} = \beta \cdot \overrightarrow{A_1B} = (\beta a;0;-\beta a)$, где α и β – числа.

Тогда $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD_1} + \overrightarrow{D_1A_1} + \overrightarrow{A_1N} = (\beta a;(\alpha - 1)a;(\alpha - \beta)a)$.

$$\left.\begin{array}{l} MN \perp AD_1 \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD_1} = 0 \\ MN \perp A_1B \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} (\alpha - 1)a^2 + (\alpha - \beta)a^2 = 0; \\ \beta a^2 + (\beta - \alpha)a^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases}(2\alpha-1-\beta)a=0,\\(2\beta-\alpha)a=0;\end{cases} \text{ и } \begin{cases}2\alpha-\beta=1,\\-\alpha+2\beta=0.\end{cases}$$

Решив систему уравнений, находим $\alpha=\dfrac{2}{3}$ и $\beta=\dfrac{1}{3}$.

Таким образом, $\overline{MN}=\left(\overrightarrow{\dfrac{1}{3}a;\dfrac{1}{3}a;\dfrac{1}{3}a}\right)$,

$$\left|\overline{MN}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}}=\frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } MN=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

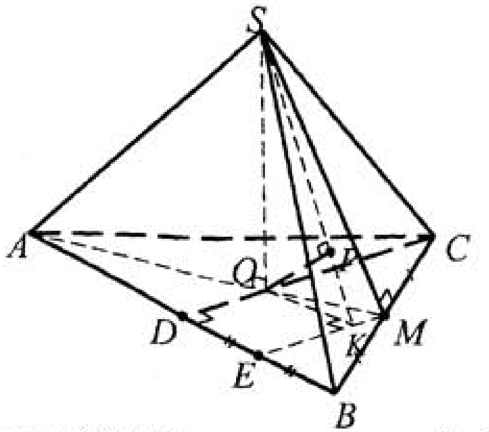
Задача 3. Найдите расстояние между скрещивающимися высотами граней правильного тетраэдра с ребром a.

Решение

Найдем расстояние между высотами CD и SM граней ABC и BSC. $CD\subset(ABC)$, $SM\cap(ABC)=M$ и $M\notin CD$, следовательно, прямы CD и SM являются скрещивающимися.

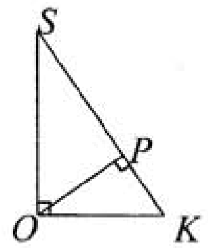
Через точку M проведем $ME\|CD$. Тогда $(SME)\|CD$ и дл нахождения расстояния между CD и SM достаточно найти рас стояние от точки O прямой CD до плоскости SME, содержащей SM (*прием* 2):

$$\rho(CD;SM)=\rho(CD;(SME))=\rho(O;(SME)).$$



Проведем $OK\perp ME$ и соединим точки S и K; по теореме трех перпендикулярах $ME\perp SK$, откуда $ME\perp(SOK)$, а из этого сл дует, что $(SME)\perp(SOK)$.

Перпендикуляр OP, опущенный из точки O на плоскость SME, лежит в плоскости SOK, а основание его – точка P – лежит на прямой SK, являющейся линией пересечения этих двух взаимно перпендикулярных плоскостей.



$$\Delta SOK\backsim\Delta OPK\Rightarrow\frac{SO}{OP}=\frac{SK}{OK},\ OP=\frac{SO\cdot OK}{SK}.$$

Из ΔSOC находим SO:

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Так как в ΔBCD $BM=MC$ и $ME\|CD$, то по теореме Фалеса $BE=ED=\dfrac{a}{4}$, а значит и $OK=DE=\dfrac{a}{4}$.

Тогда $SK=\sqrt{SO^2+OK^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2+\dfrac{a}{4}}=\dfrac{a\sqrt{105}}{12}$ и

$$\rho(CD;SM)=OP=\frac{a\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{a}{4}:\frac{a\sqrt{105}}{12}=\frac{a\sqrt{70}}{35}.$$

Аналогично находится расстояние между скрещивающимися прямыми – высотами CD и BN граней ABC и SBC.

Проведем $BQ\|CD$, тогда

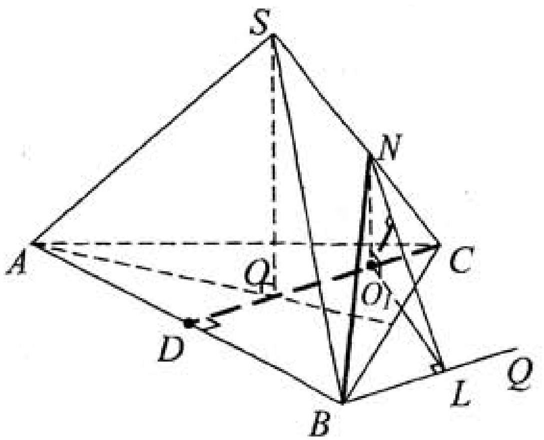
$$CD\|(NBQ) \text{ и } \rho(CD;BN)=\rho(O_1;(NBQ)),$$

где $O_1\in CD$. Строим плоскость NO_1L, перпендикулярную к NBQ.

Тогда искомым расстоянием будет длина отрезка перпендикуляра O_1F, опущенного из точки O_1 на плоскость NBQ.

Из подобия треугольников NO_1L и NFO_1 находим $O_1F=\dfrac{NO_1\cdot O_1L}{NL}$.

После вычислений получаем $\rho(CD;BN) = O_1F = \dfrac{a\sqrt{10}}{10}$.



Задача 4. В правильном треугольнике ABC сторона равн a. Отрезок AS, длины a, перпендикулярен плоскости ABC. Найдит расстояние между прямыми AB и SC.

Решение

Так как $AB\subset(ABC)$ и $SC\cap(ABC)=C$, $C\notin AB$, то по признак AB и SC – скрещивающиеся прямые.

Искомое расстояние d между AB и SC равно расстоянию о точки A прямой AB до плоскости, содержащей SC и параллельно AB (*прием* 2). Достроим треугольник ABC до ромба $ABCD$. Тогд плоскость SCD параллельна AB, так как содержит прямую CD па раллельную AB. Следовательно,

$$d = \rho(AB;SC) = \rho(A;(SCD)) = AO,$$

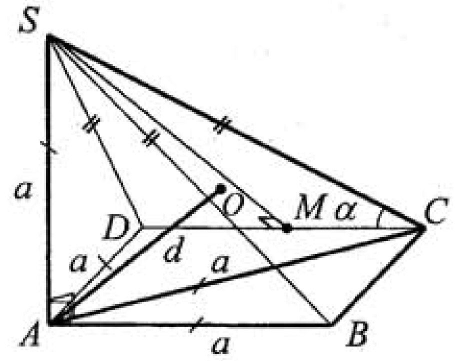
где O – ортогональная проекция точки A на плоскость SCD и AO высота тетраэдра $ASCD$.

$$V_{ASCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta SCD}\cdot AO,\ \text{откуда}\ AO = \frac{3V_{ASCD}}{S_{\Delta SCD}}.$$

С другой стороны, $SA\perp(ACD)$, и поэтому

$$V_{ASCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ADC}\cdot SA = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a^2\sin 60°\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}.$$

Так как $AS = AB = AC = AD = a$, то $SB = SC = SD = a\sqrt{2}$.



Если $SM\perp DC$, то $DM = MC = \dfrac{a}{2}$, откуда $\cos\alpha = \dfrac{MC}{SC} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Тогда $SM = \sqrt{SC^2 - MC^2} = \sqrt{2a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$,

$$S_{\Delta SCD} = \frac{1}{2}CD\cdot SM = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a^2\sqrt{7}}{4}.$$

Следовательно, $d = AO = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{12} : \dfrac{a^2\sqrt{7}}{4} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Вычисление углов между прямыми и плоскостями

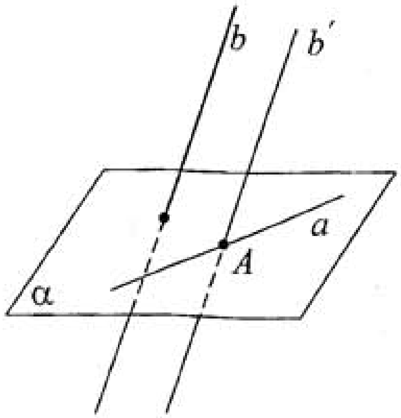
В стереометрических задачах довольно часто возникают итуации, в которых требуется определить (вычислить) угол меж-у объектами (скрещивающимися прямыми; прямой и плоскостью; ежду двумя плоскостями), либо определение значения этого угла необходимо для дальнейшего решения задачи.

Рассмотрим решение этих вопросов для каждой пары объектов отдельно.

1. Угол между скрещивающимися прямыми

Определение. Углом между скрещивающимися прямыми называют угол между соответственно параллельными им пересекающимися прямыми.

$a \dot{-} b$; $b' \parallel b$, $b' \cap a = A$, тогда $\varphi = \angle(a, b) = \angle(a, b')$; $0° < \varphi \le 90°$.



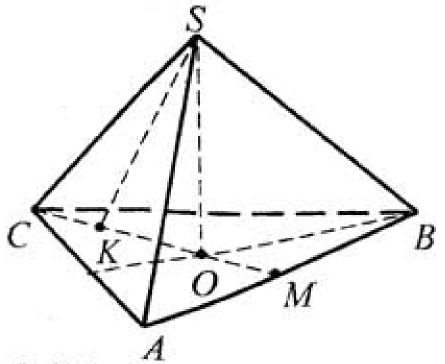
Для вычисления угла между скрещивающимися прямыми применяют геометрический (вычислительный) метод и векторно-координатный. Рассмотрим каждый из них на примерах решения задач.

Задача 1. Дана правильная треугольная пирамида *SABC*. Найдите угол между прямыми *AB* и *SK*, где *K* принадлежит медиане *CM*.

Решение

Исходя из свойств заданной фигуры можно заметить, что прямая AB перпендикулярна плоскости *SCM*. $AB\perp(SCM)\Rightarrow AB\perp SK$, так как *SK* лежит в плоскости *SCM*.

Итак, если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая перпендикулярна этой плоскости, то угол между скрещивающимися прямыми 90°, следовательно, $\angle(SK,AB)=90°$.



Задача 2. Найдите угол между скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.

В условии задачи не указано, какая пара скрещивающихся прямых, которым принадлежат медианы, рассматривается, поэтому необходимо исследовать различные варианты.

Решение (*геометрический метод*)

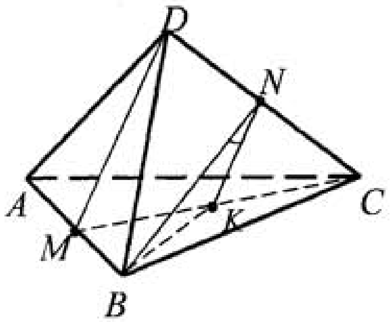
I случай

$DM \dot{-} BN$

1. Построение угла.

Рассмотрим плоскость, проходящую через одну из прямых и какую-то точку другой прямой.

В данном случае (см. рис.) такой плоскостью является плоскость, проходящая через прямую *DM* и точку *N*: *(DMC)*.



В плоскости (*DMC*) через точку *N* проведем прямую $n \parallel DM$, $n\cap MC=K$, $K\in(ABC)$, тогда $\angle BNK$–искомый.

2. Вычисление величины угла *BNK*.

Угол *BNK* входит в Δ *BNK*. Воспользуемся теоремой косинусов для ΔBNK, для этого необходимо знать длины сторон этого треугольника.

Пусть длина ребра правильного тетраэдра равна *a*. Так как *DM* и *BN* – медианы правильных треугольников со стороной *a*, то

$BN=DM=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; *NK* – средняя линия в Δ *DMC*, значит $NK=\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

ΔMBK – прямоугольный, $\angle BMK=90°$, $MB=\frac{a}{2}$, $NK=\frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$BK=\sqrt{MB^2+MK^2}$, $BK=\frac{a\sqrt{7}}{4}$.

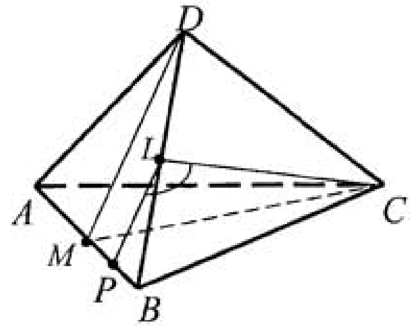
ΔBNK: согласно теореме косинусов:

$$\cos\angle BNK = \frac{BN^2 + NK^2 - BK^2}{2BN \cdot NK},$$

отсюда $\cos\angle BNK = \frac{2}{3}$, значит $\angle BNK = \arccos\frac{2}{3}$.

II случай

Медианы DM и CL также лежат на скрещивающихся прямых (см. рис.).

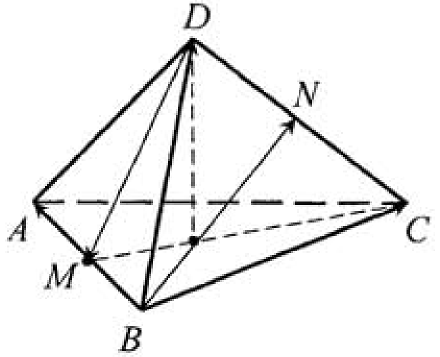


Рассуждая аналогично предыдущему случаю, построим угол между скрещивающимися прямыми DM и CL и получим, что $\angle CLP$ – искомый и $\angle CLP = \arccos\frac{1}{6}$.

Векторный метод

I случай

При использовании векторов для вычисления угла между скрещивающимися прямыми строить угол между ними нет необходимости.



Рассматриваем векторы, коллинеарные скрещивающимся прямым $DM \dot{-} BN$, то есть векторы $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{BN}$.

$$\cos\angle(\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}) = \frac{\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BN}}{\left|\overrightarrow{DM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BN}\right|} \qquad (*)$$

Учитывая, что $0^\circ \le (\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}) \le 180^\circ$, а угол между скрещивающимися прямыми $0^\circ < (DM, BN) \le 90^\circ$, получаем формулу $\cos\angle(DM, BN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BN}\right|}{\left|\overrightarrow{DM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BN}\right|}$.

Далее наши рассуждения идут по следующему алгоритму.

1. Выбираем базис: три некомпланарных вектора $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, при этом $\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| = a$,

$$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = \angle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = 60^\circ.$$

2. Находим разложения векторов $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{BN}$ по выбранному базису $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

3. Находим скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{BN}$:

$$\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{BN} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{2}a^2.$$

4. Находим длины векторов $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{BN}$:

$$\left|\overrightarrow{DM}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DM}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Но $\left|\overrightarrow{DM}\right| = \left|\overrightarrow{BN}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

5. $\cos\angle(DM, BN) = \dfrac{\left|-\dfrac{1}{2}a^2\right|}{\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{3}$,

$\angle(DM,BN)=arccos\dfrac{2}{3}$.

II случай

Аналогично рассуждая для нахождения угла между DM и CL, где L – середина BD, получим $\angle(DM,CL)=arccos\dfrac{1}{6}$.

Координатно-векторный метод

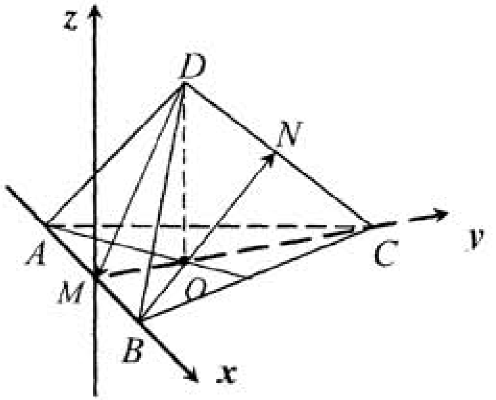
Используя свойства заданной фигуры, введем систему координат. Середину отрезка AB точку M примем за начало координат.

AB – ось x, $MC\perp AB$, MC – ось y, $n\perp(ABC)$, $M\in n$, n – ось z.

Для простоты вычислений примем длину ребра правильного тетраэдра равной 2.

Тогда $M(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, \sqrt{3}, 0)$, $D\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

N – середина DC, значит $N\left(0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$.



Вычислим координаты векторов $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{BN}$:

$\overrightarrow{MD}\left(0, \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{BN}(-1, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{3})$.

Запишем формулу (*) для вычисления косинуса угла между MD и BC в координатах:

$$\cos\angle(MD, BC) = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}};$$

$$\cos\angle(MD, BC) = \frac{\left|\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3};$$

тогда $\angle(MD,BC)=arccos\dfrac{2}{3}$.

Рассуждая аналогично для случая II, получим $\angle(MD,CL)=arccos\dfrac{1}{6}$.

2. Угол между прямой и плоскостью

Сформулируем основные положения.

Определение. Углом между прямой, являющейся наклонной к плоскости, и этой плоскостью называется угол между прямой и её ***ортогональной*** проекцией на эту плоскость.

a – прямая, $a\cap\alpha=O$

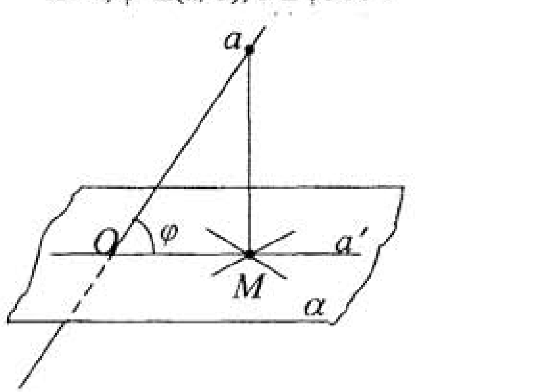
a' – ортогональная проекция прямой a на плоскость α

$\varphi=\angle(a, a')=\angle(a, \alpha)$.

Если $a\perp\alpha$, то $\angle(a, \alpha)=90°$.

Если $a\|\alpha$, то $\angle(a, \alpha)=0°$.

Итак, $\varphi=\angle(a, \alpha)$, $0°\le\varphi\le 90°$.



При решении задач на вычисление угла между прямой и плоскостью возникает задача построения этого угла в том случае, если мы используем геометрический метод. Здесь важно грамотное построение ортогональной проекции прямой на заданную плоскость.

Построить ортогональную проекцию прямой a на заданную плоскость α можно двумя способами:

1. построить проекции двух точек прямой a на заданную плоскость α; проекции точек определят проекцию прямой a на плоскость α;

2. провести через прямую a плоскость β, перпендикулярную плоскости α, тогда линия пересечения плоскостей α и β и будет проекцией прямой a на плоскость α.

Рассмотрим способы нахождения угла между прямой и плоскостью в задачах.

Задача 1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямой OC_1 и плоскостью A_1BC_1, если O – центр грани $ABCD$.

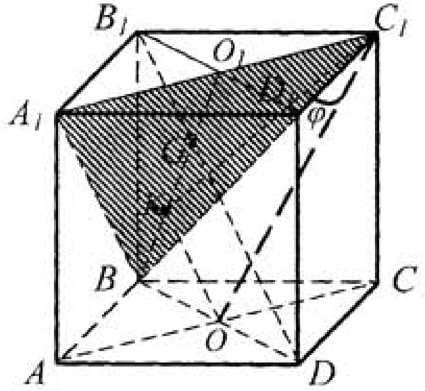
Решение

Геометрический метод

1. Построим угол между прямой OC_1 и плоскостью A_1BC_1.

Для этого найдем ортогональную проекцию прямой OC_1 на (A_1BC_1): $C_1=OC_1\cap(A_1BC_1)$.

Для построения проекции точки O необходимо указать прямую, перпендикулярную плоскости (BA_1C_1).



Нетрудно доказать, что $DB_1\perp(A_1BC_1)$ (докажите самостоятельно).

Тогда плоскость (B_1BD) проходит через прямую $B_1D\perp(A_1BC_1)$. Значит $(B_1BD)\perp(A_1BC_1)$, причем $(B_1BD)\cap(A_1BC_1)$=BO_1, O_1 – центр верхней грани куба. $DB_1\cap(A_1BC_1)=G$, где G – центроид ΔA_1BC_1.

Прямая n, такая что $n\|DB_1$, $n\ni O$, пересекает BO_1 в точке K, K – проекция точки O на плоскость (A_1BC_1). Таким образом, KC_1 – проекция прямой OC_1 на плоскость (A_1BC_1), отсюда $\angle KC_1O$ – угол между прямой OC_1 и плоскостью A_1BC_1.

2. Вычисление величины угла OC_1K.

Пусть $\angle OC_1K=\varphi$.

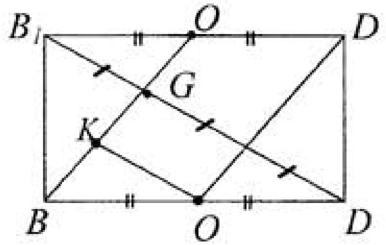
Из прямоугольного $\Delta\ OC_1K$ ($\angle OKC_1=90°$), $\sin\varphi=\dfrac{OK}{OC_1}$.

Пусть длина ребра куба равна a, тогда из прямоугольного треугольника OCC_1:

$$OC_1=\sqrt{OC^2+CC_1^2} \text{ или } OC_1=\sqrt{\frac{a^2}{2}+a}=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

B_1D – диагональ куба, $B_1D=a\sqrt{3}$; очевидно, что $DG=\frac{2}{3}DB_1$, то есть $DG=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$ (см. выносной чертеж). ΔBGD: OK – средняя линия, значит $OK=\frac{1}{2}DG$, $OK=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Следовательно, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a:a\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\varphi=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.



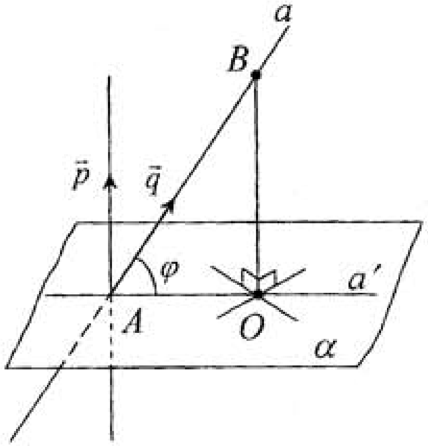
Выносной чертеж диагонального сечения

Итак, при использовании геометрического способа нахождения угла между прямой a и плоскостью α мы включаем этот угол в прямоугольный треугольник, один из катетов которого лежит на проекции этой прямой на плоскость α, а гипотенуза лежит на прямой a.

Координатно-векторный метод

a – наклонная к плоскости α; a' – её ортогональная проекция;

$\varphi = \angle(a, \alpha)$, $0° \leq \varphi \leq 90°$.

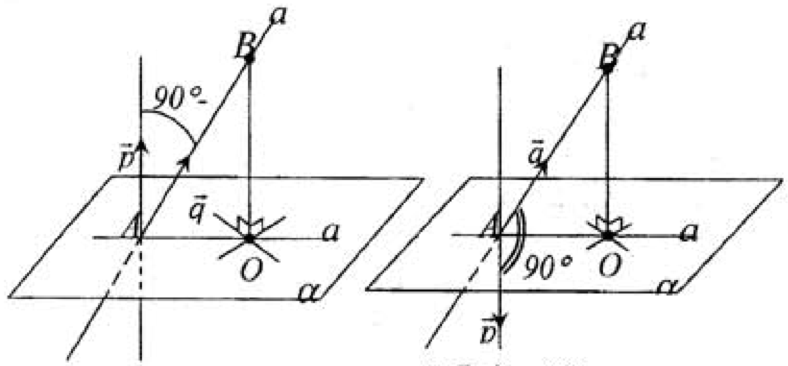


Нетрудно видеть, что угол между прямой и плоскостью дополняется углом между прямой a и прямой p, где $p \perp \alpha$, до 90°, $\angle(p, \alpha) = 90° - \varphi$.

Отсюда $\sin\varphi = \cos(90° - \varphi)$.

Итак, задача на нахождение угла между прямой и плоскостью сводится к задаче на нахождение угла между двумя прямыми.

Рассматриваем вектор $\vec{p}$, коллинеарный прямой p, $p \perp \alpha$, и вектор $\vec{q}$, коллинеарный прямой a. Но угол между векторами может принимать значения от 0° до 180°, значит $\angle(\vec{p}, \vec{q})$ может быть равен $90° - \varphi$ или $90° + \varphi$.



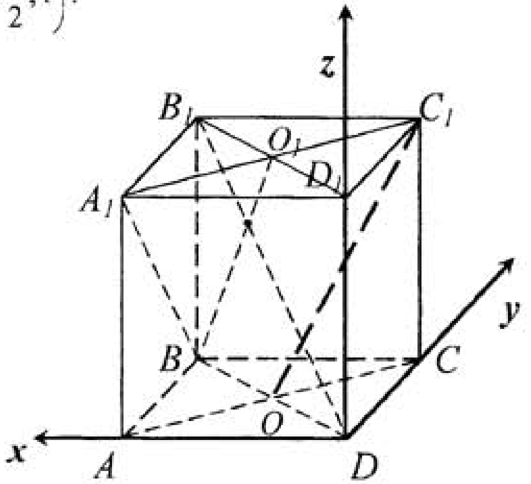
$\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 90° - \varphi$ $\qquad$ $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = 90° + \varphi$

Учитывая, что угол между прямой и плоскостью $0° \leq \varphi \leq 90°$, получаем формулу $\sin\varphi = \left|\cos\angle(\vec{p}, \vec{q})\right|$.

Этот факт будем использовать для вычисления угла между прямой и плоскостью при координатно-векторном способе.

Решение (Задача 1)

Учитывая свойства фигуры, выберем систему координат удобным образом (см. рис.). Тогда вектор $\overline{p}$ перпендикулярный плоскости (A_1BC_1) будет иметь координаты $(1,1,1)$, вектор $\overrightarrow{OC_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.



$$\cos\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|},\ \cos\angle(\vec{p},\vec{q})=\frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Значит, $\sin\angle\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\angle\varphi=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Как видим, координатно-векторный метод не требует выполнения операции построения угла между прямой и плоскостью.

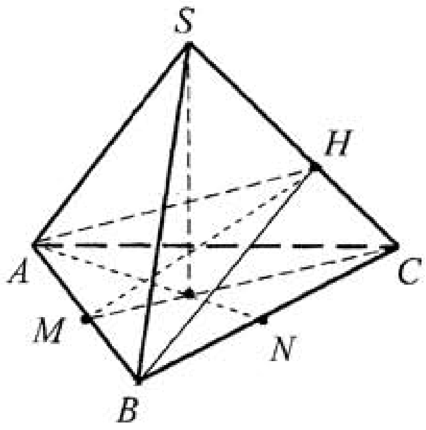
Задача 2. В правильной треугольной пирамиде отношение длин бокового ребра и ребра основания равно 2:1. Найдите угол между ребром основания и плоскостью боковой грани.

Решение

Найдем угол $\varphi=\angle(AB, (SBC))$.

1. Построение угла.

Через прямую АВ проведем плоскость, перпендикулярную плоскости (SBC). Для этого в грани SBC проведем $BH\perp SC$, в грани SAC – $AH\perp SC$, так как ΔBSC и ΔASC равны, то основания высот, проведенных из вершин B и A к общей стороне SC, совпадают. Так как $BH\perp SC$ и $AH\perp SC$, то $SC\perp(ABH)$, а тогда $(BSC)\perp(ABH)$, $BH=(BSC)\cap(ABH)$, значит BH – проекция прямой AB на плоскость SBC и $\angle ABH=\varphi$.



2. Вычисление угла φ.

ΔABH – равнобедренный, $\cos\angle ABH=\frac{BM}{BH}$, где M – середина AB.

Пусть $AB=a$, тогда по условию $SB=SC=SA=2a$.

Найдем длину BH из равнобедренного ΔBSC:

$BH\cdot SC=SN\cdot BC$, где SN – высота равнобедренного треугольника BSC, $BH=\frac{SN\cdot BC}{SC}$.

Из прямоугольного ΔSNC:

$$SN=\sqrt{SC^2-NC^2},\ SN=\sqrt{4a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{15}.$$

Тогда $BH=\frac{a\sqrt{15}\cdot a}{2\cdot 2a}=\frac{\sqrt{15}}{4}a$, $\cos\angle ABH=\frac{a\cdot 4}{2\cdot\sqrt{15}a}=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$.

Исходя из свойств данной в условии задачи геометрической фигуры, более удобным следует считать геометрический метод, причем при построении угла между прямой и плоскостью мы использовали второй из вышеуказанных способов.

Решение задач, в которых требуется найти величину угла, образованного отдельными элементами тела, значительно упрощается, если использовать известные из тригонометрии зависимости между элементами треугольников. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Найдите плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, если этот угол равен углу между боковым ребром и плоскостью основания пирамиды.

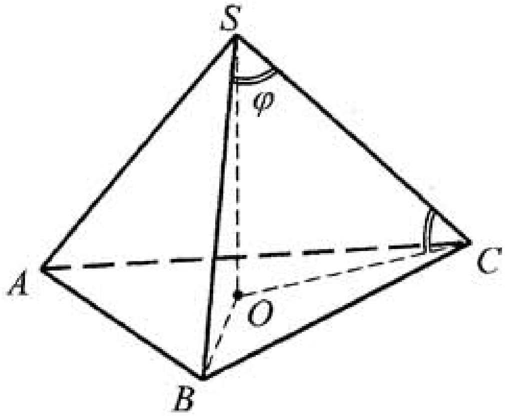
Решение

1. Построение чертежа.

$SABC$ – правильная пирамида; O – центр правильного треугольника ABC; SO – высота пирамиды. Боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания $\angle(SC;(ABC))=\angle SCO$.

Пусть $\angle SCO=\varphi$. По условию задачи все плоские углы при вершине S равны.

Заметим, что угол φ входит в прямоугольный треугольник SOC ($\angle SOC=90°$) и в равнобедренный треугольник боковой грани BSC. Используя соотношения между элементами этих треугольников, можно найти искомую величину – угол φ.



2. Введем вспомогательную величину: обозначим $SC=l$. Для того чтобы найти угол φ из ΔBSC, необходимо выразить сторону BC через l, поскольку $SB=SC=l$. Из прямоугольного треугольника SOC имеем $OC = l \cdot \cos\varphi$. В равностороннем ΔABC OC есть радиус описанной окружности. Известно, что $R = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, где a – длина стороны равностороннего треугольника. Учитывая это, получим $l\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}BC$ или $BC = \sqrt{3}l \cdot \cos\varphi$.

Для треугольника BSC запишем теорему косинусов:

$$BC^2 = SC^2 + SB^2 - 2 \cdot SC \cdot SB \cdot \cos\varphi \Rightarrow 3l^2\cos^2\varphi = 2l^2 - 2l^2\cos\varphi.$$

Упростив полученное равенство, получим квадратное уравнение относительно $\cos\varphi$: $3\cos^2\varphi + \cos\varphi - 2 = 0$.

Решив его, получим: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$;

откуда $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

Решение следующей задачи иллюстрирует, сколь важен грамотно выполненный чертеж и его подробный анализ для нахождения искомой величины.

Задача 4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между боковым ребром и плоскостью основания равен углу между

боковым ребром и плоскостью боковой грани, не содержащей это ребро. Найдите этот угол.

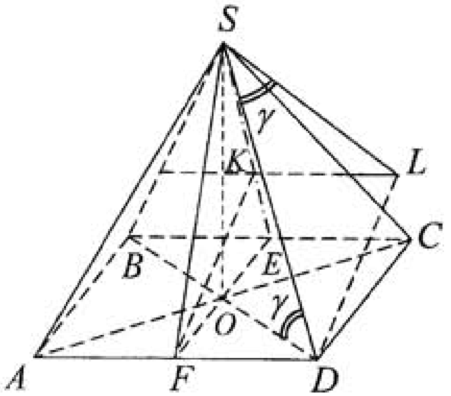
Решение

$SABCD$ – правильная пирамида.

O – центр квадрата, SO – высота пирамиды.

1. Построение углов между ребром SD и плоскостями (ABC) и (SBC).

Так как $SO\perp(ABC)$ и $SD\cap(ABC)=D$, то $\angle SDO=\angle(SD;(ABC))$.



Рассмотрим построение угла между SD и плоскостью (SBC).

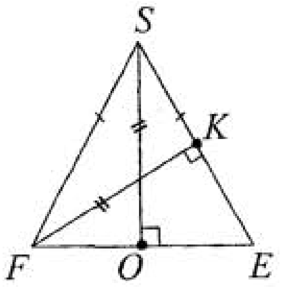
Поскольку указанная прямая пересекает плоскость SBC в точке S, то для нахождения проекции прямой SD на плоскость необходимо провести перпендикуляр через точку D к плоскости (SBC). Для этого рассмотрим вспомогательную плоскость, проходящую через высоту SO и апофему SF грани SAD. $FO\cap BC=E$, E – середина BC, так как $FO\|DC$.

$$\left.\begin{array}{l} SO\perp BC,\\ FO\perp BC \end{array}\right| \Rightarrow (SOF)\perp BC,$$ тогда по признаку перпендикулярности плоскостей $(SBC)\perp(SFO)$, причем $(SFO)\cap(SBC)=SE$. ΔSFE – сечение пирамиды вспомогательной плоскостью (SOF). Треугольник SFE – равнобедренный. Пусть FK – высота в ΔSFE, $FK\perp SE$, тогда $FK\perp(SBC)$. Рассмотрим плоскость (FDK): $FD\|BC$, значит $(FDK)\cap(SBC)=n$, при этом $K\in n$, $n\|BC$.

$DL\|FK$, $L\in n$. Так как $FK\perp SBC$, то $DL\perp SBC$, и тогда SL – проекция прямой SD на плоскость (SBC). $\angle DSL$ – угол между боковым ребром SD и плоскостью грани SBC. $\angle DSL=\angle SDO$ согласно условию задачи. Обозначим $\angle SDO=\gamma$.

3. Искомая величина – угол γ – входит в два прямоугольных треугольника ΔSOD и ΔSLD с общей гипотенузой SD. Согласно условию задачи $\angle SDO=\angle DSO$, а тогда $\Delta SOD=\Delta DLS$. Из равенства треугольников следует, что $SO=DL$.

Учитывая, что $FD\|n$, имеем $DL=FK$, а значит $FK=SO$. Из прямоугольного треугольника SOD выразим $tg\varphi=\frac{SO}{OD}$. Для нахождения соотношения рассмотрим равнобедренный треугольник SFE, $SF=SE$. Отрезки SO и FK – его высоты, ранее установлено, что $SO=FK$. Отсюда нетрудно сделать вывод, что $SE=FE$, а тогда ΔSFE – равносторонний.



Пусть сторона квадрата $AB=a$, тогда $FE=a$. Выразим SO и OD через a: $OD=\frac{1}{2}BD=\frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

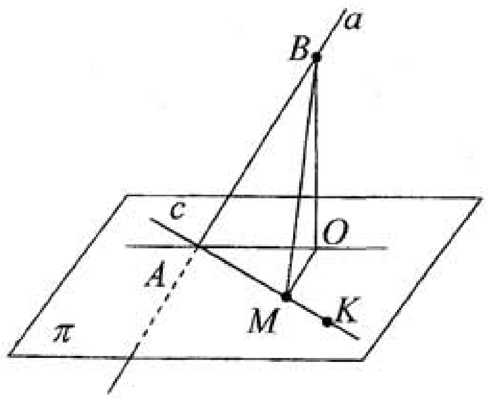
Следовательно, $tg\varphi=\sqrt{3/2}$, $\varphi=arctg\sqrt{3/2}$.

При вычислении угла между прямой и плоскостью иногда удобно использовать соотношение, часто называемое теоремой о трех косинусах.

Пусть α – величина угла между прямой a и плоскостью π, $a\cap\pi=A$. В плоскости π через точку A проведена прямая c, образующая угол γ с прямой a и угол β с проекцией прямой a на плоскость π.

Докажите, что имеет место соотношение:

$$\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta.$$



Доказательство

Пусть $BO\perp\pi$, $B\in a$, $O\in\pi$, тогда AO – проекция прямой a на плоскость π. Очевидно, что $\angle BAO=\alpha$, $\angle BAK=\gamma$, $\angle OAK=\beta$. Проведем $OM\perp c$, $M\in c$. Согласно теореме о трех перпендикулярах $BM\perp c$. ΔBAM – прямоугольный, значит:

$$\cos\gamma=\frac{AM}{AB}. \qquad (*)$$

Выразим AM и AB соответственно из прямоугольных ΔAMO и ΔAOB: $AM=AO\cdot\cos\beta$; $AB=\frac{AO}{\cos\alpha}$.

Подставив полученные выражения для AM и AB в соотношение (*), получим $\cos\gamma=\cos\alpha\cdot\cos\beta$.

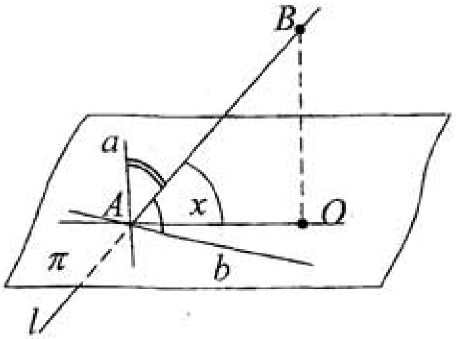
Задача 5. В плоскости π проведены две перпендикулярные прямые. Прямая l образует с этими прямыми углы 45° и 60°. Найдите угол, образованный прямой l с этой плоскостью.

Решение

$a\subset\pi$, $b\subset\pi$, $a\perp b$, $l\cap\pi=A$; $\angle(a,l)=45^\circ$, $\angle(b,l)=60^\circ$, $BO\perp\pi$, AO – проекция прямой l на плоскость π.

Пусть φ – угол, образованный прямой b с проекцией прямой l.

Обозначим через x угол между прямой l и плоскостью π, причем $x<90^\circ$.



Используя теорему о трех косинусах, получим два соотношения: $\cos 60^\circ = \cos\varphi \cdot \cos x$ и $\cos 45^\circ = \cos(90^\circ - \varphi)\cdot \cos x$ или

$\frac{1}{2} = \cos\varphi \cdot \cos x$ и $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\varphi \cdot \cos x$.

Из второго равенства имеем $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\cos x}$, значит

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}{\sqrt{2}\cdot\cos x}$.

Тогда $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2\cos^2 x - 1}}{\sqrt{2}\cdot\cos x}\cdot\cos x \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\cos^2 x - 1}$.

Отсюда получим $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, но так как $x<90^\circ$, то

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а значит $x = 30^\circ$.

3. Угол между плоскостями

Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой c.

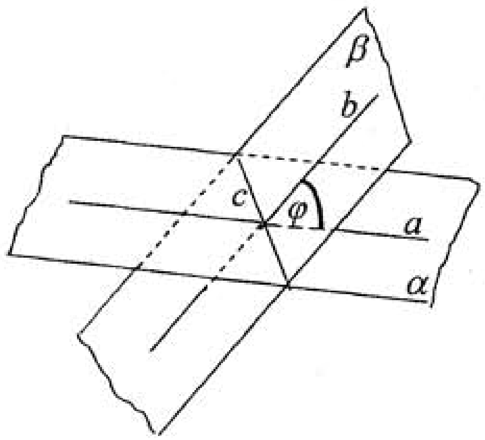
Плоскость $\gamma\perp c$ и пересекает плоскости α и β соответственно по прямым a и b.

Углом между плоскостями α и β называют угол между прямыми a и b.

$\varphi=\angle(\alpha, \beta)=\angle(a, b)$, при этом $a\perp c$ и $b\perp c$.

Если $\alpha \parallel \beta$, то $\varphi=\angle(\alpha, \beta)=0^\circ$.

Если $\alpha\perp\beta$, то $\varphi=\angle(\alpha, \beta)=90^\circ$.



Так как угол между плоскостями определяется как угол между пересекающимися прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными линии их пересечения, то с учетом дополнения определения можно сказать, что $0^\circ\le\varphi\le 90^\circ$.

При вычислении угла между плоскостями пользуются как геометрическим методом, так и координатно-векторным.

Приведем примеры решения задач, используя *геометрический метод* рассуждения.

Задача 1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен плоскостью, проходящей через вершину A и середины M и N ребер BC и DD_1 куба. Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания куба.

Решение

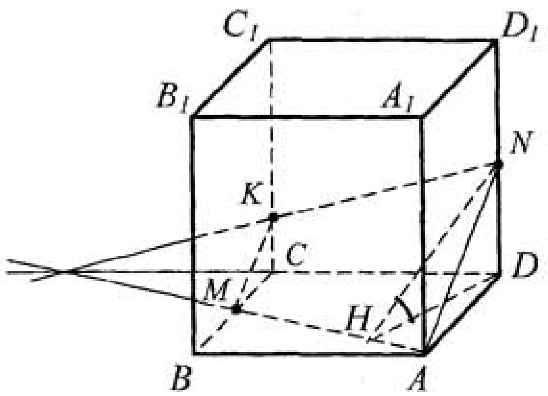
1. Построение сечения.

$\lozenge AMKN$ – искомое сечение.

2. Построение угла между плоскостями (AMN) и (ABC).

$MA=(AMN)\cap(ABC)$

В плоскости ABC через точку D проведем перпендикуляр к линии пересечения плоскостей. $DH\perp MA$. Так как $ND\perp(ABC)$, то по теореме трех перпендикуляров $NH\perp MA$. $\angle NHD$ есть угол между плоскостями (MAN) и (ABC).



3. Вычисление величины угла между плоскостями.

Рассмотрим угол NHD как угол прямоугольного треугольника NHD, $\angle NDH = 90^\circ$, $tg\,\angle NDH = \dfrac{ND}{HD}$.

Пусть длина ребра куба равна m, тогда $ND = \dfrac{m}{2}$, HD – высота треугольника MDA. Так как M – середина BC, то $S_{\Delta AMD} = \dfrac{m^2}{2}$

Но с другой стороны, $S_{\Delta AMD} = \dfrac{1}{2} MA \cdot DH$, значит $MA \cdot DH = m^2$

Нетрудно вычислить MA из ΔBMA: $MA = \dfrac{m\sqrt{5}}{2}$.

Тогда $DH = m^2 : \dfrac{m\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2m}{\sqrt{5}}$. Окончательно получим:

$$tg\,\angle NDH = \frac{\sqrt{5}}{4},\ \angle NDH = arctg\frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Задача 2. Основанием пирамиды $SABC$ служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B и углом A, равным α. Каждое боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите угол между плоскостями SAC и SBC.

Решение

I способ

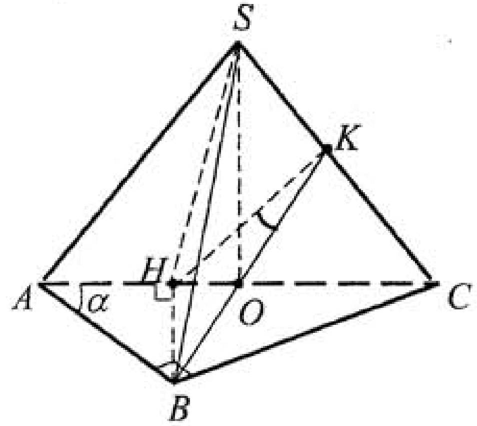
1. Построение угла между плоскостями.

Так как все ребра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания, то ее высота проектируется в центр O описанной около прямоугольного ΔABC окружности, то есть O – середина гипотенузы AC. Отсюда следует, что высота SO лежит в грани ASC, тогда по признаку перпендикулярности плоскостей $(SAC)\perp(ABC)$.

В плоскости (ABC) через точку B проведем перпендикуляр BH к AC, $H\in AC$, тогда $BH\perp(SAC)$, $SC=(ASC)\cap(BSC)$.

(ASC): ΔASC – прямоугольный ($\angle ASC=90^\circ$) и равнобедренный.

Проведем $HK \| AS \Rightarrow HK\perp SC$.



Тогда по теореме трех перпендикуляров получаем:

$$\left.\begin{array}{l} BH \perp (SAC), \\ BK - \text{наклонная}, \\ HK - \text{проекция}, HK \perp SC \end{array}\right| \Rightarrow BK \perp SC.$$

Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} BK \subset (BSC),\ BK \perp SC \\ HK \subset (ASC),\ HK \perp SC \end{array}\right| \Rightarrow \angle HKB - \text{искомый.}$$

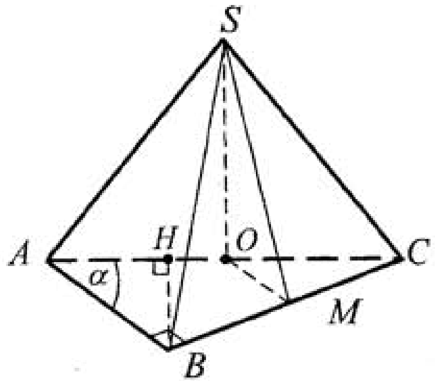
2. Вычислим угол HKB из прямоугольного треугольника BHK, $\angle BHK=90^\circ$. $tg\,\angle BHK = \dfrac{BH}{HK}$, ΔBHC – прямоугольный.

Пусть $BC = m$, $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$, так как в прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = \alpha$. Тогда $BH = m \cdot \cos\alpha$, $HC = m \cdot \sin\alpha$

ΔHKC – прямоугольный, равнобедренный, HC – гипотенуза; $HK = HC \cdot \sin 45^\circ \Rightarrow HK = \frac{m\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$;

$$tg\ \angle BHK = m\cos\alpha : \frac{m\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \sqrt{2} \cdot ctg\alpha,$$

$$\angle BHK = arctg(\sqrt{2}ctg\alpha).$$



II способ

Рассмотрим нахождение угла между плоскостями с использованием формулы.

$S_{пр} = S \cdot \cos\varphi$, где $S_{пр}$ – площадь ортогональной проекции многоугольника, S – площадь многоугольника, φ – угол между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

Так как $BH \perp (ASC)$ (см. предыдущее обоснование), то треугольник HSC – проекция ΔBSC на плоскость ASC.

Выразим площади треугольников HSC и BSC через m и α

$S_{\Delta HSC} = \frac{1}{2} HC \cdot SO$. В прямоугольном ΔASC $SO = \frac{1}{2} AC$, но из треугольника ABC $AC = \frac{m}{\sin\alpha}$. Тогда $S_{HCS} = \frac{1}{2} m \cdot \sin\alpha \cdot \frac{m}{2\sin\alpha} = \frac{m^2}{4}$

$$S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2} BC \cdot SM, \text{ где } SM \perp BC,\ M – \text{середина } BC.$$

Найдем SM из прямоугольного ΔSOM, $SO = \frac{m}{2\sin\alpha}$,

$OM = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{tg\alpha}$, тогда:

$$SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{m}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha}.$$

$$S_{\Delta BSC} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{m}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^2\alpha} = \frac{m^2}{4}\frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\cos\varphi = \frac{S_{пр}}{S_{\Delta BSC}}, \text{ значит } \cos\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}.$$

Но если $\cos\varphi = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$, то $tg\,\varphi = \sqrt{2}ctg\,\alpha$ (убедитесь самостоятельно).

Угол между плоскостями SAC и SBC – $arctg(\sqrt{2}ctg\alpha)$.

Библиографический список

1. Корикова, Т. М., Суслова, И. В. Элементарная математика. Стереометрия [Текст]: учебное пособие / Т. М. Корикова, И. В. Суслова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006.
2. Потоскуев, Е. В., Звавич, Л. И. Геометрия. 11 класс: задачник для классов с углубленным и профильным обучением математике [Текст] / Е. В. Потоскуев, Л. И. Звавич. – М.: Дрофа, 2005.
3. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. Стереометрия. 10 – 11 классы [Текст]: пособие для учащихся / И. Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2000.
4. Якиманская, И. С. Психологические основы математического образования [Текст]: учебное пособие / И. С. Якиманская. – М.: Академия, 2004.

Г. Ю. Буракова, Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина

Сложная функция в школьном курсе математики

Функциональная линия – «стержень» школьного курса алгебры. За период обучения учащиеся знакомятся с достаточно большим набором элементарных функций. Однако большинство выпускников школ не могут дать определение элементарной функции, считают функцию $y=\log_2(1-x)$ возрастающей, так как основание логарифма больше единицы, а в качестве сложной функции приводят, например, функцию вида $f(x)=\dfrac{e^x+x^{2009}+\log_x 3}{7-\sin x}$. Одной из причин сложившейся ситуации можно считать отсутствие в большинстве альтернативных учебников определения операций на множестве функций (без чего нельзя определить элементарную функцию) и согласования свойств функций с операциями на этом множестве.

В школьных учебниках алгебры и начал анализа один и тот же математический объект называется по-разному: сложная функция, композиция функций, суперпозиция функций. Если связать эти термины с алгебраической структурой на множестве функций, то композицию надо рассматривать как операцию, а сложную функцию – как результат этой операции.

Формально школьники имеют дело со сложными функциями уже в основной школе, при этом само понятие им неизвестно. Так, например, в 9 классе использование функции вида $y=\sqrt{4-x^2}$ в упражнениях на нахождение области определения и области значений позволяет подвести учащихся к введению понятия сложной функции.

Понятие сложной функции может быть введено двумя путями: конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным.

В первом случае введение понятия проходит несколько этапов.

1. На первом этапе можно выполнить следующее упражнение. Рассмотрите функции, подумайте, чем они отличаются:

a) $y=\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x-2}$, c) $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=\sqrt[3]{\ln x}$,

b) $y=x^2$ и $y=(x^2-4x+3)^2$, d) $y=5^x$ и $y=5^{\sqrt{x}}$.

С помощью этого задания выявляется общий признак функций, стоящих во втором столбце: в функциях аргумент x заменен какой-либо другой функцией от него.

Можно использовать и другие задачи, приводящие к понятию сложной функции, например, задачи из курса физики.

2. Выясняются общие признаки понятия сложной функции, которые его характеризуют. Таким признаком будет то, что для

функции вместо аргумента снова используется какая-либо функция от него, то есть берется «функция от функции».

3. Формулируется определение сложной функции (композиции функций).

4. Определение закрепляется путем выполнения различных упражнений.

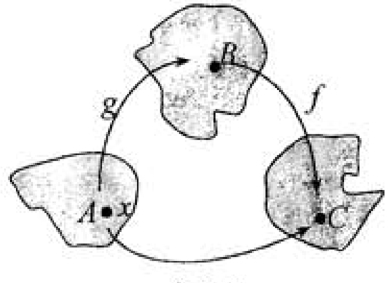
При абстрактно-дедуктивном способе введения понятия сложной функции ее определение формулируется сразу, без каких-либо предварительных разъяснений, приводятся примеры из различных областей, знакомых учащимся. Усвоение понятия сложной функции происходит в процессе выполнения упражнений.

Приведем определения сложной функции из школьных учебников алгебры и начал анализа.

1. Функция f ставит в соответствие числу x число y, а функция g – числу y число z. Говорят, что h есть *сложная функция*, составленная из функций g и f, и пишут: $h(x)=g(f(x))$ [1].

2. Пусть даны две функции $z=f(y)$ и $y=g(x)$. *Сложной* функцией (или *композицией* функций f и g) называется функция $z=h(x)$, значения которой вычисляются по правилу $h(x)=f(g(x))$ (то есть сначала вычисляется $g(x)$, при этом получается некоторое число y, а затем вычисляется значение f в точке y) [3].

3. Пусть g – функция из A в B, а f – функция из B в C. Тогда функция, сопоставляющая каждому элементу x множества A элемент $f(g(x))$ множества C, называется композицией функций g и f и обозначается $y=f(g(x))$. (Иногда такую функцию называют «сложной функцией») [4].



f(g(x))

4. Пусть функция $y = F(u)$ определена на множестве G, а функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве X, и множество всех ее значений принадлежит множеству G. Тогда любому $x \in X$ функция φ ставит в соответствие число $u \in G$, а этому числу u функция F ставит в соответствие число y, то есть y является функцией от x на множестве X.

Другими словами, получена функция $y = F(\varphi(x))$, определенная на множестве X. Эту функцию называют функцией от функции или *сложной функцией*. Сложную функцию называют также *суперпозицией двух функций* φ и F [2].

5. Пусть даны числовые функции f и g, такие, что $E(f) \subset D(g)$. Их *композицией* называется новая числовая функция F, заданная на $D(f)$, которая каждому $x \in D(f)$ ставит в соответствие число $g(f(x))$. Функцию F обозначают также $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ [5].}$$

Анализируя приведенные определения, заметим, что не в каждом из них учтено условие существования композиции функций, отсутствует единство терминологии.

При усвоении нового понятия сложной функции учащиеся встречаются со следующими трудностями:

1) В большинстве определений используется три переменные x, y, z ($z = f(y)$, $y = g(x)$). На практике обычно требуется составить композицию функций, обозначенных одной и той же переменной: $y = f(x)$ и $y = g(x)$. При этом важно установить порядок, в котором вычисляются значения данных функций ($y = f(g(x))$ или $y = g(f(x))$).

2) Учащиеся не всегда осознают, что $F = g \circ f$ и $F = f \circ g$ разные функции. Операция композиции некоммутативна. В терминах «функция от функции» в записи $F = g \circ f$ правая функция является внутренней, а левая – внешней, то есть $F(x) = g(f(x))$.

3) Не для каждой пары функций существует их композиция. При составлении композиции $F = g \circ f$ необходимо выполнение условия: $E(f) \cap D(g) \neq \emptyset$.

В альтернативных учебниках понятие вводится в разных разделах, поэтому и набор задач не систематизирован.

Задачи можно классифицировать в зависимости от дидактических целей их решения. Среди них выделяют: пропедевтические, обучающие, тренировочные, задачи контролирующего характера, конструктивные [7].

Представленная классификация не является строгой, так как одна и та же задача в зависимости от целей ее использования может относиться к разным видам классификации.

Остановимся на рассмотрении некоторых видов задач.

Задачи первых двух видов можно отнести к упражнениям на осознание логической структуры определения.

I. Составление композиций функций

Задача 1. Построить следующие композиции: $F = f \circ f$, $F = g \circ g$, $F = f \circ g$, $F = g \circ f$, если:

a) $f(x) = x^2$ и $g(x) = 2^x$;

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } x > 0 \end{cases}$ и $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ -x^2, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \ln x$ и $g(x) = \sin x$;

d) $f(x) = 10^x$ и $g(x) = \ln x$;

e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $g(x) = \frac{1}{x}$.

Решение

$f \circ f$	$g \circ g$
a) $F(x) = x^4$;	$F(x) = 2^{2^x}$;
b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0, \\ x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$	$F(x) = 0, x \in \boldsymbol{R}$;
c) $F(x) = \ln \ln x$;	$F(x) = \sin(\sin x)$;
d) $F(x) = 10^{10^x}$;	$F(x) = \ln(\ln x)$;
e) $F(x) = \lvert x \rvert$, *если* $x \in [-1;1]$.	$F(x) = x$, *если* $x \neq 0$.

$f \circ g$	$g \circ f$
a) $F(x)=2^{2x}$;	$F(x)=2^{x^2}$;
b) $F(x)=0$;	$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x \le 0,\\ -x^2, \text{ если } x>0;\end{cases}$
c) $F(x)=\ln(\sin x)$;	$F(x)=\sin(\ln x)$;
d) $F(x)=10^{\ln x}$;	$F(x)=x\ln 10$;
e) $F(x)=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}$.	$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задача 2. Найти $f_2=f(f(x))$ и $f_3=f(f(f(x)))$, если $f_n(x)=\underbrace{f(f(f\dots f(x)))}_{n\ раз}$.

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$; b) $f(x)=3-x$; c) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Решение

a)	b)
$f_2=\dfrac{x-1}{x}$, *если* $x\ne 1, x\ne 0$	$f_2=x$
$f_3=x$, *если* $x\ne 1, x\ne 0$	$f_3=3-x$
$f_n=\left[\begin{array}{l}\dfrac{x-1}{x}, \text{ если } n=3k-1;\\ \dfrac{1}{1-x}, \text{ если } n=3k-2;\\ x, \text{ если } n=3k, k\in N.\end{array}\right.$	$f_n=\left[\begin{array}{l}3-x, \text{ если } n=2k-1;\\ x, \text{ если } n=2k, k\in N.\end{array}\right.$

c)
$f_2=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}=x$
$f_n=\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ если } n=2k-1;\\ x, \text{ если } n=2k, k\in N.\end{array}\right.$

Задача 3. Запишите формулы, задающие композиции:

а) $u\circ v\circ w\circ y\circ z$; б) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$; в) $w\circ y\circ v\circ z\circ u$; г) $y\circ v\circ z\circ u\circ w$, если $u=\sin x$, $v=\log_2 x$, $w=1+x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$.

Задача 4. Докажите ассоциативность композиции, то есть что $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$.

Решение

Рассмотрим функции: $F=(f\circ g)\circ h$ и $\varphi=f\circ(g\circ h)$.

Докажем, что $F=\varphi$.

По определению композиции функций:

$$F(x)=f(g(x))\circ h(x)=f(g(h(x))),$$

$$\varphi=f\circ(g(h(x)))=f(g(h(x))),\ F(x)=\varphi(x).$$

Утверждение доказано.

Задача 5. Докажите, что композиция двух линейных функций является функцией линейной.

Решение

Рассмотрим линейные функции:

$$f_1(x)=k_1\cdot x+b_1 \text{ и } f_2(x)=k_2\cdot x+b_2.$$

$F=f_1\circ f_2$; $F(x)=k_1\cdot(k_2\cdot x+b_2)+b_1$, $F(x)=k_1\cdot k_2\cdot x+k_1\cdot b_2+b_1$.

Обозначим: $k_1\cdot k_2=k$, $k_1\cdot b_2+b_1=b$.

Получим: $F(x)=k\cdot x+b$ – функция линейная.

Задача 6. Докажите, что композиция двух дробно-линейных функций $f(x)=\dfrac{a_1x+b_1}{c_1x+d_1}$ и $g(x)=\dfrac{a_2x+b_2}{c_2x+d_2}$ является дробно-линейной функцией.

Решение

Составим сложную функцию:

$$F(x)=f(g(x)),\ F(x)=\frac{a_1\cdot\dfrac{a_2\cdot x+b_2}{c_2\cdot x+d_2}+b_1}{c_1\cdot\dfrac{a_2\cdot x+b_2}{c_2\cdot x+d_2}+d_1}.$$

Упростим полученное выражение:

$$F(x)=\frac{(a_1\cdot a_2+b_1\cdot c_2)\cdot x+a_1\cdot b_1+b_1\cdot d_2}{(c_1\cdot a_2+d_1\cdot c_2)\cdot x+c_1\cdot b_2+d_1\cdot d_2},$$

т.е. $F(x)$ имеет вид: $F(x)=\dfrac{a\cdot x+b}{c\cdot x+d}$, то есть получим дробно-линейную функцию.

Задача 7. Найдите все такие линейные функции f, для которых $f(f(x))=4x+3$.

Решение

Рассмотрим линейную функцию $f(x)=k\cdot x+b$.

Составим композицию:

$$f(f(x))=k(k\cdot x+b)+b;\ f(f(x))=k^2\cdot x+b\cdot(k+1).$$

По условию $f(f(x))=4x+3$. Получим: $k^2\cdot x+b\cdot(k+1)=4x+3$.

Из условия равенства двух многочленов получаем:

$$\begin{cases}k^2=4,\\ b\cdot(k+1)=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}k=2,\\ b=1;\end{cases}\quad \text{или} \quad \begin{cases}k=-2,\\ b=-3.\end{cases}$$

Ответ: $f(x)=2x+1$ или $f(x)=-2x-3$.

II. Нахождение функций, составляющих композицию

Задача 1. Задайте формулами элементарные функции, из которых составлена сложная функция.

a) $h(x)=\cos(x^2+1)$; b) $h(x)=(2x+1)^7$;

c) $h(x)=tg\dfrac{1}{x}$; d) $h(x)=\ln^2(1+e^x)$;

e) $y=\dfrac{1}{2^{\sqrt{x}}}$; f) $y=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2$.

III. Согласование свойств функций с операцией композиции

Решение этого вида задач способствует систематизации знаний, так как происходит установление и развитие связей и отношений изучаемого понятия с другими.

Теорема 1. Пусть система функций $f, g, \ldots, h$ допускает построение композиции $F=f\circ g\circ\ldots\circ h$ и каждая из них обладает определенным характером монотонности. Тогда F возрастает (убывает), если она содержит четное (нечетное) число убывающих на соответствующих множествах функций.

Теорема 2. Композиция любого конечного числа функций $F=f\circ g\circ\ldots\circ h$ будет четной функцией, если функция h – четная.

Теорема 3. Композиция любого конечного числа функций, каждая из которых является четной или нечетной, есть функция четная, если среди составляющих есть хотя бы одна четная.

Теорема 4. Если $y=f(x)$ – периодическая функция с периодом $T\neq 0$, то функция $y=f(a\cdot x+b)$, где $a\neq 0$ и $b\in \boldsymbol{R}$, тоже периодическая с периодом $\dfrac{T}{|a|}$.

Теорема 5. Пусть функции f и φ допускают построение композиции $f\circ\varphi$. Тогда, если функция φ периодическая, композиция $f\circ\varphi$ тоже периодическая.

Задача 1. Определите характер и промежутки монотонности функций:

a) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-8}$; b) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+4x+5)$;

c) $f(x)=2^{x^2}$; d) $y=\log_2(\cos x)$.

Решение

a) f убывает на каждом из промежутков $(-\infty;2)$ и $(2;+\infty)$ как композиция возрастающей функции $g(x)=x^3-8$ и убывающей $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$.

b) f – композиция квадратичной $g(x)=x^2+4x+5$ и логарифмической $\varphi(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ функций. Функция φ – убывающая функция g меняет характер монотонности в точке $x=-2$, поэтому f возрастает на промежутке $(-\infty;-2)$ как композиция убывающих функций и убывает на промежутке $(-2;+\infty)$ как композиция возрастающей и убывающей функций.

c) f – композиция квадратичной и показательной функций. Функция f убывает на промежутке $(-\infty;0)$ и возрастает на промежутке $(0;+\infty)$.

d) $D(f)=\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z\right)$,

f – композиция функций $g(x)=\cos x$ и $\varphi(x)=\log_2 x$. Функция f возрастает на $\left(2\pi n-\dfrac{\pi}{2};2\pi n\right)$ и убывает на $\left(2\pi n;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)$.

Задача 2. Определите характер «четности» функции:

a) $f(x)=tg^2 x$; b) $y=\sin x^3$;

c) $f(x)=\lg(\cos x)$; d) $f(x)=\cos(\sin^3 x)$.

Решение

a) $f=g\circ\varphi$, где $\varphi(x)=tgx$, $g(x)=x^2$. Одна из функций составляющих композицию, четная, следовательно, и f – функция четная.

b) $f=g\circ\varphi$, где $\varphi(x)=x^3$, $g(x)=\sin x$. Обе функции φ g – нечетные, следовательно, f – нечетная.

c) $f=g\circ\varphi$, где $\varphi(x)=\cos x$, $g(x)=\lg x$. Первая функция композиции – четная, значит, и f – четная.

d) $f=g\circ\varphi\circ\psi$, где $\varphi(x)=x^3$, $g(x)=\cos x$, $\psi(x)=\sin x$. Одна из функций, составляющих композицию, четная, следовательно, f – четная.

Задача 3. Исследуйте на периодичность функции:

a) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$; b) $f(x)=\sin\dfrac{2x+1}{2}$;

c) $f(x)=2^{tgx}$; d) $f(x)=\cos^2 2x$.

Задача 4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном множестве:

a) $f(x)=\log_{0,5}(2x-x^2)$, $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\dfrac{3}{4}\right]$;

b) $f(x)=e^{3x^2-x^3-4}$, $x\in[1;3]$.

Решение

a) $f=g\circ\varphi$, где $\varphi(x)=2x-x^2$, $g(x)=\log_{0,5} x$. Функция f определена на промежутке $(0;2)$. На этом промежутке функция g убывает, а функция φ меняет характер монотонности в точке $x=1$, которая для функции f будет точкой экстремума.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\log_{0,5}\left(2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\log_{0,5}\frac{3}{4}=\log_{0,5}\frac{12}{16};$$

$$f(1)=\log_{0,5}(2\cdot 1-1)=0;$$

$$f\left(1\frac{3}{4}\right)=\log_{0,5}\left(\frac{7}{2}-\frac{49}{16}\right)=\log_{0,5}\frac{7}{16};\ 0<\log_{0,5}\frac{12}{16}<\log_{0,5}\frac{7}{16}.$$

$$f_{наиб.}=\log_{0,5}\frac{7}{16},\ f_{наим.}=0.$$

b) Найдем производную сложной функции $f=g\circ\varphi$, где $\varphi(x)=-x^3+3x^2-4$, $g(x)=e^x$.

$f'(x)=e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=e^{\varphi(x)}\cdot 3x\cdot(2-x)$. Отрезку $[1;3]$ принадлежит одна из критических точек: $x=2$. Вычислим значение функции f критической точке и на концах отрезка: $f(1)=\dfrac{1}{e^2}$; $f(2)=1$; $f(3)=\dfrac{1}{e^4}$. Отсюда $f_{наиб.}=1$, $f_{наим.}=\dfrac{1}{e^4}$.

Задача 5. Найдите наибольшее значение функции:

a) $f(x)=\log_{\sqrt{5}}(-x^2-10x)$; b) $f(x)=2^{\cos x}$.

Решение

a) f – композиция квадратичной и логарифмическо[й] функций. $D(f)=(-10;0)$. На промежутке $(-10;-5)$ f возрастае[т] как композиция двух возрастающих функций. На промежутк[е] $(-5;0)$ f убывает как композиция убывающей и возрастающе[й] функций. Следовательно, в точке $x=-5$ функция f принимае[т] наибольшее значение: $f(-5)=4$.

b) Функция f – композиция тригонометрической и показа[тельной] функций: $f=\varphi\circ g$, где $\varphi(x)=2^x$, $g(x)=\cos x$. Функция φ возрастает на R, функция g ограничена: $E(g)=[-1;1]$. Следовательн[о] f принимает наибольшее значение при большем значении показател[я] $\max f=2$.

IV. Нахождение области определения и области значени[й] сложной функции

По формулировке задания – задачи стандартные, они могу[т] быть решены без применения дифференциального исчисления.

Задача 1. Найдите область определения функции:

$$\text{a) } f(x)=\ln\left(\log_{0,5}\left(\frac{4}{3}-2^{x-1}\right)\right);\ \text{b) } f(x)=\sqrt{\sin\left(\sqrt{x}\right)}.$$

Решение

a) Заданную функцию представим в виде композиции $f=\varphi\circ\psi\circ g$, где $g(x)=\frac{4}{3}-2^{x-1}$, $\varphi(x)=\ln x$, $\psi(x)=\log_{0,5}x$. Область определения сложной функции найдем из решения систем[ы] неравенств: $\begin{cases}\frac{4}{3}-2^{x-1}>0,\\ \log_{0,5}\left(\frac{4}{3}-2^{x-1}\right)>0.\end{cases}$

В результате равносильных преобразований получим: $\begin{cases}2^x<\frac{8}{3}\\ 2^x>\frac{2}{3}\end{cases}$

Следовательно, $1-\log_2 3<x<3-\log_2 3$.

b) $f=g\circ\varphi\circ g$, где $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\sin x$. Учитывая ус[ло]вия существования каждой из функций, составляющих компо[зи]цию, запишем систему неравенств: $\begin{cases}x\geq 0,\\ \sin\sqrt{x}\geq 0.\end{cases}$ Решим неравен[ств]о $\sin\sqrt{x}\geq 0$: $2\pi n\leq\sqrt{x}\leq\pi+2\pi n,\ n\in N\cup\{0\}$.

Тогда $4\pi^2n^2\leq x\leq(\pi+2\pi n)^2$. Значит,

$$D(f)=\left\{x/4\pi^2n^2\leq x\leq\pi^2(1+2n)^2,\ n\in N\cup\{0\}\right\}.$$

Задача 2. При каких значениях a функция

$$f(x)=\log_{25-a^2}\left(\cos x+\sqrt{8}\sin x+a\right)$$

[опр]еделена при всех $x\in R$.

Решение

Найдем область допустимых значений параметра a из ре[ше]ния системы неравенств: $\begin{cases}25-a^2>0,\\ 25-a^2\neq 1;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a|<5,\\ |a|\neq 2\sqrt{6}.\end{cases}$

Следовательно, $a\in\left(-5;-2\sqrt{6}\right)\cup\left(-2\sqrt{6};2\sqrt{6}\right)\cup\left(2\sqrt{6};5\right)$.

[Дл]я ответа на поставленный вопрос задачи при найденных значе[ния]х параметра a неравенство $\cos x+\sqrt{8}\cdot\sin x+a>0$ должно [вып]олняться для всех $x\in R$.

$$3\sin(x+\varphi)+a>0,\ \text{где } \varphi=arctg\frac{\sqrt{8}}{8};\ \sin(x+\varphi)>-\frac{a}{3}.$$

Последнее неравенство верно при $\forall x\in R$, если $-\frac{a}{3}<-1$, [т]о есть $a>3$. С учетом ОДЗ параметра получаем:

$$a\in\left(3;2\sqrt{6}\right)\cup\left(2\sqrt{6};5\right).$$

Задача 3. Функция $y=f(u)$ определена на промежутке $[0]<u<1$. Найти область определения функций:

a) $f(x^2)$; б) $f(\sin x)$; в) $f(\ln x)$.

Решение

а) Область определения функции $y=f(x^2)$ находится из ус[ло]вия $0<x^2<1$, так как $u=x^2$. Следовательно, $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

б) $u=\sin x$, то есть $0<\sin x<1$,

$$x\in\left(2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\pi+2\pi n\right),\text{ где } n\in Z.$$

в) Заданная функция является композицией квадратичной логарифмической функций: $u=\ln x$, $0<\ln x<1$, $x\in(1;e)$.

Задача 4. Найти длину отрезка, который является областью значений для функции $f(x)=\log_3(3+24x-6x^2)$, заданной на промежутке $\left[-\sqrt{3}+2;\,4\right]$.

Решение

Найдем множество значений функции $u=3+24x-6x^2$ на отрезке $x\in\left[-\sqrt{3}+2;4\right]$. Абсцисса вершины параболы: $x_в=2$ принадлежит данному отрезку. Следовательно, в ней квадратичная функция достигает наибольшего значения: $u(2)=27$. Так как расстояние между точками 4 и 2 больше, чем между точками $-\sqrt{3}+2$ и 2, то наименьшее значение будет $u(4)=3$. Значит, $u(x)\in[3;27]$ при $x\in\left[-\sqrt{3}+2;4\right]$. Исходная функция $f(x)=\log_3(u(x))$ при этом имеет множеством значений отрезок, длина которого равна 2.

Ответ: 2.

Задача 5. На каком множестве определена функция $f(\varphi(x))$, если $f(x)=\sqrt{1-x^2}$; $\varphi(x)=1+\sin^2\pi x$.

Решение

I способ

$$f(\varphi(x))=\sqrt{1-\left(1+\sin^2\pi x\right)^2}=\sqrt{1-\left(1+2\sin^2\pi x+\sin^4\pi x\right)}=$$
$$=\sqrt{-2\sin^2\pi x-\sin^4\pi x}.$$

Область определения находится из условия:

$-2\sin^2\pi x-\sin^4\pi x\geq 0$, что возможно только при

$$-2\sin^2\pi x-\sin^4\pi x=0,$$

то есть $\sin^2\pi x\cdot\left(2+\sin^2\pi x\right)=0$; $\sin^2\pi x=0$; $\pi x=\pi n$, $n\in Z$.

Отсюда $x=n$, где $n\in Z$.

II способ

Область определения функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;1]$.

Множество значений $\varphi(x)=1+\sin^2\pi x$, $\varphi(x)\in[1;2]$. Следовательно, сложная функция $f(\varphi(x))$ существует только в случае, если $\varphi(x)=1$, то есть $\sin^2\pi x=0$; $x=n, n\in Z$.

Задача 6. Найти множество значений функции:

a) $f(x)=2^{x^2+4x-5}$;

b) $f(x)=\log_3\left(5+4x-x^2\right)$;

c) $f(x)=\sqrt{\lg\sin x}$;

d) $y=-\log_5\left(\cos^2 x\right)-2\log_{\cos x}125,\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение

a) $f=g\circ u$, где $g(x)=2^x$, $u(x)=x^2+4x-5=(x+2)^2-9$. $E(u)=[-9;+\infty)$. Так как функция g возрастает на $\boldsymbol{R}$, то $E(f)=\left[2^{-9};+\infty\right)$.

Ответ: $E(f)=\left[2^{-9};+\infty\right)$.

b) Ответ: $E(f)=(-\infty;2)$.

c) $f=g\circ\varphi\circ u$, где $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\lg x$, $\psi(x)=\sin x$. Область определения функции f находим из решения системы неравенств:
$$\begin{cases}\sin x>0,\\ \lg\sin x\geq 0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x>0,\\ \sin x\geq 1;\end{cases}\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0,\ E(f)=\{0\}.$$

Ответ: $\{0\}$.

d) Перейдем к основанию 5:

$$y=-2\log_5(\cos x)-\frac{6}{\log_5(\cos x)},\ x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right).$$

Заменим: $t=\cos x$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow E(t)=(0;1)$.

Снова введем замену:

$$u=\log_5 t,\ t\in(0;1)\ \Rightarrow\ E(u)=(-\infty;0).$$

Далее получим: $y=-2u-\frac{6}{u}=-2\left(u+\frac{3}{u}\right),\ u\in(-\infty;0)$.

Поскольку $z=u+\frac{3}{u}$ на промежутке $u\in(-\infty;0)$ изменяется в пределах $E(z)=\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]$, то $E(y)=\left[4\sqrt{3};\infty\right)$.

Задача 7. Решите уравнения:

a) $f(g(x))+g(2+f(x))=29$,

если $f(x)=0{,}5x^2-4x+13$, $g(x)=\begin{cases}26,\ \text{при } x\ge 6,\\ 4^x+\dfrac{24}{7-x},\ \text{при } x<6.\end{cases}$

b) $f(g(x))+g(4+f(x))=30$,

если $f(x)=x^4-x+6$, $g(x)=\begin{cases}24,\ \text{при } x\ge 5,\\ 4^x+2^{x+1},\ \text{при } x<5.\end{cases}$

c) $f(g(x))+g(5+f(x))=12$,

если $f(x)=x^4-3x+3$, $g(x)=\begin{cases}9,\ \text{при } x\ge 3,\\ 9^x+3^{x+2},\ \text{при } x<3.\end{cases}$

d)Пусть $f(x)$ – периодическая функция с периодом 8 такая, что $f(x)=8x-x^2$, $0\le x\le 8$.

Решите уравнение: $f(2x+16)+23=5f(x)$.

Решение

a) Найдем область значений функции f.

$f(x)=0{,}5\cdot(x-4)^2+5$. $E(f)=[5;+\infty)$. Тогда $2+f(x)\ge 7$, значит, $g(2+f(x))=26$. Заданное уравнение принимает вид: $f(g(x))+26=29$. Задача сводится к решению уравнения: $f(g(x))=3$:

$0{,}5\cdot g^2(x)-4\cdot g(x)+13=3$, $0{,}5\cdot g^2(x)-4\cdot g(x)+13=3$,

$\frac{D}{4}<0$, значит, действительных корней нет.

Ответ: действительных корней нет.

b) Оценим выражение $4+f(x)$. Преобразуем выражение x^4-x+6, выделив полные квадраты:

$$x^4-2x^2+1+2x^2-x+5=\left(x^2-1\right)^2+2\cdot\left(x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}\right)+4\frac{7}{8}=$$

$$=\left(x^2-1\right)^2+2\cdot\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+4\frac{7}{8}.$$

$f(x)>4\frac{7}{8}$, $4+f(x)>8\frac{7}{8}$. Значит, $g(4+f(x))=24$.

Получим уравнение: $f(g(x))+24=30$, $f(g(x))=6$,

$f(g(x))=g^4(x)-g(x)+6$, $g^4(x)-g(x)+6=6$, $g(x)\cdot\left(g^3(x)-1\right)=0$,

$g(x)=0$ или $g(x)=1$.

Уравнение $g(x)=0$ не имеет решений.

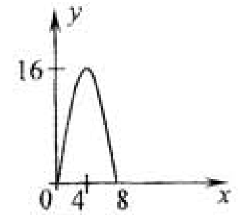
$g(x)=1$, так как $1<24$, то получим уравнение:

$$4^x+2\cdot 2^x=1,$$
$$4^x+2\cdot 2^x+1=2,$$
$$\left(2^x+1\right)^2=2,$$
$$\left[\begin{array}{l}2^x=-1-\sqrt{2},\quad \textit{решений нет}\\ 2^x=-1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$
$$x=\log_2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Ответ: $x=\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

c) Ответ: $\log_3\dfrac{\sqrt{81+4\sqrt[3]{3}}-9}{2}$.

d) Рассмотрим график функции $f(x)$ на отрезке $0\le x\le 8$.



Так как 8 – период функции $f(x)$, то

$$f(2x+16)=f(2x+8)=f(2x).$$

Значит, уравнение $f(2x+16)+23=5f(x)$ имеет вид: $f(2x)-5f(x)+23=0$. Найдем решение этого уравнения на отрезке $0\le x\le 8$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\begin{cases}0\le x\le 8,\\ 0\le 2x\le 8;\end{cases}$ то есть $0\le x\le 4$.

Получим: $\begin{cases}8\cdot 2x-(2x)^2-5\cdot\left(8x-x^2\right)+23=0,\\ 0\le x\le 4;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2-24x+23=0,\\ 0\le x\le 4;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-1)\cdot(x-23)=0,\\ 0\le x\le 4.\end{cases}$

При решении данной системы получим: $x=1$, с учетом периода $x=1+8n, n\in Z$.

2. Пусть $\begin{cases}0\le x\le 8,\\ 8<2x\le 16;\end{cases}$ то есть $4<x\le 8$.

Получим: $\begin{cases}8\cdot(2x-8)-(2x-8)^2-5\cdot\left(8x-x^2\right)+23=0,\\ 4<x\le 8;\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+8x-105=0,\\ 4<x\le 8;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-7)\cdot(x+15)=0,\\ 4<x\le 8.\end{cases}$

При решении данной системы получим: $x=7$. Учитывая период, $x=7+8k, k\in Z$.

Ответ: $x=1+8n$, $x=7+8k$, *где* $\{n,k\}\subset Z$.

V. Построение эскизов графиков сложных функций

Данного вида задачи практически не встречаются в школьных учебниках, но они, безусловно, способствуют усвоению самого понятия композиции функции, развивают графическую культуру, исследовательские умения.

Задача 1. Зная график функции $y=f(x)$, построить графики функций: $y=f^2(x)$, $y=\sqrt{f(x)}$, $y=\ln f(x)$, $y=f(f(x))$, $y=\dfrac{1}{f(x)}$, $y=e^{f(x)}$.

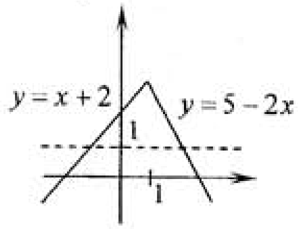
Задача 2. Постройте графики функций:

a) $y=f\circ g$, если $g(x)=x^2$, $f(x)=x^2-4x-5$.

b) $y=f(f(x))$, если $f(x)=\left[\begin{array}{l}x+2,\ \textit{при}\ x\le 1,\\ 5-2x,\ \textit{при}\ x>1.\end{array}\right.$

Решение

b) $f(x)=\left[\begin{array}{l}x+2,\ \textit{при}\ x\le 1,\\ 5-2x,\ \textit{при}\ x>1.\end{array}\right.$



$f(f(x))-?$

Если $x\in(-1;1)$, то $x+2>1$; если $x\in(1;2)$, то $5-2x>1$.

Следовательно, при $x\in(-1;2)$ $f(x)>1$; при $x\le -1, x\ge 2$ $f(x)\ge 1$. В итоге получаем:

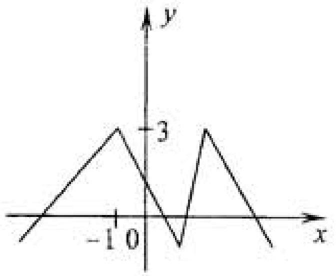
$x\in(-\infty;-1]\ \Rightarrow\ f(f(x))=(x+2)+2=x+4$;

$x\in(-1;-1]\ \Rightarrow\ f(f(x))=5-2(x+2)=-2x+1$;

$x\in(1;2)\ \Rightarrow\ f(f(x))=5-2(5-2x)=4x-5$;

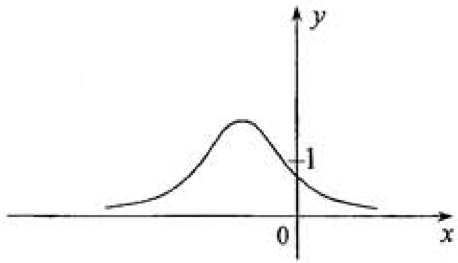
$x\in[2;+\infty)\ \Rightarrow\ f(f(x))=(5-2x)+2=-2x+7$.

$$f(f(x))=\left[\begin{array}{l}x+4,\quad \textit{при}\ x\le -1;\\ -2x+1,\quad \textit{при}\ -1<x\le 1;\\ 4x-5,\quad \textit{при}\ 1<x\le 2;\\ -2x+7,\quad \textit{при}\ x\ge 2.\end{array}\right.$$



Пример 5. По графику функции $y=0{,}5^{ax^2+bx+c}$ определить знаки a, b и c.

Решение



Пусть $f(t)=0{,}5^t$; $g(x)=ax^2+bx+c$. Заметим, что:

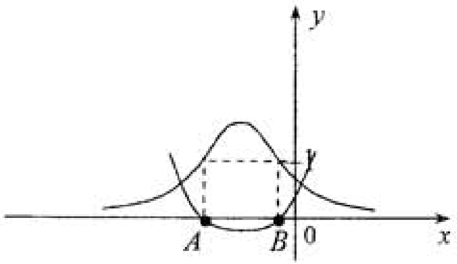
1) $y=1$ при $ax^2+bx+c=0$;

2) вертикальная ось симметрии исходной кривой совпадает с осью симметрии параболы $g(x)=ax^2+bx+c$.

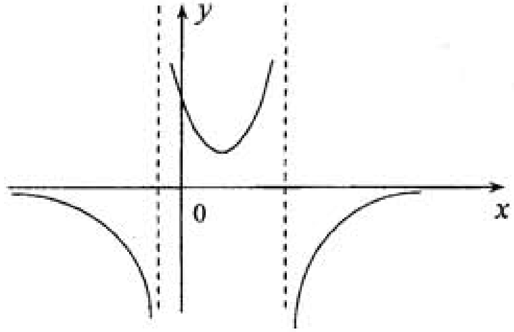
Из условия 1 следует, что парабола проходит через точки A и B на оси OX, то есть A и B – корни функции $g(x)=ax^2+bx+c$.

Поскольку при $x>B$ сложная функция $y=f(g(x))$ – убывающая, то при $x>B$ функция $g(x)=ax^2+bx+c$ – возрастающая. Таким образом, мы можем «восстановить» график функции $g(x)=ax^2+bx+c$, после чего определяем знаки коэффициентов: $a>0$; $b>0$; $c>0$.

Можно к тому же результату прийти и несколько другим путем. А именно, рассмотрим точку $x=0$. Имеем: $0{,}5^c<1\Leftrightarrow c>0$. Следовательно, парабола проходит через точки A и B, пересекает ось OY на положительной полуоси. Восстанавливаем график и определяем знаки коэффициентов.

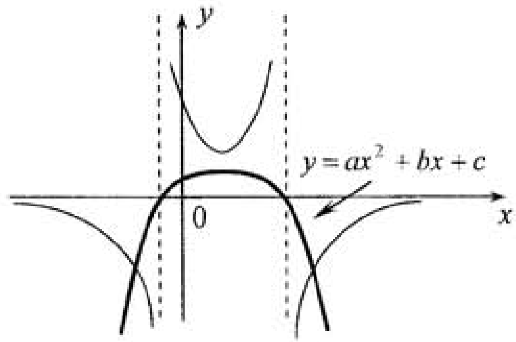


Пример 6. По графику функции $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ определить знаки a, b и c.



Решение

Поскольку знаки функции на промежутках совпадают со знаками знаменателя, а асимптоты функции соответствуют нулям квадратного трехчлена (знаменателя), то легко можно восстановить график квадратного трехчлена и определить знаки его коэффициентов: $a>0$; $b>0$; $c>0$.



В данном примере также можно было воспользоваться информацией о точке пересечения исходного графика с осью Oy:

$y(0)>0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{c}>0 \quad \Leftrightarrow \quad c>0$.

VI. Функциональные уравнения

Представленные задачи можно отнести к классу нестандартных, но в некоторой степени алгоритмизированных.

Задача 1. Найти такую функцию f, что $f(g(x))=x$, если $g(x)=2x$.

Решение

Так как $g(x)=2x$, а $f(g(x))=x$, то $f(2x)=x$.

Пусть $2x=a$, тогда $x=\frac{a}{2}$.

Заменим в равенстве $f(2x)=x$ аргумент x на $\frac{a}{2}$, получим: $f(a)=\frac{a}{2}$. Теперь обозначим a через x, получим: $f(x)=\frac{x}{2}$.

Проверка: $f(x)=\frac{x}{2}$, $g(x)=2x$, $f(g(x))=x$ – верное равенство, так как $f(g(x))=\frac{2x}{2}=x$.

Ответ: $f(x)=\frac{x}{2}$.

Задача 2. Найти линейную функцию, при всех значениях x удовлетворяющую равенству $f(2-3f(1-x))=5+12x$.

Решение

Пусть $f(x)=ax+b$ – искомая линейная функция.

Тогда $2-3f(1-x)=2-3[a(1-x)+b]=2-3b-3a(1-x)$;

$$f(2-3f(1-x))=a[2-3b-3a(1-x)]+b;$$
$$a[2-3b-3a(1-x)]+b\equiv 5+12x \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad (3a^2-12)x+a(2-3b-3a)+b-5\equiv 0.$$

Последнее равенство выполняется тождественно тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases}3a^2-12=0,\\ a(2-3b-3a)+b-5=0;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2,\\ 2\cdot(2-3b-6)+b-5=0;\end{cases}\\ \begin{cases}a=-2,\\ -2\cdot(2-3b-6)+b-5=0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=2,\\ b=-2{,}6;\end{cases}\\ \begin{cases}a=-2,\\ b=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}f(x)=2x-2{,}6;\\ f(x)=-2x+3.\end{array}\right.$

Задача 3. Найдите функцию $f(x)$, если известно, что $f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=4x$.

Решение

Пусть $\frac{1}{x}=t$. Тогда $x=\frac{1}{t}$ и $4x=\frac{4}{t}$.

Получим новое уравнение с переменной t: $f(t)-2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{t}$.

Заменим t на x, запишем: $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}$.

Составим систему вместе с данным уравнением:

$$\begin{cases}f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x},\\ f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=4x.\end{cases}$$

Домножив второе уравнение системы на 2, и, сложив его с первым уравнением системы, получим:

$$-3f(x)=\frac{4}{x}+8x,\ f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{8}{3}x.$$

Ответ: $f(x)=-\frac{4}{3x}-\frac{8}{3}x$.

Задача 4. Найдите функцию $f(x)$, удовлетворяющую равенству: $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x$ при всех допустимых значениях x.

Решение

Пусть $\frac{x+1}{x-2}=t$, тогда $x=\frac{2t+1}{t-1}$ и $\frac{x-2}{x+1}=\frac{1}{t}$.

Получим новое уравнение: $f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2t+1}{t-1}$.

Пусть $\frac{x-2}{x+1}=t$, тогда $x=\frac{t+2}{1-t}$ и $\frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{t}$.

Получим новое уравнение: $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}$.

Из полученных двух уравнений составим систему:

$$\begin{cases} f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2t+1}{t-1}, \\ f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение системы на -2 и сложив его с первым уравнением, получим:

$-3f(t)=\frac{2t+1}{t-1}+\frac{2t+4}{t-1}$; $-3f(t)=\frac{4t+5}{t-1}$; $f(t)=\frac{4t+5}{3(1-t)}$. Заменим t на x, запишем: $f(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$.

Ответ: $f(x)=\frac{4x+5}{3(1-x)}$.

Задача 5. Найти функции $f(x)$ и $g(x)$ из системы уравнений: $\begin{cases} f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x, \\ f(2x+1)+2g(2x+1)=2x. \end{cases}$

Решение

Пусть $\frac{x}{x-1}=2t+1$, тогда $x=\frac{2t+1}{2t}$.

Первое уравнение примет вид: $f(2t+1)+g(2t+1)=\frac{2t+1}{2t}$.

Заменим t на x, получим систему:

$$\begin{cases} f(2x+1)+g(2x+1)=\frac{2x+1}{2x}, \\ f(2x+1)+2g(2x+1)=2x. \end{cases}$$

Вычтем уравнения почленно, получим:

$g(2x+1)=2x-\frac{2x+1}{2x}=\frac{4x^2-2x-1}{2x}$, $f(2x+1)=\frac{-2x^2+2x+1}{x}$.

Пусть $2x+1=a$, тогда $x=\frac{a-1}{2}$.

$\frac{-2x^2+2x+1}{x}=\frac{a^2-4a+1}{1-a}$, $\frac{4x^2-2x-1}{2x}=\frac{a^2-3a+1}{a-1}$.

Получим: $f(a)=\frac{a^2-4a+1}{1-a}$, $g(a)=\frac{a^2-2a+1}{a-1}$.

Заменим a на x, получим:

$$f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x},\ g(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}.$$

Ответ: $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x}$, $g(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$.

Задача 6. Найдите функцию, удовлетворяющую условию: $f(\sin x)+f(\cos x)=3$.

Решение

В выражении $\sin x$ заменим x на m, получим $\sin m$.

Пусть $\sin m=\cos m$,

тогда выразим x через m: $x=\arccos(\sin m)$.

Уравнение примет вид:

$f(\sin m)+f(\cos(\arccos(\sin m)))=3(\sin^2 m+\sin^2 m)$;

$2f(\sin m)=3\cdot 2\sin^2 m$; $f(\sin m)=3\sin^2 m$.

Пусть $\sin m=t$, тогда $f(t)=3t^2$. Заменим t на x, получим: $f(x)=3x^2$.

Ответ: $f(x)=3x^2$.

В статье охвачен не весь многообразный задачный материал, связанный с изучением темы «Сложная функция», однако представленные задания имеют разный уровень сложности, что позволяет учителю работать с учащимися в классах различного профиля. При изучении этой темы осуществляется последовательный переход от одного уровня математической деятельности к следующему, более высокому, обобщаются знания из разных разделов, задействуется работа с аналитическими и графическими моделями, появляется возможность оценить смысл и значение приобретенных знаний, совершенствуются качества знаний. Умение применять теоремы о сложных функциях при решении задач способствует формированию целостного представления о классе элементарных функций.

Библиографический список

1. Алгебра и начала анализа [Текст]: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов и др. // под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1999. – 8-е изд. – 365 с.
2. Алгебра и начала анализа [Текст]: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов и др. – М.: Просвещение, 2005. – 4-е изд. – 448 с.
3. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. 10–11 классы [Текст]: учебник для общеобразовательных учебных заведений / М. И. Башмаков. – М.: Дрофа, 1999. – 400 с.
4. Вернер, А. Л., Карп, А. П. Математика [Текст]: учебное пособие для 10 класса гуманитарного профиля / А. Л. Вернер, А. П. Карп. – М.: Просвещение, 1999. – 255 с.
5. Виленкин, Н. Я. и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М.: Просвещение, 1999. – 6-е изд. – 336 с.
6. Карпова, Т. Н., Мурина, И. Н., Соловьев, А. Ф. Элементарные функции и их исследование [Текст] / Т. Н. Карпова, И. Н. Мурина, А. Ф. Соловьев. – Ярославль: ЯГПУ, 2001. – 44 с.
7. Петрова, Е. С. Теория и методика обучения математике [Текст]: учебно-методическое пособие для студентов математических специальностей. Общая методика. Ч. 1 / Е. С. Петрова. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2004. – 84 с.
8. Селиванова, М. Сложная функция. Решение уравнений и систем уравнений, содержащих сложные функции [Текст] / М. Селиванова // Математика. – 1999. – №10. – С. 29–31.
9. Шагин, В. М. 30 задач за 90 минут [Текст]: пособие для подготовки к ЕГЭ по математике и конкурсным экзаменам в вузы / В. М. Шагин. – М.: Вита-Пресс, 2004. – 112 с.

Н. А. Меньшикова

Изучение комплексных чисел в профильных классах средней школы

В статье рассматривается один из возможных вариантов изложения темы «Комплексные числа» в средней школе, применимый в профильных математических классах. За основу взят практический опыт работы автора в математических классах школ города Ярославля в 2005–2007 годах.

Тема «Комплексные числа» в настоящее время включена в программу классов с углубленным изучением математики, однако она может быть в несколько меньшем объеме включена и в программу профильных математических классов. Целью изучения темы в данном случае становится формирование целостных представлений о комплексных числах и их приложениях.

При разработке профильного курса можно опираться на действующие школьные учебники и методические пособия для учителей. Рассматриваемая тема содержится в том или ином объеме в учебниках и учебных пособиях под редакцией Н. Я. Виленкина, А. Г. Мордковича, Ш. А. Алимова, С. М. Никольского. Ряд материалов можно взять в сети Интернет. Заметим, что методика изложения темы в общедоступных для учителя источниках приводится очень кратко.

В методическом пособии для студентов ВУЗов под научной редакцией Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой [5] методике введения понятия комплексных чисел уделено две страницы, на которых очень кратко анализируются подходы Ш. А. Алимова и Н. Я. Виленкина. Ш. А. Алимов вводит комплексные числа как символ $a+bi$, где i определяется по формуле $i^2=-1$.

Н. Я. Виленкин вводит понятие комплексного числа как упорядоченной пары действительных чисел и рассматривает формальные операции с этими парами.

Учебник «Алгебра-11» под редакцией Н. Я. Виленкина [2] написан на высоком теоретическом уровне, и методическая переработка содержащегося в нем материала для учащихся профильного класса требует определенных временных затрат.

Несколько доступнее для учащихся эта тема излагается в учебном пособии нового поколения «Алгебра-11» под редакцией С. М. Никольского [1].

Следует отметить, что в каждом из указанных учебников очень кратко проводится мотивация введения понятия комплексных чисел, которая основана на необходимости введения комплексных чисел для разрешения проблемы отыскания корней алгебраических уравнений.

Однако, на наш взгляд, в основе мотивационного этапа должна лежать геометрическая интерпретация комплексных чисел как способа задания точек плоскости. Поэтому на первом уроке целесообразно использовать компьютерную презентацию, в которую включаются слайды, иллюстрирующие фрактальные графические образы, строящиеся по определенной программе на основе последовательностей комплексных чисел. Таким образом, на начальном этапе изучения темы учащиеся познакомятся с различными формами геометрических фракталов.

Материал для оформления слайдов несложно найти в сети Internet. Учащимся можно продемонстрировать множество Мандельброта. Это фрактальное множество строится на основе последовательности комплексных чисел, причем последовательность определяется рекуррентным соотношением $C_{n+1} = C_n^2 + C_0$, где C_1 и C_0 – избранные комплексные числа с дробными вещественной и мнимой частями.

Кроме изображения этого множества, можно привести и другие иллюстрации, например, изображения, порождаемые последовательностями комплексных чисел, заданных формулами:

$$Z_{n+1} = Z_n^4 + C\text{, где } Z_0 = pixel\text{, или } Z_{n+1} = Z_n^2 + C_n,$$

$$C_{n+1} = C_n^2 + Z_{n+1}\text{, где } C_0 = Z_0 = C = pixel.$$

После просмотра презентации учителем создается проблемная ситуация: узнать, какие математические основы использованы для создания компьютерных программ, строящих геометрические фракталы подобной структуры.

Далее можно рассмотреть подход Н. Я. Виленкина для введения понятия комплексного числа как пары упорядоченных действительных чисел, а также раскрывать перед учащимися геометрический смысл комплексных чисел.

Основное внимание следует уделить формам представления комплексных чисел: алгебраической, тригонометрической и показательной. У учащихся необходимо сформировать представление о том, что любое комплексное число может рассматриваться во всех трех формах. В зависимости от поставленной задачи оно может быть переведено в наиболее удобную для данного случая форму.

Для изучения свойств операций с комплексными числами целесообразно использовать материал из учебника под редакцией С. М. Никольского «Алгебра и начала анализа-11» [1]. Практика показывает, что изложение теоретических вопросов и предложенный набор упражнений могут быть взяты за основу для построения профильного курса.

Ориентировочно профильный курс может быть рассчитан на 16 часов. Приведем примерную тематику занятий.

1. Вводная лекция. Мотивация изучения комплексных чисел. Основные понятия. (2 часа)
2. Геометрический смысл комплексного числа. (2 часа)
3. Алгебраическая форма комплексного числа и операции над числами, представленными в алгебраической форме. (2 часа)
4. Тригонометрическая форма комплексного числа и операции над числами, представленными в тригонометрической форме. (2 часа)
5. Корни из комплексных чисел и их свойства. (2 часа)
6. Показательная форма комплексного числа. (2 часа)
7. Приложения комплексных чисел к решению алгебраических уравнений и к тригонометрическим преобразованиям. (2 часа)
8. Заключительный семинар. (2 часа)

Дополнительные задачи по тематике профильного курса можно брать из других источников, например из [3], [4].

Для организации текущего контроля знаний и умений учащихся проводятся самостоятельные работы. Ниже приводится авторский пример варианта самостоятельной работы для проверки усвоения материала по темам «Алгебраическая форма комплексного числа», «Тригонометрическая форма комплексного числа» и «Геометрический смысл комплексного числа».

Примерный вариант самостоятельной работы

1. Изобразить на комплексной плоскости фигуры, заданные следующими уравнениями:

а) $|iz+12+5i|=6$; б) $|z+3|=|z+2-i|$.

2. Перевести комплексное число z^7 из тригонометрической формы в алгебраическую, если: $z=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$.

3. Перевести числа z_1 и z_2 в тригонометрическую форму и найти числа $z_1\cdot z_2$, z_1^2, z_2^3, z_1/z_2, если $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=1-i$.

4. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим степеням заданного числа z: z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6, если $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решение

1а) Уравнение $|iz+12+5i|=6$ определяет на комплексной плоскости окружность радиуса 6. Найдем центр окружности. Пусть $z=x+yi$. Выполним преобразования:

$$iz+12+5i=ix-y+12+5i=(12-y)+(x+5)i,$$

$$|(12-y)+(x+5)i|=\sqrt{(12-y)^2+(x+5)^2}.$$

В нашем случае $\sqrt{(12-y)^2+(x+5)^2}=6$; возведем в квадрат полученное равенство и получим каноническое уравнение окружности: $(x+5)^2+(12-y)^2=36$. Следовательно, центр окружности находится в точке (-5; 12).

1б) Уравнение $|z+3|=|z+2-i|$ задает на комплексной плоскости прямую, являющуюся серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему точки (-3; 0) и (-2; 1). Это следует из равенства расстояний от точки z до указанных точек:

$$|z-(-3)|=|z-(-2+i)|.$$

Пусть $z=x+iy$, составим уравнение прямой, удовлетворяющей уравнению. Преобразуем модули к виду:

$|x+iy+3|=|x+iy+2-i|$; $|(x+3)+iy|=|(x+2)+(y-1)i|$;

$\sqrt{(x+3)^2+y^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}$. Возведем равенство в квадрат и упростим, после чего получим: $y=-x-2$. Следовательно, искомая прямая имеет уравнение $y=-x-2$.

2. Пусть $z=\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$. Отметим, что модуль данного числа равен 1. Возведем z в седьмую степень по правилам действий с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме: $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. В нашем случае $z^7=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)$. Выделим главный аргумент числа:

$$z^7=\cos\left(\frac{32\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{32\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right);$$

следовательно, $z^7=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Тогда в алгебраической форме данное число будет представлено следующим образом: $z^7=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Переведем числа $z_1=\sqrt{3}+i$ и $z_2=1-i$ в тригонометрическую форму:

$$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2;\ z_1=2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6));$$

$$|z_2|=\sqrt{2};\ z_2=\sqrt{2}(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)).$$

Тогда $z_1\cdot z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$,

$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}(\cos(23\pi/12)+i\sin(23\pi/12))$,

$z_1^2=4(\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3))$,

$z_2^3=2\sqrt{2}(\cos(21\pi/4)+i\sin(21\pi/4))=2\sqrt{2}(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4))$,

$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{7\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$.

4. Если $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, то его тригонометрическая форма будет $z=\cos(\pi/3)+i\sin(\pi/3)$, и

$z^2 = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3);$

$z^3 = \cos(3\pi/3) + i\sin(3\pi/3) = \cos\pi + i\sin\pi;$

$z^4 = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3);$

$z^5 = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3);$

$z^6 = \cos(6\pi/3) + i\sin(6\pi/3) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi).$

Эти числа являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в единичную окружность на комплексной плоскости.

Для проведения самостоятельной работы предлагаем два аналогичных варианта.

II Вариант

1. Изобразить на комплексной плоскости фигуры, заданные следующими уравнениями:

а) $|iz - 3 - 4i| = 1$; б) $|z + 2| = |z - 3 - i|$.

2. Перевести комплексное число z^7 из тригонометрической формы в алгебраическую, если: $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

3. Перевести числа z_1 и z_2 в тригонометрическую форму и найти числа $z_1 \cdot z_2$, z_1^2, z_2^3, z_1/z_2, если $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = 1 + i$.

4. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим степеням заданного числа z:

$$z,\ z^2,\ z^3,\ z^4,\ z^5,\ z^6, \text{ если } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

III Вариант

1. Изобразить на комплексной плоскости фигуры, заданные следующими уравнениями:

а) $|iz - 12 - 5i| = 4$; б) $|iz - 3| = |z - 2 - i|$.

2. Перевести комплексное число z^7 из тригонометрической формы в алгебраическую, если $z = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

3. Перевести числа z_1 и z_2 в тригонометрическую форму и найти числа $z_1 \cdot z_2$, z_1^2, z_2^3, z_1/z_2, если $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = -1 + i$.

4. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие следующим степеням заданного числа z: $z, z^2, z^3, z^4, z^5, z^6$, если $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Для проведения заключительного семинара учащимся целесообразно предварительно предложить индивидуальные задания исследовательского характера. Это могут быть многокомпонентные задания на построение графических образов, демонстрацию связей комплексных чисел с темой «векторы», на нахождение комплексных корней алгебраических уравнений, на вывод тригонометрических формул. Участие в семинаре позволяет учащимся обобщить и систематизировать полученные знания.

Приведем пример многокомпонентного задания исследовательского характера.

Пусть M – множество всех комплексных чисел z таких, что $|z - 1 + i| = 1$.

а) Изобразите на чертеже множество M.

б) Изобразите на чертеже множество всех чисел z таких, что $\bar{z} \in M$.

в) Изобразите на чертеже множество всех чисел u таких, что $u = -iz$, где $z \in M$.

г) Найдите наименьшее значение выражения $|z - 1 + i| = 1$ для $z \in M$.

Ориентировочные задания для подготовки к итоговому семинару

1. Вычислите:

а) $(z_1 \cdot z_2)^8$, если $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = \cos(\pi/24) + i\sin(\pi/24)$;

б) $(z_1/z_2)^6$, если $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = \cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12)$;

в) $(z_1/z_2)^{12}$, если $z_1 = \cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8)$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

2. Изобразите множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z - 3| = 2|z|$; б) $\begin{cases} 1 \le |z - 1| \le 2, \\ 1 \le \operatorname{Im}(z) \le 3; \end{cases}$

в) $\left|\dfrac{2z+\bar{z}}{z+2i}\right|=1$; г) $|iz+12+5i|=4$;

д) $2<|2iz+1-i|<6$; е) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2}{\bar{z}-1}\right)\geq 1$;

ж) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2}{\bar{z}+1}\right)\geq 1$.

3. Используя формулы Муавра и бинома Ньютона, выразите через тригонометрические функции угла α тригонометрические функции кратных аргументов:

а) $\cos 4\alpha$ и $\sin 4\alpha$; б) $\cos 5\alpha$ и $\sin 5\alpha$.

4. Составьте уравнение наименьшей степени с действительными коэффициентами, имеющее корни:

а) $x_1=2,\ x_2=3-2i$; б) $x_1=-2,\ x_2=i,\ x_3=1-i$.

5. Решите уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $x^2+x+1=0$; б) $3x^2-x+2=0$;

в) $x^3-1=0$; г) $x^4+2x^2+3=0$.

6. Из всех чисел z, удовлетворяющих условию $z\bar{z}=25$, найдите такие числа, для которых выражение $(|z-7|+|z-7i|)$ принимает наименьшее значение.

Материалы по теме «Показательная форма комплексного числа»

Пусть комплексное число (α,β) сначала рассматривается в алгебраической форме $(\alpha+\beta\cdot i)$. На этой основе вводится новое понятие – понятие комплексной степени числа e:

$$e^{\alpha+\beta i}=e^{\alpha}(\cos\beta+i\sin\beta).$$

Вторым множителем в этой формуле стоит комплексное число, имеющее единичный модуль и представленное в тригонометрической форме: $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

С помощью введенного понятия получим формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Для обоснования верности этой формулы в учебном пособии [1] используется разложение в ряд Тейлора функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=e^x$. (В том случае, если с учащимися тема «Ряд Тейлора» прежде не рассматривалась, необходимо предложить им познакомиться с данным материалом самостоятельно, используя доступную для восприятия учебную литературу). Далее учащиеся знакомятся с частным случаем формулы Эйлера – равенством $e^{i\pi}=1$.

Затем рассматривается общий вид комплексного числа. Если оно представимо в алгебраической форме как $z=a+bi$, а в тригонометрической форме как $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то показательной формой представления комплексного числа будет $z=re^{i\varphi}$.

Приведем пример представления комплексного числа во всех трех формах. Пусть дано число $\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Его алгебраическая форма имеет вид $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Тригонометрическая форма представима в виде:

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right),\ r=1.$$

Тогда показательная форма этого числа будет следующей: $z=1\cdot e^{i\pi/3}=e^{i\pi/3}$.

Формулы для операций с числами, представленными в показательной форме, имеют следующий вид:

$$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ z_1/z_2=(r_1/r_2)e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z^n=r^ne^{i\varphi n},\ n\in Z.$$

В качестве тренировочных заданий можно использовать задания на перевод чисел из одной формы в другую, представление числа во всех трех формах, задачи на вычисление с применением введенных формул.

Библиографический список

1. Алгебра и начала анализа [Текст]: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2005. – 4-е изд.

2. Виленкин, Н. Я. Алгебра и математический анализ для 11 класса [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин и др. – М.: Просвещение, 1996.

3. Звавич, Л. И. и другие. Экзаменационные задачи по алгебре для школьников и абитуриентов / Л. И. Звавич, Д. И. Аверьянов, В. К. Смирнова. – М.: Дрофа, 1997.
4. Карп, А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа [Текст]: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А. П. Карп. – М.: Просвещение, 1995.
5. Методика и технология обучения математике: курс лекций [Текст]: пособие для вузов / под ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

Н. М. Епифанова, Н. В. Потехин

Организация проектной деятельности на занятиях по математике

В статье описываются некоторые подходы к организации проектной деятельности с учащимися по математике. В помощь учителю приведена классификация проектов, описаны основные этапы работы учителя по организации проектной деятельности, а также приведен банк проектов. Учебные проекты, включенные в банк, прошли апробацию в школах г. Ярославля и на физико-математическом факультете ЯГПУ им К. Д. Ушинского.

В настоящее время для комплексного решения задач обучения используются различные методы, в том числе выполнение учащимися творческих проектов, целью которых является включение учащихся в процесс преобразовательной деятельности, аналогичной научной, от разработки идеи до её осуществления.

Слово «проект» (в буквальном переводе с латинского – «брошенный вперёд») толкуется в словарях как «план, замысел, текст или чертёж чего-либо, предваряющий его создание». Это толкование получило своё дальнейшее развитие: «Проект – прототип, прообраз какого-либо объекта, вида деятельности и т. п., а проектирование превращается в процесс создания проекта» [7].

В работах исследователей проектное обучение рассматривается как дидактическая система, а метод проектов – как компонент системы, как педагогическая технология, которая предусматривает:

– интеграцию фактических знаний учащихся,
– применение актуализированных знаний,

– приобретение новых знаний,
– приобретение исследовательских навыков [8].

Под *проектной деятельностью в математике* понимается такая **учебно-познавательная деятельность** учащихся, которая

– направлена на получение некоторого заранее запланированного личностно значимого результата,
– предполагает самостоятельное решение учащимися математических задач [2].

Включение элементов проектной деятельности в учебный процесс позволяет:

– познакомить школьников с одним из наиболее мощных и традиционных способов познания окружающего мира;
– дать школьнику почувствовать радость от успешно решенной трудной (для него) задачи;
– дать школьнику опыт письменного изложения результатов своей работы и устного представления результатов работы сверстникам и взрослым;
– решать задачи индивидуально ориентированного образования.

При использовании в учебном процессе данного метода существенно изменяются и роли участников педагогического процесса: учитель не является экспертом, он – консультант, помощник; соответственно, ученик выполняет роль активного участника процесса решения исследовательской задачи. Важно, что работа над проектом предполагает обязательную рефлексивную деятельность: оценку того, что каждый приобрел в процессе выполнения задания, что удалось, а что нет, в чем заключались причины неудач и как их можно избежать в будущем.

Следует заметить, что принципиальное отличие проектирования от исследования состоит в том, что исследование не предполагает создание какого-либо заранее спланированного объекта, даже его модели или прототипа. Исследование – это процесс поиска неизвестного, поиска новых знаний.

Проектирование и исследование – разные по направленности, смыслу и содержанию виды деятельности.

Выполняемые школьниками под руководством учителя проекты можно классифицировать (табл. 1).

Таблица 1

Классификация проектов [1]

ПРИЗНАК	ТИП ПРОЕКТА
Уровень творчества	- исполнительский; - конструктивный; - творческий;
Вид деятельности	- исследовательский; - творческий; - информационный; - ролевой (игровой); - прикладной; - издательский; - сценарный;
Используемые умения	- проектный (организационные, поисковые, информационные, презентационные, оценочные умения); - проектный (математические и литературно-лингвистические умения); - творческий; - интеллектуальный; - коммуникативный;
Содержание	- монопредметный; - межпредметный; - надпредметный;
База выполнения	- школьный; - внешкольный; - международный;
Количественный состав учащихся	- индивидуальный; - парный; - групповой;
Возрастной состав участников	- одновозрастной; - разновозрастной;
Продолжительность выполнения	- краткосрочный; - средней продолжительности; - долгосрочный;
Характер координации	- открытый (координатор контролирует участников проекта, открыто выполняя свои функции); - скрытый (координатор не обнаруживает себя в деятельности групп);
Формы продуктов деятельности	- внешний (презентация, выставка, отчет…); - внутренний (продуктом являются личностные качества: знания, умения, способности…);
Использование средств обучения	- т радиционный (печатные, технические, наглядные средства…); - информационно-коммуникативный;
Включенность в математический план	- текущий (на проектную деятельность выделяется часть содержания обучения); - итоговый (по результатам выполнения проекта оценивается освоение учащимся определенного учебного материала);
Назначение	- учебные; - личные (семейные); - общественные; - производственные.

Тип проекта зависит не только от исследуемого материала, о и от ЗУН учащихся, их познавательных интересов, а также поавательных интересов педагога.

Например, проект «Математические кривые» может быть ак монопредметным, так и межпредметным. В соответствии с базй выполнения тип проекта может быть школьный или, при исользовании сети Интернет, международный. По количественному эставу проект может быть индивидуальным, групповым или инивидуально-групповым. По виду деятельности проект может ноить исследовательский, прикладной или информационный харакер. Для учащихся малокомплектных школ состав участников, корее всего, будет разновозрастной. На разных этапах выполнеия проекта учащимися деятельность координатора может носить ткрытый или скрытый характер.

Использование на занятиях по математике элементов проктной деятельности требует соответствующего планирования и рганизации учебного процесса, его дидактического, методическоо и материально-технического обеспечения.

Существует ряд требований к организации данного вида еятельности школьников:

– подготовленность учащихся к данному виду деятельности;

– интересная для детей проблема;
– практическая направленность и значимость проекта;
– творческая постановка задачи;
– практическая осуществимость проекта.

Данная деятельность может строиться на основе как индивидуальной, так и совместной деятельности учащихся, распределяемой по содержанию, назначению и трудоемкости, и позволяет разнообразить формы проведения занятий, при этом тематика проектных заданий должна быть достаточно широкой, чтобы охватить возможно больший круг разделов математического, естественно-научного, гуманитарного образования и учесть интересы всех учащихся.

Учащимся можно предложить следующую структуру оформления проекта:

– титульный лист (название учебного заведения, класс, автор, название проекта, научный руководитель, место, год выполнения проекта);
– оглавление (перечень частей проекта);
– краткая аннотация;
– эпиграф;
– введение;
– основная часть (главы, разделы, параграфы и т. д.);
– заключение;
– список используемых источников и литературы;
– приложение.

Педагогу целесообразно иметь методический паспорт учебного проекта, например:

1. Адресация:
– тема(ы) учебно-тематического плана предмета/предметов;
– цели: образовательные, воспитательные, развивающие;
– задачи учебно-педагогические (класса, группы, каждого учащегося);
– возраст учащихся;
– время работы над проектом;
– режим работы.

2. Обеспечение:
– материально-техническое и учебно-методическое оснащение, информационное обеспечение;

- дополнительно привлекаемые участники, специалисты, информационные и материально-технические ресурсы;
- предметные и общеучебные ЗУН, необходимые учащимся для выполнения данного проекта.

3. Предполагаемые приращения(результаты):
– новое содержание по каждой теме;
– новые практические приёмы;
– обобщающие понятия, представления, знания, на получение которых нацелен результат проекта;
– развитие навыков *самостоятельной работы* (с источниками информации, инструментами, технологиями), *самостоятельного принятия решений, коммуникативности* (в информационном обмене, в ролевом взаимодействии), *мыслительной деятельности* (при проектировании, планировании, анализе, синтезе, структурировании…), *воспитание толерантности, расширение кругозора.*

4. Статус учебного проекта: автор-разработчик; опыт использования (апробация); степень распространения.

Опираясь на литературу и имеющийся опыт, предлагаются следующие этапы организации работы учащихся над проектом (табл. 2). Эти же этапы можно представить в виде диаграммы Г. Ганта (Прил. 1)

Таблица 2

Этапы организации работы над учебными проектами

№	Содержание работ	Исполнитель	Контроль	Примечание
	1. Вводный этап			
1.1	Установочное занятие: цели, задачи проектной деятельности, примерная тематика и жанры будущих проектов. Мотивирование учащихся на проектную деятельность.			
1.2	Стендовая информация о проектной работе.			
1.3	Выдача письменных рекомендаций будущим авторам (темы, требования, сроки, график консультаций и прочее).			

1.4	Проведение консультаций по выбору тематики и жанров учебных проектов, источников информации. Формулирование основных идей и замыслов.			
1.5	Формирование проектных групп, оформление заявок на осуществление проекта, распределение задач (обязанностей) между членами групп.			
1.6	Обсуждение идей будущих проектов, составление индивидуальных планов работы над проектами, определение способов сбора и анализа информации.			
1.7	Утверждение тематики проектов и индивидуальных планов работ. Установление процедур и критериев оценки проекта.			
	2. Поисково-исполнительский этап			
2.1	Сбор и систематизация материалов в соответствии с идеей и жанром работы, подбор иллюстраций.			
2.2	Организационно-консультационное занятие: промежуточные отчёты учащихся, обсуждение альтернатив, возникающих в ходе выполнения проекта.			
2.3	Индивидуальные и групповые консультации по выбору индивидуального варианта выполнения проекта и его оформления. Помощь учащимся в подборе индивидуального стиля проекта.			
2.4	Регулярные консультации по содержанию учебных проектов, помощь в систематизации и обобщении материалов, формулировании выводов.			
	3. Обобщающий этап			
3.1	Первичное оформление результатов проектной деятельности.			
3.2	Репетиционно-консультационное занятие: «Предзащита проектов».			
3.3	Доработка проектов с учетом замечаний и предложений.			
3.4	Формирование групп оппонентов, рецензентов и «внешних» экспертов.			
3.5	Подготовка к публичной защите проектов:			

	- определение даты и места, - выпуск распоряжения о порядке защиты и составе аудитории (включая независимую экспертную комиссию – НЭК), - определение программы и сценария публичной защиты, распределение заданий временным творческим группам (медиа-поддержка, подготовка аудитории, фото-видеосъёмка и проч.), - определение списка гостей, приглашаемых на защиту, в том числе через анкетирование авторов проектов, и их приглашение, - составление аннотаций на проекты и выпуск программы их публичной защиты, - оформление пригласительных билетов, подготовка аудитории, - стендовая информация о мероприятии, - подготовка раздаточных материалов и бланков оценки проектных работ.			
3.6	Генеральная репетиция публичной защиты проектов. Утверждение окончательного порядка мероприятий.			
3.7	Координационное совещание лиц, ответственных за защиту проектов.			
	4. Заключительный этап			
4.1	Публичная защита проектов.			
4.2	Подведение итогов, конструктивный анализ выполненной работы.			
	5. Итоговый этап			
5.1	Распоряжение по результатам проектной деятельности (благодарности участникам, назначение ответственных за обобщение материалов).			
5.2	Обобщение материалов. Оформление отчетов о выполненной работе и стендовой информации по итогам зашиты проектов. Архивирование проектов.			

Оценку проекта можно осуществлять, используя бланк «Оценочный лист проекта» (табл. 3).

Таблица 3

Оценочный лист проекта

№	Параметры оценивания	Ф.И.О.	Ф.И.О.
1	Актуальность выбранной темы		

2	Глубина раскрытия темы		
3	Практическая ценность проекта		
4	Композиционная стройность		
5	Соответствие плану		
6	Обоснованность выводов		
7	Правильность и грамотность оформления		
8	Аккуратность и дизайн оформления		
9	Содержательность приложения		
10	Выступление на защите		
11	Умение изложить самое интересное и ценное		
12	Умение отвечать на вопросы		
13	Умение защищать свою точку зрения		
14	Итоговая оценка		

Многие школьники могут испытывать трудности в выборе темы проекта. Для решения этой проблемы учитель создает так называемый «банк проектов», состоящий из реально выполнимых заданий, сгруппированных по сферам интересов и подготовленности учащихся. Некоторые из предлагаемых тем имеют обобщенный характер и могут рассматриваться как комплекс мини проектов.

Банк проектов

ТЕМА № 1: Математические кривые

Примерное содержание работы

1. Классические кривые: парабола, эллипс, гипербола.
2. Именные кривые (лемниската Бернулли, конхоида Никомеда, строфоида, улитка Паскаля, циссоида Диоклеса, каппа).
3. Кривые как траектория движения точек (кинематический способ образования кривых).
4. Аналитическое задание кривых на плоскости (парабола, эллипс, гипербола, лист Декарта).
5. Кривые, заданные уравнениями в полярных координатах (уравнения окружности, конхоиды, строфоиды в полярных координатах).
6. Спирали (спираль Архимеда, гиперболическая спираль, спираль Галилея, логарифмическая спираль).
7. Кривые, заданные параметрическими уравнениями (окружность, лист Декарта, циклоида, кардиоида, эпициклоида, гипоциклоида, кривая Штейнера).
8. Автоподобные кривые и фракталы.

Задачи исследования:

1. Ознакомить с кривыми, изучение их свойств.
2. Изучить возможности использования компьютерной системы «Математика» для изображения кривых и решения задач.
3. Составить компьютерной программы для получения звездчатых 7-угольников, 8-угольников, 11-угольников.

Литература

1. Березин, В. Кардиоида [Текст] // Квант. – 1977. – №12.
2. Берман, Г. Н. Циклоида [Текст]. – М.: Наука, 1975.
3. Бронштейн, И. Эллипс. Гипербола. Парабола [Текст] // сост. А. А. Егоров. – М.: Бюро Квантум, 2001. – №2.
4. Васильев, Н. Б. Прямые и кривые [Текст] / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер. – М.: МЦНМО, 2000.
5. Смирнова, И. М. Компьютер помогает геометрии [Текст] / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М.: Дрофа, 2003.
6. Смирнова, И. М. Кривые. Курс по выбору. 9 класс [Текст] : учебное пособие для общеобразовательных учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2007.

ТЕМА № 2: Золотое сечение

Примерное содержание работы

1. Исторические сведения.
2. Алгебраический и геометрический подходы к определению понятия «золотое сечение».
3. Числа Фиббоначи и золотое сечение.
4. Золотое сечение в живописи, скульптуре, архитектуре, стихосложении.
5. Золотое сечение и информация (понятие «энтропия» в теории информации).

Задачи исследования:

1. Провести психологический эксперимент: выбрать среди прямоугольников наиболее «красивый», выбрать среди фотографий наиболее привлекательное лицо.
2. Провести антропометрические измерения пропорций руки, кисти, лица, тела нескольких человек.
3. Привести примеры использования энтропии при оценивании той или иной информации.
4. Провести исследования с целью поиска золотого сечения:
   – стихотворения,

– картины художника,
– архитектурного памятника,
– скульптурного памятника.

Литература

1. Болтянский, В., Савин, А. Информация и математика [Текст] // Квант. – 1995. – № 6.
2. Волошинов, А. В. Математика и искусство [Текст]. – М.: Просвещение, 2000.
3. Лэнгдон, Н., Стейп, Ч. С математикой в путь [Текст]. – М.: Педагогика, 1987.
4. Пидоу, Д. Геометрия и искусство [Текст]. – М.: Мир, 1979.
5. Прохоров, А. И. Золотая спираль [Текст] // Квант. – 1984. – № 9.
6. Яглом, А. М., Яглом, И. М. Вероятность и информация [Текст]. - М.: Физматлит, 1973.

ТЕМА № 3: Симметрия живой и неживой природы

Примерное содержание работы

1. Симметрия в искусстве: в архитектуре, литературе, музыке, в изобразительном искусстве.
2. Симметрия в биологии: симметрия в мире растений, насекомых, рыб, птиц, животных.
3. Симметрия в физике и химии.
4. Виды движений: осевая, центральная и скользящая симметрии, поворот, параллельный перенос.
5. Композиция движений.

Задачи исследования:

1. Проанализировать фотографии, рисунки тех или иных объектов живой или неживой природы (растения, архитектурные сооружения, одежда, орнаменты, бордюры) с целью поиска наличия симметрии.
2. Привести примеры использования свойств симметрии в физике, химии.
3. Составить компьютерную программу, позволяющую создать тот или иной орнамент заданных размеров и в заданных условиях, используя разные виды движения.

Литература

1. Зенкевич, И. Г. Эстетика урока математики [Текст]: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.

2. Тарасов, Л. Этот удивительный симметричный мир [Текст]: пособие для учащихся. – М.: Просвещение, 1982.
3. Эйдельс, Л. М. Занимательные пропорции. От пещерного рисунка до кинопанорамы [Текст]: книга для внеклассного чтения учащихся 8 – 10 классов. – М.: Просвещение, 1982.

ЕМА № 4: Теория графов

римерное содержание работы

1. Основные положения теории графов.
2. Теория графов в химии, биологии, электротехнике…
3. Теория графов в экономике при решении задач о выборе оптимального пути для потоков грузового и пассажирского транспорта.
4. Теория графов в математических головоломках и олимпиадных задачах.

дачи исследования:

1. Привести примеры решения задач «одним росчерком пера».
2. Выполнить классификацию задач, решаемых с помощью теории графов, приводимых в школьных учебниках и сборниках олимпиадных задач.
3. Привести образцы решения «задачи коммивояжера» и задачи «из ливерпульской гавани».
4. Найти примеры использования элементов логистики в практической деятельности людей.

'итература

1. Генкин, С. А. Ленинградские математические кружки [Текст]: пособие для внеклассной работы. – Киров: Изд-во «АСА», 1994.
2. Гусев, В. А., Орлов, А. И., Розенталь, А. Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах [Текст]: книга для учителя. – М.: Просвещение, 1991.

'ЕМА № 5: Математики земли Ярославской

Іримерное содержание работы

1. Михайло Розин (1767–1814?) – автор одного из первых учебников геометрии в России.
2. Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918) – автор метода решения задач об устойчивости движения – важнейшей проблемы математической физики и механики.
3. Лев Богданович (1893–1918) – автор некоторых задач школьного учебника математики.

4. Беллюстин Всеволод Константинович (1865–1925) – авто одной из первых книг по истории математики для учителей.
5. Извольский Николай Александрович (1870–1938) – педаго методист, автор школьных учебников.
6. Запольская Любовь Николаевна (1871–1943) – одна из пер вых в России женщин докторов математических наук.
7. Колмогоров Андрей Николаевич (1903–1987) – «один и лучших, если не лучший математик двадцатого века».

Задачи исследования:

1. Изучить биографии ученых-математиков, жизнь или научна деятельность которых была связана с Ярославским краем.
2. Подготовить презентации, раскрывающие ключевые аспекты научной деятельности этих ученых.

Литература

1. Бородин, А. И., Бугай, А. С. Биографический словарь деятелей в области математики [Текст]. – К.: Радзянська школа, 1979.
2. Математический энциклопедический словарь [Текст]. – М. Просвещение, 1978.
3. Шемянов, Н. Н. Михайло Розин [Текст] // Краеведческие записки. – Вып. 4. – Ярославль: ЯГПУ, 1960.
4. Ярославский край в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона [Текст] // под редакцией А. М. Селиванова. – Ярославль: ЯГПУ, 1996.

ТЕМА № 6: Векторы

Примерное содержание работы

1. Понятие «вектор». Классификация векторов. Действия с векторами.
2. Метод координат. Прямоугольная, аффинная, полярные системы координат.
3. Скалярное произведение векторов. Косое произведение векторов.
4. Условие принадлежности трех точек одной прямой, четырех точек одной плоскости.
5. Вычисление расстояний. Вычисление углов.

Задачи исследования:

1. Доказать теорему Чевы аналитическим и векторным способами.

2. Доказать теорему «Сумма квадратов всех сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей» аналитическим, векторным и координатным методами.
3. Привести несколько способов доказательства теоремы Бхаскары – акарии (12 в.) «Середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения ее боковых сторон лежат на одной прямой».
4. Доказать теорему о пересечении в одной точке всех отрезков, соединяющих середины сторон основания четырехугольной пирамиды с точкой пересечения медиан противоположной боковой грани аналитическим, векторным и координатным методами.
5. Привести примеры задач из астрономии, геодезии, решение которых предполагает использование полярных координат.

Литература

1. Атанасян, Л. С. и другие. Геометрия [Текст]: учебник для 10–11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 2004.
2. Беккер, Б. М., Некрасов, В. Б. Применение векторов для решения задач [Текст]: учебное пособие. – СПб.: НПО «Мир и семья–95», 1996.
3. Киселев, А. П., Рыбкин, Н. А. Геометрия [Текст]: дополнительный материал для 8–9 классов. – М.: Просвещение, 1996.
4. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: решение задач [Текст]: учебное пособие для 10 классов средней школы – М.: Просвещение, 1989.

ТЕМА № 7: Задачи на построение

Примерное содержание работы

1. Исторические задачи на построение.
2. Основные задачи на построение, решаемые с помощью циркуля и линейки:
   – пять элементарных построений, которые считаются выполнимыми с помощью циркуля и линейки;
   – пять основных задач на построение.
3. Виды задач на построение:
   – метрические задачи (Два подхода к подсчету количества решений).
   – задачи «положения» (позиционные).
4. Основные методы решения задач на построение с помощью циркуля и линейки:

– метод геометрических мест точек;
– алгебраический метод;
– метод геометрических преобразований:
  – метод движения (метод центральной и осе симметрии, метод поворота, метод паралле ного переноса);
  – метод подобия.

5. Неразрешимые задачи на построение. Приближенные спо бы их решения.
6. Построение с помощью одной линейки. Задача индийск математика Бхаскары – акарии (XII в.). Результаты иссле ваний Якоба Штейнера.
7. Построение с помощью одного циркуля. Доказательство т ремы Мора–Маскерони.

Задачи исследования:

1. Привести общую схему рассуждений при решении алг раическим методом следующей задачи на построение.

Задача. *Построить отрезок* $x = \frac{\sqrt{(a^3 + a b^2)c}}{b}$, *где a, в,* (*известные отрезки.*

2. Привести решение задачи.

Задача. *Даны прямая l и две окружности* ω_1 *и* ω_2 *по разн стороны от нее. Построить квадрат так, чтобы две его прот воположные вершины лежали на прямой l, а две другие – на да ных окружностях.*

Получить серию задач на применение осевой симметри варьируя в данной ситуации фигуры F_1 и F_2. (Окружности мож заменить на прямые; прямую и окружность… Можно замени искомую фигуру – квадрат – на любую другую, имеющую о симметрии (ромб, равнобедренный треугольник…)).

3. Привести образец решения задачи методом спрямлен (частный случай метода осевой симметрии).
4. Ознакомиться со способами решения следующих задач, составленных математиками Н. Тартальей и Д. Кардано [4].

Задача

– *Одним раствором циркуля разделить прямую на любое количество равных частей.*
– *На данном отрезке АВ построить с помощью данного раствора циркуля (не равного АВ) равносторонний треугольник.*
– *Найти построением положительный корень уравнения* $x^2+6x=91$.
– *Построить общую касательную к двум данным окружностям.*

Литература

1. Александров, И. И. Методы решения геометрических задач на построение [Текст]. – М.: Учпедгиз, 1963.
2. Киселев, А. П. Элементарная геометрия [Текст]: книга для учителя. – М.: Просвещение, 1996.
3. Костовский, А. Н. Геометрические построения одним циркулем [Текст]. – М.: Физматгиз, 1959.
4. Попов, Г. Н. Исторические задачи по элементарной математике [Текст]. – М.:ГТТИ, 1932.
5. Смогоржевский, А. С. Линейка в геометрических построениях [Текст]. – М.: Гостехиздат, 1957.
6. Фукс, Д . Построение одним циркулем [Текст] / / Квант. – 1987. – № 6.
7. Шарыгин, И. Ф., Голубев, В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач [Текст]: учебное пособие для 11 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1991.

ТЕМА № 8: Дифференциальные уравнения в естествознании и экономике

Примерное содержание работы

1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Определение дифференциального уравнения и его решение.
3. Дифференциальные уравнения в физике (задача о радиоактивном распаде, задача об охлаждении тел, задача о движении моторной лодки, задача о потере заряда проводником, задача об определении заряда конденсатора, задача, приводящая к выведению закона движения парашютиста…).
4. Дифференциальные уравнения в химии (выведение з акона перехода вещества в раствор, задача об определении концентрации раствора…).
5. Дифференциальные уравнения в биологии (задачи о численности популяции, об определении сезонного роста популя-

ции, об увеличении площади молодого листа дерева, теория эпидемий).

6. Дифференциальные уравнения в экономике (задачи о вычислении роста населения, об определении количества населения на определенную дату, истощении ресурсов, текучести рабочей силы, эффективности рекламы…).

Задачи исследования:

1. Освоить решение нового типа задач.
2. Привести примеры задач, требующих при решении использования производной.
3. Вывести закон изменения температуры тела в зависимости от времени. Провести лабораторную работу «Понижение температуры чайника». Сравнить данные, полученные опытным путем с математическими подсчетами.
4. Просчитать эффективность рекламы школьной конференции динамику роста численности населения вашего города, поселка…

Литература

1. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях [Текст]. – М.: Наука, 1987.
2. Баврин, И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике [Текст]: книга для учащихся 10–11 классов. – М.: Просвещение, 1999.
3. Тихонов, А. Н., Костомаров, Д. П. Рассказы о прикладной математике [Текст]. – М.: Наука,1979.

ТЕМА № 9: Как разделить фигуру на наибольшее число частей

Примерное содержание работы

1. Методы решения задач на разбиение плоскостей и пространства (метод математической логики, метод математической индукции, теория конечных разностей).
2. Задача интерполяции – основная задача теории конечных разностей.
3. Примеры решения задач методом исчисления конечных разностей (отгадывание мыслей, задача о разбиении плоскостей…)

Задачи исследования:

1. Освоить решение задач с помощью теории конечных разностей.
2. Разработать алгоритм и реализовать на компьютере решение задачи: «*На какое максимальное число частей можно разделить плоскость, если провести n прямых?*».

Литература

1. Алгебра и начала анализа [Текст]: учебное пособие для 9-го класса средней школы / под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Просвещение. 1978.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст]. – М.: Наука, 1975.
3. Гарднер, М. Математические досуги [Текст] / пер. с англ. Ю. А. Данилова. – М.: Мир, 1972.
4. Гельфонд, А. О. Исчисление конечных разностей [Текст]. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 1959.
5. Генкин, С. А., Итенберг, И. В., Фомин, Д. В. Ленинградские математические кружки [Текст]. – Киров, 1994.

ТЕМА № 10: Некоторые методы решения задач о делении доходов

Примерное содержание работы

1. Некоторые методы решения уравнений высших степеней:
   – графический метод решения,
   – численные методы решения (метод отделения корней, метод хорд, метод касательных, метод итерации, метод половинного деления…).
2. Различные подходы к решению текстовых задач «о делении доходов».

Задачи исследования:

1. Освоить суть основных методов решения уравнений высших степеней.
2. Составить алгоритм и реализовать на компьютере решение задачи: *«Три купца внесли капиталы для общей торговли: один 10000 рублей на 6 месяцев, второй 2700 рублей на 1 год и 2 месяца, третий 1300 рублей на все время торговли. По прошествии двух лет они разделили между собой 1710 рублей прибыли. Сколько получил каждый?»*

Литература

1. Пулькин, С. П. Вычислительная математика [Текст]: пособие для учащихся 9–10 классов по факультативному курсу. – М.: Просвещение, 1974.

2. Смирнов, А. А. Высшая математика [Текст]. М.: Просвещ ние, 1980.
3. Шевкин, А. В. Задачи о делении доходов [Текст] // Матем тика в школе. – 1996. – № 6.

ТЕМА № 11: Теорема косинусов

Примерное содержание работы

1. Теорема косинусов для
   – треугольников,
   – четырехугольников,
   – трехгранного угла,
   – тетраэдра.
2. Вывод и доказательство некоторых соотношений, следую щих из теоремы косинусов:

   a. Убедиться в истинности следующей зависимости межд углами треугольника ABC:

$$\cos^2\angle A + \cos^2\angle B + \cos^2\angle C + 2\cos\angle A\cos\angle B\cos\angle C = 1.$$

   b. Доказать, что для четырехугольника ABCD выполня ется следующее неравенство:

$$AC \circ BD \le AB \circ CD + AD \circ BC.$$

Задачи исследования:

1. Привести доказательства теорем, справедливых *для тре угольников:*

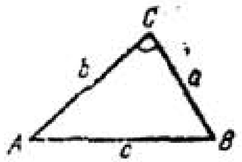
   а) *Квадрат стороны треугольника равен сумме квадра тов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними:*

$$c^2 = a^2 + в^2 - 2aв\cos\angle C.$$

   - Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов: $c^2 = a^2 + в^2$.

   б) *Для треугольника справедливо соотношение:*

$$c = a\cos\angle B + \cos\angle A.$$



2. Привести доказательства теорем, справедливых *для четырехугольников:*

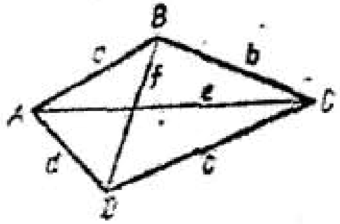
   Стороны (a,b,c,d), диагонали(e,f) и сумма двух противоположных углов четырехугольника ABCD связаны соотношением:

$$e^2 f^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(\angle A + \angle C).$$

   - Если сумма двух противоположных углов четырехугольника равна 90^0, то имеет место зависимость:

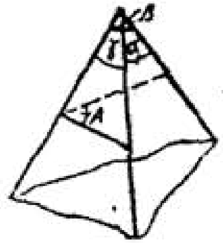
$$e^2 \cdot f^2 = a^2 \cdot c^2 + b^2 \cdot d^2.$$

   - (Теорема Птолемея) Во вписанном четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей: $a \cdot c + b \cdot d = e \cdot f$.



3. Привести доказательства теорем, справедливых *для трехгранного угла:*

   а) *Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных плоских углов, сложенному с произведением синусов тех же углов и косинуса двугранного угла, определяемого этими плоскими углами:* $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos < A$.



Если двугранный угол A прямой, то косинус противолежащего плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных плоских углов:

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma.$$

б) *Произведение косинуса плоского угла трехгранного угла и синусов прилежащих к нему двухгранных углов без произведения косинусов этих двугранных углов равно косинусу двугранного угла, лежащего против рассматриваемого плоского угла:*

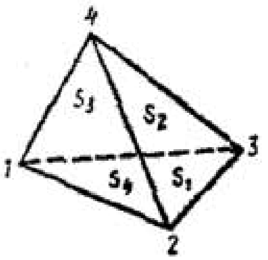
$$\cos\alpha\sin\angle B\sin\angle C - \cos\angle B\cos\angle C = \cos\angle A.$$

Если плоский угол α -прямой, то косинус противолежащего двугранного угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных его двугранных углов, взятому с противоположным знаком:

$$\cos\angle A = -\cos\angle B\cos\angle C.$$

3. Привести доказательства теорем, справедливых *для тетраэдра: квадрат площади любой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей всех остальных его граней без удвоенных произведений площадей этих граней, взятых попарно, на косинусы двугранных углов между ними:*

$$S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{34} - 2S_2S_3\cos\alpha_{14} - 2S_3S_1\cos\alpha_{24}.$$



- квадрат площади грани тетраэдра, лежащий против вершины трехгранного угла с прямыми плоскими углами, равен сумме квадратов площадей остальных граней: $S_4^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

Литература

1. Григорьева, Т. П. В помощь решающим задачи [Текст] // Математика в школе. – 1979. – № 4.

2. Попов, Г. Н. Исторические задачи по элементарной математике [Текст]. – М.: ГТТИ, 1932.
3. Факультативный курс по математике [Текст]: учебное пособие для 7–9 классов / сост. И. Л. Никольская. – М.: Просвещение, 1991.

ТЕМА № 12: Математика и литературоведение

Примерное содержание работы

1. Идеи русского исследователя В. Я. Проппа о возможности описания сюжетов сказок математическими методами.
2. Работы А. А. Маркова по использованию математических методов для исследования текста «Евгения Онегина» (Цепи Маркова).
3. Работы А. Н. Колмогорова по поиску новых особенностей стихотворного метра и его ритмических вариантов, изложенные в книге «Теория стиха».
4. Поиски «формулы авторства» Н. А. Морозовым.

Задачи исследования:

1. Ознакомиться с работами известных ученых по поиску «вариантов моделирования творческого процесса» и «формулы авторства».
2. Ознакомиться с некоторыми алгоритмами создания сказок и попытаться самому написать оригинальную сказку по понравившемуся алгоритму.
3. Попытаться вывести «формулу авторства» Л. Н. Толстого или какого-либо современного поэта или писателя.

Литература

1. Варга, Б. Язык, музыка, математика [Текст]. – М.: Мир, 1981.
2. Зарипов, Р. Х. Машинный поиск вариантов при моделировании творческого процесса [Текст]. – М.: Просвещение, 1977.
3. Колмогоров, А. Н. Теория стиха [Текст]. – М.: Дрофа, 1998.
4. Моисеев, Н. Н. Математика ставит эксперимент [Текст]. – М.: Наука, 1989.
5. Морозов, Н. А. – ученый-энциклопедист [Текст] / сост. Б. Б. Бирюков. – М.: Наука, 1997.

ТЕМА № 13: Математика и языкознание

Примерное содержание работы

1. Глоттохронология – наука, позволяющая определить родственность языков и выделение их из праязыка.

2. Принципы составления частотных словарей и роль частотных словарей в выявлении наиболее важных терминов, понятий.
3. Значение дифференциальных уравнений для получения информации о языке.
4. Секреты древних языков, раскрытые благодаря математическим методам.

Задачи исследования:

1. Попытаться изученные формулы глоттохронологии применить к анализу связей старославянского, русского и украинского языков.
2. Составить частотный словарь учебника математики.
3. Предложить решение нескольких популярных лингвистических задач.

Литература

1. Алпатов, В. М. История лингвистических учений [Текст]. - М.: Языки русской культуры, 1999.
2. Пиотровский, Р. Г. Математическая лингвистика [Текст]. - М.: Высшая школа, 1997.
3. Число и мысль. – Вып.7. – М.: Просвещение, 1984.
4. Фоменко, А. Т. Методы математического анализа исторических текстов [Текст]. – М.: Знание, 1996.
5. Фоменко, А. Т. Статистическая хронология [Текст]. – М.: Знание, 1990.

ТЕМА № 14: Диофантовы уравнения

Примерное содержание работы

1. Исторический экскурс. Понятие «диофантово уравнение». Методы Диофанта у Виета, Ферма, Эйлера, Якоби, И. Р. Шафаревича.
2. Решение линейных уравнений методом перебора, методом спуска.
3. Признак невозможности решения линейного уравнения с двумя переменными с целыми коэффициентами в целых числах, в положительных числах.
4. Уравнение второй степени, решаемые в целых числах (задача о пифагоровых тройках).
5. Способы решения уравнений в целых числах (разложение на множители, алгоритм Евклида, решение уравнений в целых числах как квадратных относительно какой-либо переменной, решение систем уравнений в целых числах, заменой каждого коэффициента на его класс вычетов по mod p).

Задачи исследования:

1. Предложить решение задачи о фазанах и кроликах несколькими способами (методом перебора, через систему уравнений, методом спуска).
2. Выяснить: всегда ли линейное уравнение с целыми коэффициентами имеет решение?
3. Вывести признак о невозможности решения, в положительных числах, линейного уравнения с двумя переменными.
4. Вывести формулы, позволяющие найти бесконечное множество пифагоровых троек.
5. Некоторые обобщения, гипотезы, относящиеся к арифметике алгебраических кривых (Существование рациональных точек на эллиптической кривой).

Литература

1. Башмаков, И. Г. Диофант и диофантовы уравнения [Текст]. – М.: Наука, 1972.
2. Гельфонд, А. О. Решение уравнений в целых числах [Текст]. – ГИТТЛ, 1952.
3. Дорофеев, Г. В., Банимович, Е. А. Курс по выбору для IX класса [Текст] // Математика в школе. – 2003. – № 10.
4. Пичурин, Л. Ф. За страницами учебника алгебры [Текст]: книга для учащихся 7–9 классов. – М.: Просвещение, 1990.

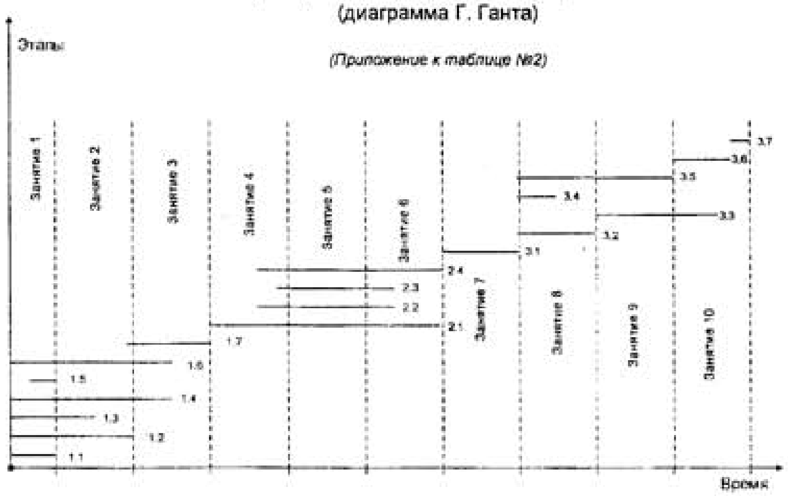
Библиографический список

1. Антонова, Е. Метод проектов в обучении математике [Текст] // Математика. – 2008. – № 13. – С. 9–21.
2. Бусеев, В. Что такое проект в математике [Текст] // Математика. – 2008. – № 13.
3. Килпатрик, В. Х. Метод проектов [Текст]. – Л.: ГТТИ, 1925.
4. Колеченко, А. К. Энциклопедия педагогических технологий [Текст]: пособие для преподавателей. – СПб.: Каро, 2004.
5. Пахомова, Н. Ю. Метод учебного проектирования в образовательном учреждении [Текст]: пособие для учителя и студентов педагогических вузов. – М.: АРКТИ, 2003.
6. Ройтберг, М. О математических проектах в Красноярской летней школе [Текст] // Математика. – 2008. – № 13. – С. 25–38.

7. Романовская, М. Б. Метод проектов в контексте профильного обучения в старших классах: Современные подходы [Текст]: научно-методическое пособие для повышения квалификации работников образования. – М.: АПК и ПРО, 2002.
8. Чечель, И. Д. Исследовательские проекты в практике обучения [Текст] // Практика административной работы в школе. – 2003. – № 6. – С. 24–29.

Приложение 1

Примерный график работы над проектом
(диаграмма Г. Ганта)



И. В. Чуй

Специфика работы в математических классах и подготовка студентов к ней

Специализированные математические школы возникли в то время, когда наша страна достигла успехов в области освоения космоса, физики и других точных наук. Так как таких школ было мало, то и конкурс туда был очень большой. Первые учебники, программы для этих школ ориентировались на подготовку учеников для поступления на математические факультеты престижных вузов страны. Поступали в такие школы ученики, для которых математи-

:а в будущем становилась их профессией. Соответственно этому, ченики в таких школах изучали материал, с которым им придется иметь дело в будущей жизни и работе. Поэтому и углубленное изучение происходило не столько «вглубь», сколько «вширь».

В связи с перестройкой народного образования, с отходом от принципа «всем одинаковое среднее образование» и отходом от единого типового плана, число специализированных классов неравненно выросло. Но через 1–2 года, многие из таких классов перестали существовать. Отметим некоторые проблемы, с которыми столкнулись школы и классы с углубленным изучением математики.

Первая и основная проблема – это отсутствие учителей, имеющих опыт работы в классах с углубленным изучением математики. Как правило, учитель, работающий во вновь организованном математическом классе, работает и в параллельном или в других обычных классах, и те методы, приемы, которые дают неплохие результаты на протяжении многих лет в его педагогической деятельности, он переносит и на работу в математическом классе.

Так, например, – только одна из ситуаций – закрепление изученного материала. Как правило, в обычных классах после того, как учитель объяснил новый материал и показал образец решения примера на эту тему, он предлагает ученикам самостоятельно на доске или в тетрадях решить аналогичный пример. В математических классах такой прием не вызывает интереса. С каждым решенным заданием ученик такого класса хочет хоть немного, но продвинуться вперед. Это касается и домашнего задания.

Вторая проблема, стоящая перед учителем – найти тот уровень строгости, который оказался бы достаточным для обоснования основных положений теории в будущем и был бы доступен ученикам класса.

И хотя в настоящее время созданы и программы для классов с углубленным изучением математики, и специальные учебники (очень несовершенные), начинающему учителю очень сложно выбрать уровень строгости изложения таких тем, как «Действительные числа», «Пределы», «Производная», «Комбинаторика и элементы теории вероятностей», «Логарифмическая и показательная функции».

Третья проблема – набор учеников в математические классы и их уровень математической подготовки и не только. Еще в недалеком прошлом в такие классы поступали, в основном, ученики, мечтающие связать свою жизнь с математикой, физикой. «Теперешние времена» внесли существенные коррективы: число таких учеников заметно поубавилось. Сегодня в таких классах оказывается значительное число учеников, желающих повысить свой математический уровень для поступления в вузы, где математика включена в список вступительных экзаменов, но не является основной в подготовке специалистов избранного профиля. В такой обстановке начинающему учителю легко сбиться на чистую технику и заняться решением конкурсных задач повышенной трудности. Но решением даже большого числа конкурсных задач, не исследуя их взаимосвязей, нельзя воспитать личность творческую. Дифференциальный подход к каждому ученику в таких классах приобретает еще большую роль, чем в обычных и углубление в большей степени должно идти «вглубь», а не «вширь».

И четвертая, наиболее трудная проблема, которую необходимо решить каждому учителю, работающему в математическом классе – как одновременно решать три, далеко не совпадающие, основные задачи математической школы:

1) формирование основ научно-исследовательской деятельности у учеников независимо от специальности, о которой они мечтают;

2) подготовка и успешная сдача экзаменов за курс средней школы;

3) подготовка учащихся к поступлению в вузы, требующие различного уровня математических знаний.

Эти три различные проблемы далеко не всегда соприкасаются. Так, даже вторая и третья проблема очень отличаются друг от друга. Например, чуть меньше половины времени общего числа уроков курса «Алгебра и математический анализ» отводится на изучение тем, которые не входят в программу выпускных экзаменов. Это темы – «Пределы», «Интеграл и дифференциальные уравнения», «Комплексные числа», «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».

На примере одного урока покажем, как решаются многие из вышеперечисленных проблем. Это урок на повторение и обобщение в 11 классе. Урок нестандартный, не вписывающийся в обычную схему: проверка домашнего задания – решение ключевых задач –

закрепление. Даже тема урока «Урок – бенефис выражения $x+\frac{1}{x}$» нестандартна как своей формулировкой, так и «бедностью» задач, которые связаны с этим выражением. Перечислим основные задачи, которые были решены на уроке и предлагались для домашнего задания, а потом рассмотрим методические вопросы, которые способствовали решению проблем, перечисленных выше.

1. Решить устно уравнение: $\frac{x^2+1}{x}=2{,}5$.

Решение

$x+\frac{1}{x}=2+\frac{1}{2}$. Откуда видно, что корнями уравнения являются числа 2 и $\frac{1}{2}$.

Ответ: 2; $\frac{1}{2}$.

2а) Докажите, что сумма двух обратных положительных чисел не меньше 2.

б) Доказать, что $x+\frac{k}{x}\ge 2\sqrt{k}$, где $x>0,\quad k>0$.

в) Доказать, что $kx+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{k}$, где $x>0,\quad k>0$.

Решение

Все три неравенства легко доказываются с помощью неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab},\text{ где } a\ge 0, b\ge 0.$$

а) $x+\frac{1}{x}\ge 2x\cdot\frac{1}{x}=2$. Знак равенства имеет место, если $x=1$.

б) $x+\frac{k}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{k}{x}}=2\sqrt{k}$. Знак равенства имеет место, если $x=\sqrt{k}$.

в) $kx+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{kx\cdot\frac{1}{x}}=2\sqrt{k}$. Знак равенства имеет место, если $x=\sqrt{k}$.

3. Задача о «честном» продавце. У продавца испортились чашечные весы, но он решил торговать на этих весах, взвешивая

одну «половину» товара на одной чашке, а другую «половину» товара на другой чашке, он думал так, что если в первом случае, например, недовесил товара, то во втором случае перевесит столько же. Прав ли продавец?

Решение

Пусть продавцу надо взвесить 20 кг товара, L_1 – длина левого плеча на весах, L_2 – длина правого плеча, Q кг – вес гири, помощью которой происходит взвешивание.

Пусть в первый раз было отвешено x кг, во второй раз - кг товара. Из курса физики известно, что $x\cdot L_1 = Q\cdot L_2$, откуда $x=\dfrac{QL_2}{L_1}$. $Q\cdot L_1 = y\cdot L_2$, откуда $y=\dfrac{QL_1}{L_2}$.

Всего товара: $x+y=\dfrac{QL_2}{L_1}+\dfrac{QL_1}{L_2}=Q\left(\dfrac{L_2}{L_1}+\dfrac{L_1}{L_2}\right)>2$, т.к. весы испорчены, $L_1\neq L_2$, а из задачи 2 следует, что $\left(\dfrac{L_2}{L_1}+\dfrac{L_1}{L_2}\right)>2$.

Ответ: продавец не прав, он взвешивает товара больше положенного.

4. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; б) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; в) $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ – целые числа.

Доказательство

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ – целое;

б) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\dfrac{1}{x^2}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-3\right)$ – целое.

в) Доказательство методом математической индукции.

5. Доказать, что при $x>0,\ y>0$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0.$$

Доказательство

Преобразуем неравенство так:

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+4\geq 0;$$

$$\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+2\geq 0;$$

Но из задания 2а) следует, что $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\geq 2$. Поэтому неравенство доказано.

6. Решить уравнения:

а) $\dfrac{x^2+1}{x}=2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}$;

б) $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=18$;

в) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+4\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Решение

а) $x+\dfrac{1}{x}=2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}$. Левая часть $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$ (задача 2а)). $2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}\leq 2$. Равенство достигается лишь в том случае, если $x+\dfrac{1}{x}=2$ и $2\sin^2\dfrac{\pi x}{2}=2$ одновременно, т.е. при $x=1$.

Ответ: $x=1$.

б) $81^{\sin^2 x}+81^{\cos^2 x}=18 \Leftrightarrow \begin{cases}81^{\sin^2 x}=t\\ t+\dfrac{81}{t}=18\end{cases}$, но

$t+\dfrac{81}{t}\geq 2\sqrt{81}=18$ (задача 2б)). Поэтому равенство $t+\dfrac{81}{t}=18$ возможно лишь при $t=\sqrt{81}=9$. Тогда получим:

$81^{\sin^2 x}=9 \Leftrightarrow 2\sin^2 x=1 \Leftrightarrow 1-\cos 2x=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$, *где* $n\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$.

в) Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t$, тогда

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\left(\sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\left(\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}\right)^x=\frac{1}{t}.$$

Получим, что $t+\frac{4}{t}=4$, но $t+\frac{4}{t}\geq 2\sqrt{4}=4$ (задача 2б)), поэтому равенство возможно только при $t=\sqrt{4}=2$.

Тогда $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2$.

Откуда $x=\log_{\sqrt{2+\sqrt{3}}}2=\frac{2}{\log_2(2+\sqrt{3})}$.

Ответ: $\frac{2}{\log_2(2+\sqrt{3})}$.

7. Найти множество значений функции

$$f(x)=\frac{10^x+3\cdot 10^{-x}}{\ln 10}.$$

Решение

$f(x)=\frac{10^x+3\cdot 10^{-x}}{\ln 10}=\frac{1}{\ln 10}\left(10^x+\frac{3}{10^x}\right)=\frac{1}{\ln 10}\left(t+\frac{3}{t}\right)\geq\frac{1}{\ln 10}\cdot 2\sqrt{3}$ (задача 2б)), где $t=10^x$, кроме того, *f(x)* – непрерывна на ***R*** и при $x\to+\infty$ $f(x)\to+\infty$. Поэтому $E(y)=\left[\frac{2\sqrt{3}}{\ln 10};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left[\frac{2\sqrt{3}}{\ln 10};\ +\infty\right)$.

P.S. Решение этой задачи с помощью приема нахождения наибольшего и наименьшего значения, а также поиск ответа на

вопрос: «При каких Q уравнение $\frac{10^x+3\cdot 10^{-x}}{\ln 10}=Q$ имеет хотя бы одно решение» – намного сложнее.

8. Решить уравнение $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$.

Решение

Разделив обе части уравнения на x^2 (x=0 – не является корнем) получим уравнение $6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-38=0$, которое с помощью замены $x+\frac{1}{x}=t$ легко решается.

Ответ: $\left\{-2;-\frac{1}{2};3;\frac{1}{3}\right\}$.

9а) Не применяя производной, построить график функции $y=x+\frac{1}{x}$.

б) Сколько решений имеет уравнение $x+\frac{1}{x}=a$ в зависимости от параметра a?

Решение

а) «Сложив» графики функций $y_1=x$ и $y_2=\frac{1}{x}$ при x>0, и учитывая, что $y_{\min}=y_{(1)}=2$ (задача 2а)) построим график при x>0. Так как функция нечетная, то ее график симметричен началу координат, x=0 – ее вертикальная асимптота, y=x – наклонная.

б) Из графика функции $y=x+\frac{1}{x}$ видно, что при $a=2$, $a=-2$ – одно решение, при $a\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$ – два решения, при $-2<a<2$ – нет решений.

10. Найдите расстояние между фигурами, заданными уравнениями $y=\frac{1}{x}$ и $(x-3)^2+(y-3)^2=1$.

Решение

Уравнение $y=\frac{1}{x}$ задает гиперболу, $(x-3)^2+(y-3)^2=1$ – окружность с центром $O_1(3;3)$. На первый взгляд, кратчайшим из расстояний между точками этих фигур будет расстояние AB, где A и B – точки, лежащие на биссектрисе OO_1 и принадлежащие одновременно гиперболе и окружности, но это предположение окажется неверным. Найдем сначала расстояние от точки $O_1(3;3)$ до гиперболы.

Пусть $M(x;\frac{1}{x})$ – произвольная точка гиперболы. Тогда

$$OM^2=(x-3)^2+\left(\frac{1}{x}-3\right)^2=x^2-6x+9+\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+9=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-$$

$$-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+16.$$ Заменив $x+\frac{1}{x}$ через t, получим квадратичную функцию $f(t)=OM^2=t^2-6t+16$, которая достигает наименьшего значения, равного 7, при $x+\frac{1}{x}$ равном 3. Это вытекает из задачи 2а).

А так как уравнение $x+\frac{1}{x}=3$ имеет два решения $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, то таких точек две. Тогда расстояние между гиперболой и окружностью будет равно $\sqrt{7}-1$. В то же время $AB=\sqrt{8}-1$.

Ответ: $\sqrt{7}-1$.

Все эти задачи образуют некоторую цепочку, когда решение одной задачи помогает решению другой, и с каждой решенной задачей ученик, хоть немного, но продвигается вперед.

Остановимся немного на методике проведения уроков, характерных для математических классов.

Очень редко теоремы, задачи формулируются в категоричной форме: «Докажите!», «Решите!», «Найдите!». Вместо этого я предлагаю самим ученикам ответить на вопросы: «Что бы Вы хотели услышать от меня по такой-то теме?», «Что Вы сами знаете об этом?», «Угадайте результат», «Обобщите задачу», «Назовите частные случаи этого утверждения», «Нет ли других решений этой

задачи?», «Нельзя ли использовать результат решенной задачи при решении других задач?» (этот прием мы называем «принципом чайника»), «Что будет, если…», «Составьте обратное утверждение. Верно ли оно? Можете ли Вы его доказать?».

Так, например, на рассмотренном уроке-бенефисе были заданы такие вопросы:

а) Что Вы знаете о сумме двух положительных обратных чисел? Какие доказательства Вы можете предложить? (3–4 ученика знакомят учащихся класса с различными вариантами доказательства).

б) В каком случае достигается знак равенства? Что Вы можете сказать о сумме двух отрицательных обратных чисел? ($x+\frac{1}{x}\le -2$).

в) Как обобщить эти два случая? $\left(\left|x+\frac{1}{x}\right|\ge 2\right)$

г) Какие обобщения этого неравенства Вы можете предложить? (2а), 2б)).

д) Где можно использовать полученные неравенства?

После чего учащиеся решают задачу 3, в решении которой используется полученное неравенство. На примере этой задачи ученики видят взаимосвязь математики и физики.

При решении данных примеров обычно 5-6 учеников предлагают свои способы решения, отличные от решения учителя. В каждом таком случае ученикам предлагается изложить свое решение на доске, параллельно с решением учителя (здесь идет как бы соревнование) и, если решение верное, то сравниваются эти способы решения, выясняются их преимущества и недостатки. Такой прием применяется даже в тех случаях, когда решения, предлагаемые учениками, кажутся «бредовыми».

Задачу 10 предлагаем для домашнего задания. При решении ее стандартным способом, то есть оптимизаций функции $f(x)=(x-3)^2+\left(\frac{1}{x}-3\right)^2$ с помощью производной приходим к уравнению $x^4-6x^3+6x-2=0$, которое решается нелегко. Но даже решив его, мы находим точки минимума $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, вычисления значений функции в которых приводит к громоздким вычислениям.

Этот пример служит наглядным подтверждением того, что чертеж «не служит еще доказательством». То, что «видно из чертежа», может оказаться и неверным.

Такая кропотливая работа с задачей на уроке в обычном классе может и не «пойти». Опыт показывает, что даже решения задачи различными способами не вызывает интереса у многих, даже и неплохих, учеников. Не говоря уже о времени, которого требуется значительно больше и которого катастрофически не хватает в общеобразовательных классах.

Но, с другой стороны, эта работа способствует критическому отношению учащихся к изучаемому материалу, развивает научно-исследовательские навыки (которые нужны независимо от специальности, с которой ученик свяжет свою жизнь), приучает учеников к нахождению взаимосвязей между задачами, казалось бы, различными, взятыми из разных областей науки. И ни одна из групп учеников («сильные», «средние», «слабые») не остается безучастной к решению поставленной проблемы, внося свою лепту (соответствующую их возможностям) в решение как простых, так и более сложных задач. Все это способствует созданию в классе, школе той атмосферы, которая делает учеников увлеченными наукой.

Приведу названия еще нескольких «уроков-бенефисов» и «уроков одной задачи» для 10–11 классов: «Теорема Коши о средних и ее применение», «Угол и точка», «Скалярное произведение и алгебраические задачи».

Подбор задач к таким урокам очень затруднителен, они не «валяются в каждом углу», создание такого набора требует опыта. В методической литературе, которая посвящена проблемам математических классов, чаще всего находим ответ на вопрос «Что изучать?» и почти не находим ответа на вопрос «Как учить?».

Подготовку будущего учителя к работе в специализированных и профильных классах надо начинать уже на студенческой скамье. Как показывает практика, учитель, не занимающийся сам творческой деятельностью, не может научить этому других.

Определенная работа в этом направлении проводилась в ЯрГУ на семинарах по методике преподавания математики. Например, на одном из занятий со студентами была проведена «Деловая игра» по материалам вышеизложенного урока. При подготовке к экзаменам студенты столкнулись со многими трудностями. Даже после того, как были подобраны соответствующие задачи и студенты приступили к написанию конспекта, оказалось, что трудно сформулировать цель такого урока, перечислить знания, умения, навыки, которыми должны овладеть воображаемые ученики. Невозможно разбить урок на традиционные части: «Проверка домашнего задания», «Объяснение нового материала», «Закрепление», «Постановка домашнего задания». Студентам казалось, что такой урок «не пойдет». Лишь после того, как студенты побывали на уроке в 11-м математическом классе и увидели тот неподдельный интерес, с которым работали ученики, они убедились в пользе таких нестандартных уроков.

Их нельзя заменить уроками по решению большого числа конкурсных задач, что происходит в значительном числе школ с математической специализацией.

На наш взгляд, многие вопросы подготовки будущих учителей математических классов, переподготовки учителей, работающих в таких классах, и лучшей подготовки учеников, ориентирующихся на профессию математика, необходимо решить с помощью организации базовой школы с углубленным изучением математики, где будут сконцентрированы лучшие педагогические кадры как опытных, так и молодых учителей. В такой школе:

- могут специализироваться студенты по углубленному изучению математики, которые могут испытать свои силы и в работе с сильными учениками, готовя их к олимпиадам, работая вместе с учениками над творческими работами, возможно перекликающимися с их курсовыми или дипломными работами;
- учителя, работающие в специализированных классах и проходящие переподготовку, будут иметь возможность продемонстрировать свои творческие наработки;
- для учеников района, города, желающих расширить знания по математике, будут работать семинары, факультативы, которые смогли бы вести ученые города.

Е. Ю. Шарунова
Провинциальный колледж г.Ярославля

Область определения функции в разных задачах курса математики старшей школы

В данной статье сделана попытка дать конкретные рекомендации по активизации мышления учащихся при решении разных задач курса математики старшей школы с использованием области определения функции.

Стало аксиомой утверждение, что «в современном быстроменяющемся мире важным становится умение человека постоянно переучиваться, находить нужную информацию, анализировать ситуацию, выделяя в ней самое существенное» [3]. В связи с этим одной из первоочередных и важнейших задач образования является развитие мышления учащихся.

В примерной программе и стандарте среднего (полного) общего образования по математике [1] отмечено, что изучение математики в старшей школе как на базовом, так и на профильном уровнях направлено «на...**развитие**...математического мышления и интуиции, творческих способностей...» [1].

В методическом письме 2006 года отмечается, что учащиеся затрудняются в нахождении области определения функции (например, $y=\dfrac{5}{2-\sqrt[4]{x}}$). Около четверти выпускников за область определения заданной функции принимают область определения корня четной степени, пятая часть экзаменуемых исключает из множества всех действительных чисел только те значения аргумента, при которых знаменатель обращается в ноль.

В методическом письме «Об использовании результатов единого государственного экзамена 2008 года в преподавании математики в образовательных учреждениях среднего (полного) общего образования», разработанном членами федеральной предметной комиссии ФИПИ отмечается, что значительная часть выпускников, показавших *«удовлетворительный»* уровень подготовки (тестовый балл 25–46) (44,9 % всех участников тестирования), не усвоила нахождение области определения сложной функции. Оказалось, что выпускники, получившие оценку «3», не умеют

исследовать свойства функций, в частности, находить область определения функции $y=\sqrt{3^{2x-3}-1}$.

В 2008 году в задания ЕГЭ С2 была включена следующая задача, для решения которой учащимся нужно было составить модель-уравнение:

а) Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $6^{\log_3\left(9-4x^2\right)}$ и $6^{\log_3(2x+3)+\log_3\left(2x^2+3x+6\right)}$ приним ают равные значения.

б) Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $x^2\log_2(3x+1)-x\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3x+1}$ и $3x^2+x$ принимают равные значения.

В методическом письме отмечалось, что «основная ошибка при выполнении данных заданий состояла в том, что выпускники считали окончательным ответом корни уравнения-следствия, т.е. в их решении отсутствовал один из шагов – отбор корней, удовлетворяющих уравнению, составленному по условию задачи [1].

Наличие подобных ошибок свидетельствует о том, что в процессе обучения не было уделено должного внимания отработке базовых умений. Причем формирование умения «находить область определения функции» должно начинаться в курсе алгебры 7 класса и продолжаться в последующих классах.

Остановлюсь на методике рассмотрения данной темы в старшей школе, так как все 22 года своей педагогической деятельности постоянно преподавала в старших классах, а на протяжении последних 7 лет работаю только в 10–11классах, причем с 2006 года в профильных.

Задания, связанные с областью определения функции, подробно рассматриваются при изучении следующих тем курса математики «Числовые функции» (Сложная и обратная функции), «Тригонометрические функции», «Степенные, логарифмические, показательные функции». С учащимися отрабатываются следующие теоретические положения.

1. Если область определения функции, заданной формулой, не указана, то за область определения принимают множество всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл. Это – понятие естественной области определения функции.

2. Область определения функции может быть заданной, тогда она указывается в задании функции.

3. Область определения иногда еще называют областью допустимых значений функции (ОДЗ).

При рассмотрении темы «Числовые функции» обобщаются полученные в основной школе знания учащихся по теме «Область определения функции» с помощью таблицы:

Функция y=f(x)	Область определения функции *D(f)*	Примеры
$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$	$(-\infty;+\infty)$	
y=$\dfrac{h(x)}{g(x)}$	g(x) $\neq$ 0	
Y=$\sqrt{h(x)}$	h(x)$\geq$0	

По мере изучения учащимися новых функций, таблица дополняется:

Функция y=f(x)	Область определения функции *D(f)*	Примеры
Y=$\sqrt[2n]{h(x)}$	$h(x) \geq 0$	
Y=$\arccos g(x)$	$1 \leq g(x) \leq 1$	
Y=$\arcsin g(x)$	$1 \leq g(x) \leq 1$	
Y=$(h(x))^{\frac{m}{n}}, \dfrac{m}{n} > 0$	$h(x) \geq 0$	
Y=$(h(x))^{\frac{m}{n}}, \dfrac{m}{n} < 0$	$h(x) > 0$	
Y=$\log_a h(x), a\rangle 0, a \neq 1$	$h(x) > 0$	

Третий столбик таблицы заполняют сами ученики: по придуманной ими функции находят ее естественную область определения.

Затем с учащимися полезно выполнить обратное задание:

По данной области определения придумать функцию. Например (в скобках даны возможные варианты ответов):

1) D(f)=(-∞;2)U(2;+∞); (f(x)=$\dfrac{7-x}{x-2}$);

2) D(f)=(-∞;-2) (f(x)=$\log_{0,9}(-x-2)$)

3) D(f)=(-∞;-2)U(2;+∞) (f(x)=$(x^2-4)^{-3,8}$)

4) D(f)=(-∞;-2]U[2;+∞) (f(x)=$\sqrt[2010]{x^2-4}$)

5) D(f)=(-∞;-2)U[2;+∞) (f(x)=$\dfrac{(x^4-16)^{0,2}}{2+x}$)

6) D(f)=[-2;2] (f(x)=$\sqrt{4-x^2}$)

7) D(f)=[-2;0)U(0;2] (f(x)=$\sqrt{4-x^2} - \dfrac{3+x}{x}$)

8) D(f)=(-∞;-2)U(2;+∞)U{0} (f(x)=$\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$)

Данное задание носит более творческий характер, и, несомненно, имеет большую ценность.

Затем рассматриваются вопросы, связанные с нахождением области определения функций, заданных графически, и решением обратной задачи: по заданной области определения построить график функции

Главная задача: добиваться от каждого учащегося сознательного и обоснованного решения заданий, чтобы приобретенные ими знания неразрывно связывались с практическими навыками. На уроках школьники учатся думать над каждой строчкой, ищут из всех предложенных способов решения задания самый «экономный и красивый».

Почему ученики не любят тот или иной предмет? Потому что, как говорят школьники, им на уроке не интересно, скучно. Чтобы было интересно на уроках, следует предлагать ученикам такие задачи, решение которых требует от них частично поисковой и исследовательской деятельности. Эти задачи должны быть такими, чтобы их содержательная сторона и процесс решения вызывали бы у ученика положительный отклик, делали саму учебную деятельность приятной и увлекательной. Уместно в связи с этим напомнить известную мысль Д. Пойа, сравнившего учителя математики с продавцом, который на каждом уроке должен «продать немного математики». А чтобы «продать математический товар», ученика надо заинтересовать. Для этого при изучении каждой темы можно использовать на уроках задачи из конкурсов «Кенгуру» и «Кенгуру–выпускникам», способствующие развитию сообразительности и внимания.

Например, в заданиях «Кенгуру–выпускникам» (тест готовности к продолжению образования) в 2005 году представлен вопрос: верно ли, что данная функция определена во всех точках отрезка [2;6]?

1) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 10}$; 2) $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$;

3) $y = \sqrt{\dfrac{x^3 - 9x^2 + 20x}{x+1}}$; 4) $y = \lg(28 - 3^{\frac{x}{2}})$;

5) $y = \dfrac{1}{|x-10| - |x|}$.

Выполнение этих заданий вызвало неподдельный интерес учащихся.

Можно заметно *активизировать мыслительную деятельность* учащихся, используя на уроках такую систему упражнений, при выполнении которой учащимися **нарушались** бы условия:

1. учащимся предлагают задачи только одного типа;
2. их решения сводятся к одной и той же операции, которая может состоять из ряда элементарных операций;
3. эту операцию учащимся не надо выбирать среди других, которые возможны в сходных ситуациях;
4. данные задачи не являются для учащихся непривычными;
5. учащийся уверен в безошибочности своих действий [2].

Систематическое выполнение таких упражнений снижает вероятность возникновения у них формальных навыков.

В пункте первом отмечается опасность выполнения учащимися однотипных упражнений. Но совсем отказаться от однотипности задач практически невозможно, поскольку иначе у многих школьников будут с большим трудом формироваться необходимые умения и навыки. Можно рекомендовать учителю чередовать однотипные упражнения с теми, в которых условия варьируются и поэтому начинают казаться многим учащимся в какой-то мере непривычными.

В методическом письме «О преподавании математики в средней школе с учетом результатов ЕГЭ 2005 года» отмечается

«…несформированность у учащихся старшей школы умения самостоятельно добывать знания и использовать имеющиеся знания в несколько измененной ситуации».

Чтобы преодолеть привычку решать по «образцу», даже в устный счет обязательно должны включаться необычные задания. Наиболее полезной считается следующая организация данного вида работы на уроке: задания предлагаются учащимся в 2 вариантах, каждый ученик записывает в тетради ответы, затем проводится проверка. Ученики поднимают руки, если получен верный ответ. Если решение вызвало затруднения, сразу происходит разбор его решения. По окончании проверки ученики выставляют себе оценки по известному заранее критерию, допускающему право на ошибку. (Среднее арифметическое трех оценок за устный счет выставляется в журнал). При такой организации устного счета работают все без исключения учащиеся; идет отработка не только типичных заданий, но и обсуждаются общие подходы к решению, различные тонкости в данной теме; предупреждаются наиболее распространенные ошибки, воспитывается самостоятельность, вырабатываются навыки самопроверки.

С обеспечением многих учебных заведений интерактивными досками появляется возможность улучшить обратную связь учителя и учащихся: выбранные ответы с помощью джойстиков отмечаются учащимися и сразу на дисплее появляется информация о качестве выполнения каждого задания каждым учеником, кроме того, можно сразу показать верное решение, «открыв» его на доске, выделить ключевые моменты.

Приведу в качестве примера задания устного счета по теме «Числовые функции» (10 кл.)

Найти область определения функций:

1. $f(x) = -23$; 2. $y = x^5 - 3x^2 + 4$;

3. $y = \dfrac{x+7}{49 - x^2}$; 4. $y = \dfrac{1}{7-x}$;

5. $y = \sqrt{x+2}$; 6. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$;

7. $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$; 8. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$;

9. $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{x-1}$; 10. $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}$;

11. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$; 12. $y=\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}$;

13. $y=\sqrt{|x|}$; 14. $y=\sqrt{-x^2}$.

При проверке следует обратить внимание учащихся на отличие в выполнении заданий 3-4 и 10-11. Так функции 3 и 4 тождественны на области определения третьей, но при $x=-7$ функция 3 не определена, а функция 4 определена.

Многие учащиеся считают, что функции 10 и 11 – это одна и та же функция, и с удивлением отмечают, что области определения этих функций различны. Возникновение данной ошибки связано с тем, что при изучении функции $y=\sqrt{x}$ учащиеся в средней школе запоминают свойства квадратного корня $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$, $\left(\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)$ без условий на переменные $x\geq 0, y\geq 0$ ($x\geq 0, y\rangle 0$).

Использование учебных заданий – проверочных и творческих – позволяет более полно выявлять познавательные возможности учащихся в двух различных направлениях: горизонтальном, фиксирующем динамику усвоения программного материала, и вертикальном, дающем картину развития ученика, ее динамику под влиянием обучения. При этом особое место должно отводиться задачам, заведомо провоцирующим учащихся на ошибки. Ошибка и сопровождающий ее анализ не только активизирую мыслительную деятельность, но и в значительной мере усиливают интерес и внимание учащихся, ослабляют их излишнюю самоуверенность.

Например, при решении заданий на использование свойств логарифмов, среди прочих желательно предложить выполнить учащимся задание на упрощение выражения $y=7^{0,5\log_7(3-\sqrt{10})^2}$. Многие ученики автоматически применяют известные свойства логарифмов, получают неверный ответ $3-\sqrt{10}$, и только после просьбы учителя найти ошибку задумываются. В ходе обсуждения учащиеся замечают, что у выражений $\log_a x^2$ и $2\log_a x$ различные ОДЗ. Происходит поиск выхода из создавшейся ситуации и учащимися выводится общая формула $\log_a x^{2n}=2n\log_a|x|$, $n\in Z$.

Даже выполнение самостоятельной работы может носить обучающий характер и способствовать активизации мышления учащихся.

Одним из результатов работы в старших классах стали составленные мною более 20 самостоятельных и контрольных работ по различным темам курса алгебры и начал анализа. Приведем один из вариантов самостоятельной работы по теме «Область определения функции» в 10 классе математического профиля.

– Найти область определения функции (1-5):

1. $y=\sqrt{x^2-8x+21}$ — ***R***
2. $y=\dfrac{5+x}{\sqrt{6x-3x^2}}+\dfrac{20}{1-x}$ — (0;1)U(1;2)
3. $y=\sqrt{\dfrac{x^4-17x^2+16}{5x-5}}$ — [-4;-1]U[4;+∞)
4. $y=\sqrt{-x^2+3x-2}$ — [1;2]
5. $y=\sqrt{(x-7)^8(x+13)(x-15)}$ — (-∞;-13]U{7}U[15;+∞)

– Укажите наименьшее целое число из области определения функции:

$y=\sqrt{45-|2-4x|}$ — -10

Приведем один из вариантов самостоятельной работы по теме «Показательная и логарифмическая функции» в 11 классе.

– Постройте график функции, найдите область определения и множество значений функции (1-4):

1) $y=0{,}5^x+1$; 2) $y=\log_3(x+2)$; 3) $y=-2\log_{\frac{1}{3}}x$; 4) $y=\left|2^x-4\right|$.

– Найдите область определения функции (5-8):

5) $y=\log_{\sqrt{2}}(2x-\sqrt{2}x^2)$; 6) $y=\lg\left(1-\left(\dfrac{1}{11}\right)^{0,5x-7}\right)$;

7) $y=\log_{0,01}\dfrac{x^2+5x+4}{x+1}$; 8) $y=\log_\pi\left(35-|3x-11|\right)$.

Индивидуализация обучения в классно-урочной системе предполагает работу учителя одновременно с разными группами учащихся. К каждому уроку подбираются задания различной степени сложности, предъявляются учащимся, используются разные критерии оценок. Особое внимание уделяется выполнению домашних работ, считая их одним из самых действенных способов формирования у школьников способности к самообразованию. Ведь именно при выполнении домашней работы придется подумать, вспомнить объяснения учителя, применить их к новому упражнению; не торопясь, еще и еще раз повторить прочитанное или услышанное в классе; то, что казалось на уроке ясным, дома может вызвать у ученика вопросы. Поэтому в первую четверть проверяется каж дая дома шняя работ а де сятиклассника, проводится при необходимости ее анализ либо с классом, либо индивидуально. По трем текущим оценкам выставляется итоговая в журнал, при этом учитывается работа над ошибками.

Оценивая успехи каждого ученика, сравниваю их только с его собственными предшествующими достижениями, показывая, что удается лучше, над чем еще следует поработать, как более рационально организовать учебную деятельность, чтобы ее усовершенствовать. Если есть прогресс в обучении, обязательно хвалю ученика при всем классе, даже если это небольшой «шажок» вперед «слабого» ученика.

Решение задачи (если это подлинная мыслительная деятельность) есть всегда нахождение нового, ранее не известного. А всякий поиск связан с пробами. Поэтому анализ неверного (или частично ошибочного) ответа имеет нередко большее значение, чем иллюстрация правильных образцов готовых решений. Ориентация некоторых методик на использование только правильных образцов (эталонов усвоения) без анализа путей их достижения (как правильных, так и ошибочных) не дает достаточного материала для формирования мышления в его основной функции – функции нахождения нового (неизвестного) знания, способа действия. Важно, чтобы учитель сумел пробудить в учащихся стремление к поискам, вооружил их методами мышления, показал, что реальный процесс поиска не есть проторенная дорога с заранее

известными ориентирами, а путь нередко извилистый, как и всякий путь к познанию истины. Немецкий педагог А. Дистервег писал, что плохой учитель преподносит истину, хороший учит ее находить. Л. С. Выготский утверждал, что «знания усваиваются только в ходе собственной работы обучаемого с этими знаниями». Из чего можно сделать важный практический вывод: главная задача преподавателя на уроке – организовать собственную самостоятельную работу каждого ученика с подлежащим усвоению материалом. Очевидно, что, чем меньше учитель говорит сам, чем больше он направляет и контролирует работу каждого из учеников класса, тем эффективнее обучение. Но вначале учитель, сам исследуя задачу, должен показать, как организуются поиски путей решения. Ученики на этих примерах учатся оценивать и анализировать собственные действия, видеть свои ошибки и трудности. Они становятся участниками совместного и очень увлекательного исследования, которое воспитывает их мышление во много раз эффективнее, чем неоднократное воспроизведение готовых образцов.

Различные способы решения одной задачи, их сравнение и обсуждение развивают инициативу, творческие способности и такие качества математического мышления, как гибкость, глубина, самостоятельность и оригинальность.

Приведем два примера на упрощение выражений, для успешного решения которых необходимо найти ОДЗ:

1) $\dfrac{a+b^2}{a-b\sqrt{-a}}\div(\sqrt{-a})^{-1};(b-\sqrt{-a})$.

2) $\dfrac{4\cdot\sqrt{4x^2-12x+9}}{3-2x}+\dfrac{9\cdot\sqrt{x^2-10x+25}}{5-x}-\dfrac{\sqrt{45x-9x^2-54}}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

Решение второго примера основано на нахождении ОДЗ данного выражения и свойстве $\sqrt{a^2}=|a|$:

$$\frac{4\cdot\sqrt{(2x-3)^2}}{3-2x}+\frac{9\cdot\sqrt{(x-5)^2}}{5-x}-\frac{\sqrt{9\cdot(5x-x^2-6)}}{\sqrt{5x-x^2-6}}=$$

$$=\frac{4\cdot|2x-3|}{3-2x}+\frac{9\cdot|x-5|}{5-x}-\frac{3\cdot\sqrt{5x-x^2-6}}{\sqrt{5x-x^2-6}}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3-2x \neq 0 \\ 5-x \neq 0 \\ 5x-x^2-6>0 \end{cases}$, то есть $x \in (2;3)$. На ОДЗ выражение принимает вид: $|2x-3| = 2x-3, |x-5| = 5-x$. Учитывая ОДЗ, получаем: -4+9-3=2.

Самое широкое применение ОДЗ имеет при решении уравнений и неравенств.

Так как областью определения уравнения *f(x)=g(x)* или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество всех тех значений переменой *x*, при которых алгебраические выражения *f(x)* и *g(x)* одновременно имеют смысл, то в начале решения уравнения (неравенства) полезно найти ОДЗ уравнения. Если она состоит из одного или нескольких чисел, то достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением уравнения (неравенства). Если ОДЗ – пустое множество, то уравнение (неравенство) не имеет решений.

Найдите решение уравнения:

1) $\sqrt[4]{100-x^2} = (x-10)^{0,7}$

Ответ: $\{10\}$.

Найдите решение неравенства:

2) $\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}-1\right) \leq \log_x \frac{2}{x}\cdot\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)$

Ответ: 3; 4.

Решите уравнение:

3) $\arccos x = \lg(x-1)$

Ответ: нет корней.

Достаточно часто при решении уравнений, когда преобразование, выполненное в процессе решения уравнения, приводит к уравнению, являющемуся следствием заданного уравнения, необходима проверка найденных корней. Решение в этом случае не может считаться законченным, если не сделана проверка.

Как же проверяются найденные корни? В качестве основных используются следующие способы проверки:

– путем подстановки каждого из найденных корней в заданное уравнение (этот способ выявляет допущенные вычислительные ошибки, но вместе с тем этот способ не поможет, если решение привело к потере корней);

– путем доказательства равносильности выполняемых преобразований уравнения на всех этапах решения.

Так как вопросы равносильности уравнений, неравенств и систем уравнений традиционно вызывают затруднения учащихся, то такому вопросу следует уделить внимание при повторении пройденного материала курса математики основной школы в начале 10 класса, при изучении тригонометрических, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений, неравенств и их систем и в заключительной теме 11 класса.

В некоторых случаях оказывается целесообразней делать проверку по-другому. Если посторонние корни могли появиться только за счет расширения ОДЗ заданного уравнения, проверку можно осуществить подстановкой полученных корней либо в найденное ОДЗ уравнения, либо в систему, задающую ОДЗ.

Решим уравнение:

$\lg(x^2-7x+3)-\lg(2x+1) = \lg(x^2+7x-3)-\lg(2x-1)$.

Решение

Преобразуем уравнение к виду:

$$\lg\frac{x^2-7x+3}{2x+1} = \lg\frac{x^2+7x-3}{2x-1}.$$

Далее $\frac{x^2-7x+3}{2x+1} = \frac{x^2+7x-3}{2x-1}$, то $x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{5}$.

Так как каждое уравнение, полученное на том или ином этапе решения, является только следствием предыдущего, то потери корней произойти не могло, посторонние корни могли появиться только за счет расширения ОДЗ исходного уравнения. Поэтому проверку можно осуществить с помощью системы неравенств, задающих ОДЗ: $\begin{cases} x^2-7x+3>0, \\ 2x+1>0, \\ x^2-7x+3>0, \\ 2x-1>0. \end{cases}$ ни $x_1 = 0$, ни $x_2 = \frac{2}{5}$ не удовлетворяют последнему неравенству системы, а, значит, являются посторонними корнями.

Ответ: уравнение не имеет корней.

Если же ОДЗ вычисляется достаточно сложно, то лучше использовать другой метод (смотри выше).

Достаточно часто учащиеся путают ОДЗ уравнения и равносильный переход при решении иррациональных уравнений. Так, в уравнении $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$ в процессе решения получаются $x_1=10, x_2=362$. Очевидно, оба числа удовлетворяют ОДЗ исходного уравнения: $\begin{cases}2x+5\ge 0,\\ x-1\ge 0.\end{cases}$ Тем не менее, число 362 не является корнем уравнения, так как равносильность была нарушена за счет возведения обеих частей уравнения в квадрат. Некоторые учителя, а за ними и их ученики записывают следующее ОДЗ исходного уравнения $\begin{cases}2x+5\ge 0,\\ x-1\ge 0,\\ 8-\sqrt{x-1}\ge 0.\end{cases}$ Последнее неравенство системы не входит в ОДЗ заданного уравнения, а является одним из условий равносильного перехода при решении исходного уравнения.

В данном примере найденные корни нетрудно проверить подстановкой их в заданное уравнение: $x_1=10$ – корень данного уравнения, $x_2=362$ – посторонний корень.

Гораздо серьезнее обстоит дело с потерей корней. Причиной потери корней могут быть преобразования, выполняемые с помощью формул, изменяющих ОДЗ уравнения. Таковы, например, формулы:

$$f(x)-f(x)=0,\quad \frac{f(x)}{f(x)}=1,$$

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y},\quad \sqrt{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}},\quad (\sqrt{x})^2=x,$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y,\quad y=x^{\log_x y},\quad \log_a x=\frac{1}{\log_x a}.$$

$$tgx\cdot ctgx=1,\quad \sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},\quad tg(x+y)=\frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy}.$$

Применение этих формул слева направо приводит к сужению ОДЗ, а, значит, возможна потеря корней.

Пример. Решить уравнение:

$$tg(x+\frac{\pi}{4})=-9ctg^2x-1.$$

Решение

Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ne 0;\\ \sin x\ne 0.\end{cases}, \text{ то есть } \begin{cases}x\ne\frac{\pi}{4}+\pi k\\ x\ne\pi n\end{cases}; k\in Z, n\in Z.$$

При применении формулы $tg(\alpha+\beta)$ мы сужаем ОДЗ, исключая из нее числа вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$. Поэтому необходимо проверить, не являются ли эти числа решениями данного уравнения.

$$\frac{1+tgx}{1-tgx}=-9ctg^2x-1.$$

Пусть $tgx=t$, тогда $\frac{1+t}{1-t}=-\frac{9}{t^2}-1$, $\frac{2t^2-9t-9}{t^2(1-t)}=0$,

$$\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\frac{3}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}tgx=3\\ tgx=\frac{3}{2}\end{array}\right.;\ \left[\begin{array}{l}x=arctg3+\pi l\\ x=arctg\frac{3}{2}+\pi l\end{array}\right., l\in Z,$$ полученные решения удовлетворяют ОДЗ.

Проверка показывает, что числа вида $x=\frac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z$ являются корнями исходного уравнения:

$$tg\left(\frac{\pi}{2}+\pi m+\frac{\pi}{4}\right)=-9ctg^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi m\right)-1,$$

$$tg\frac{3\pi}{4}=-9ctg^2\frac{\pi}{2}-1,$$

$-1=-1$ – верно.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi m, arctg3+\pi l, arctg\frac{3}{2}+\pi l, m,l \in Z$.

Применение формул справа налево, наоборот, приведет к появлению посторонних корней, вопрос об отсеивании которых уже рассматривался.

Иначе обстоит дело в неравенствах, где решение чаще всего представляет собой бесконечное множество чисел, что делает проверку невозможной. Поэтому при решении неравенств стараются выполнять только равносильные преобразования.

Как правило, задания ЕГЭ высокого уровня содержат параметр. Рассмотрим несколько заданий с параметром, связанных с областью определения функции:

1) Найти все значения параметра a, при которых область определения функции

$$y=\log_7\left((\sqrt{a})^{2x+10}+(x^2\cdot\sqrt{x})^2\cdot a^4-x^{5+x\log_x a}-(a^3)^{\log_2 8}\right)$$

содержит ровно три натуральных числа.

Ответ: (7;8].

2) Найти все значения параметра a, при каждом из которых в области определения функции

$$y=\sqrt{\log_a(x-a)-\log_a(ax+2)}$$

имеются натуральные числа, кратные 5, и их количество равно количеству натуральных чисел, кратных 7, принадлежащих этой области определения.

Решение

$D(y):\log_a(x-a)-\log_a(ax+2)\geq 0$,

$\log_a(x-a)\geq\log_a(ax+2)$,

$$\begin{cases} a>0\\ a\neq 1\\ x-a>0\\ ax+2>0\\ (a-1)(x-a-ax-2)\geq 0\end{cases} \qquad \begin{cases} a>0\\ a\neq 1\\ x>a\\ (a-1)(x(1-a)-(a+2))\geq 0\end{cases}$$

При $a\in(0;1)$ $x\in\left(a;\frac{a+2}{1-a}\right]$.

При $a\in(1;+\infty)$ система не имеет решения, так как $x\leq\frac{a+2}{1-a}$, то есть $x<0$, что противоречит условию $x>a$, где $a>0$.

Таким образом, $D(y)=\left(a;\frac{a+2}{1-a}\right]$, где $a\in(0;1)$.

Если $\frac{a+2}{1-a}<7$, то в $D(y)$ нет натуральных чисел, кратных 7.

При $7\leq\frac{a+2}{1-a}<10$ в $D(y)$ будут содержаться одно натуральное число, кратное 5 (само число 5) и одно натуральное число, кратное 7 (само число 7), что удовлетворяет условию задачи.

При $10\leq\frac{a+2}{1-a}<14$ в $D(y)$ будут содержаться два натуральных числа, кратных 5 (числа 5 и 10) и одно натуральное число, кратное 7 (само число 7), что не удовлетворяет условию задачи.

При $14\leq\frac{a+2}{1-a}<15$ в $D(y)$ будут содержаться два натуральных числа, кратных 5 (числа 5 и 10) и два натуральных числа, кратных 7 (числа 7 и 14), что удовлетворяет условию задачи.

При $15\leq\frac{a+2}{1-a}<20$ в $D(y)$ будут содержаться три натуральных числа, кратных 5 (числа 5, 10 и 15) и два натуральных числа, кратных 7 (числа 7 и 14), что не удовлетворяет условию задачи.

При $20\leq\frac{a+2}{1-a}$ в $D(y)$ будет содержаться натуральных чисел, кратных 5, больше, чем натуральных чисел, кратных 7, что не удовлетворяет условию задачи.

Решим неравенства $7\leq\frac{a+2}{1-a}<10$ и $14\leq\frac{a+2}{1-a}<15$. Учитывая, что $1-a>0$, получаем ответ: $a\in\left[\frac{5}{8};\frac{8}{11}\right)\cup\left[\frac{4}{5};\frac{13}{16}\right)$.

Практика показывает, что наиболее эффективная форма организации уроков заключительного повторения в 11 классе – это тематическое повторение. Среди тем, которые являются центральными на уроках заключительного повторения в выпускных классах, присутствует тема «Область определения функции».

Приведем содержание урока по данной теме (профильный класс).

1 этап. На доске записаны функции:

1) $y = \lg x + 5$, 2) $y = \lg(x+5)$,

3) $y = \dfrac{5}{\lg x - 3}$, 4) $y = \dfrac{7}{2^x - 1}$,

5) $y = \sqrt[2010]{\lg x}$, 6) $y = \sqrt{\log_{0,2} x}$,

7) $y = \sqrt{\lg^2 x + 1}$, 8) $y = \dfrac{x-4}{2-|x|}$,

9) $y = \log_5(3-x^2)$, 10) $y = \log_5(3+x^2)$,

11) $y = \lg\log_{0,2} x$, 12) $y = \dfrac{12x}{\cos x - 1}$,

13) $y = \sqrt[8]{\cos x}$, 14) $y = \sqrt[5]{\cos x}$,

15) $y = tg4x$, 16) $y = \arcsin x$,

17) $y = (x+2)^{0,37}$, 18) $y = (x+2)^{-0,37}$,

19) $y = \begin{cases} x-4, если\, x \le -3 \\ \sin x, если\, x \ge 1 \end{cases}$.

Как вы думаете, какое задание можно сформулировать для данных функций?

Итак, тема сегодняшнего занятия «Область определения функции».

2 этап. «Устный счет»

Найдите область определения записанных на доске функций.

Через 7–10 минут проводится проверка правильности выполнения заданий, в случае необходимости делаются комментарии.

3 этап. Письменно выполняются следующие задания по нахождению области определения функции:

1)Найти наименьшее целое число из области определения функции $y = \sqrt{\dfrac{6x-5-x^2}{x^2-12x+35}}$.

2)Найти длину промежутка *D(y)* функции:

$$y = \arcsin(\lg(1-3x)).$$

Ответ: {3,3}.

Найти область определения функций 3)-5):

3) $y = \lg(\arcsin(1-3x)$.

Ответ: $[0;\frac{1}{3})$.

4) $y = \arcsin(\lg(1-3x)) + \lg(\arcsin(1-3x))$.

Ответ: [0;0,3].

5) $y = \sqrt[4]{\dfrac{\arcsin^2(0,1x+1)}{10-3x-x^2}}$.

Ответ: (-5;0]U{-10}.

6)Найти количество целых значений *x*, при которых функция $y = \log_x\sqrt{9-x^2}$ определена.

Ответ: 1.

7)Найти количество целых значений аргумента *x*, принадлежащих *D(y)*, где *y=f(g(x))*, если $f(x) = \lg\dfrac{x+4}{4x-1}$ и $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Ответ: 3.

8) $y = \log_x(29,1-|30-x^2|)$.

Ответ: $(\sqrt{0,9};1)U(1;\sqrt{59,1})$.

9)При каких значениях параметра а областью определения данной функции $y = \sqrt[4]{(ax)^2 - 2ax + 10x + 9}$ является вся числовая прямая?

Ответ: $(-\infty;-2,5]\cup\{0\}\cup[1,25;+\infty)$.

В каких заданиях, кроме нахождения *D(y)*, используется область определения функции?

4 этап. Построим графики следующих функций:

1) $y = \log_x x^4$, 2) $y = 10^{\lg x}$,

3) $y = \sqrt[3]{x}$, 4) $y = x^{\frac{1}{3}}$,

5) $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$.

Традиционными последние 2 года в заданиях части «С» ЕГЭ являются задания на нахождение промежутков монотонности, точек экстремума функции, множества значений функции, при решении которых необходимо, прежде всего, найти область определения функции.

Пример. Найти значение функции

$$f(x)=10^{\lg\frac{x^3-3x}{x+5}-\log_{0,1}(x+5)}$$

в точке максимума.

Ответ: $\{2\}$.

5 этап. Решить несколько уравнений и неравенств:

1) $\lg\sin x=\lg\cos x$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

2) $4^x-9\cdot 2^x+11=(\sqrt{3-x^2})^2+x^2$;

Ответ: 0.

3) $\log_{\cos x}(2\sin 2x+5\cos^2 x)=2$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

Рассмотрим задание с параметром: найти все значения параметра a, при которых в области определения функции $y=\ln(a^{ax-4}-a^x)$ лежат числа 20, 50, 70, но не лежат числа 2, 5, 7.

6 этап. Домашнее задание задается в соответствии с УМК, по которому работает учитель в данном классе. В качестве дополнительных можно включить в задание для домашней работы примеры, рассмотренные в статье.

Библиографический список

1. Стандарт среднего (полного) общего образования по математике [Текст].
2. Груденов, Я. И. Условия активизации мыслительной деятельности учащихся [Текст] // Математика в школе. – 1988. – №6.
3. Методическое письмо «О преподавании математики в средней школе с учетом результатов ЕГЭ 2005 года» [Текст] // Математика. – 2006. – №4.

4. Методическое письмо «О преподавании математики в средней школе с учетом результатов ЕГЭ 2008 года», сайт ФИПИ.
5. Литвиненко, В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия [Текст]: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.
6. Мордкович, А. Г. Беседы с учителями математики [Текст]: учебно-методическое пособие. – М.: Мир и образование, 2005. – 336 с.
7. Якиманская, И. С. Развивающее обучение [Текст]. – М.: Педагогика, 1979.
8. Кенгуру–выпускникам. Институт продуктивного обучения Российской академии образования [Текст]. – Санкт-Петербург, 2007. – 48 с.
9. Клово, А. Г. Единственные реальные варианты заданий для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ-2006. Математика. – М.: Федеральный центр тестирования, 2006. – 96 с.

С. В. Латыпова

Развитие общей культуры учащихся основной школы средствами математики

Российское общество переживает в настоящее время духовно-нравственный кризис. Актуальность проблемы культуры и воспитания «человека культурного» в современном обществе вызвана глобальными изменениями политической, экономической жизни многих стран.

В связи с этим проблема культуры и вопросы овладения образцами культуры имеют чрезвычайную значимость, так как от уровня культуры граждан во многом зависят экономика, политика, национальная безопасность и конкурентоспособность страны.

«Роль педагога при восхождении ребёнка по ступеням культуры не сводится к роли поводыря или тем более корректора, наказывающего за отклонение от нормы, она очерчивается широко: он – соучастник такого восхождения, стратег, инструктор, опора и помощник в нелёгком движении вперёд и выше» [4].

Математика является важным элементом человеческой культуры. Она становится всё более значимой в различных отраслях и сферах человеческой деятельности. Математика, как никакая другая школьная дисциплина, имеет многофункциональное назначение развитии таких личностных качеств, как целеустремлённость, н стойчивость в достижении целей, исполнительность, восприятие н вого и др.

Среди интеллектуальных свойств, развиваемых математико наиболее часто упоминаются те, которые относятся к логическом мышлению: дедуктивное рассуждение, способность к абстрагиров нию, обобщению, специализации, способность мыслить, анализир вать, критиковать. Упражнение в математике содействует приобрет нию рациональных качеств мысли и её выражения: порядок, точност ясность, сжатие. Оно требует воображения и интуиции. Оно даёт чу объективности, интеллектуальную честность, вкус к исследованию тем самым, содействует образованию научного ума.

Изучение математики требует постоянного напряжения вн мания, способности сосредоточиться; оно требует настойчивости закрепляет навыки работы.

Таким образом, математика выполняет важную роль как развитии интеллекта, так и в формировании характера.

Математика является не просто областью знаний и униве сальным инструментом, всё шире проникающим и в гуманитарны разделы науки, но, прежде всего, неотъемлемой частью цивилиз ции, существенным элементом общей культуры, языком научно восприятия мира [4].

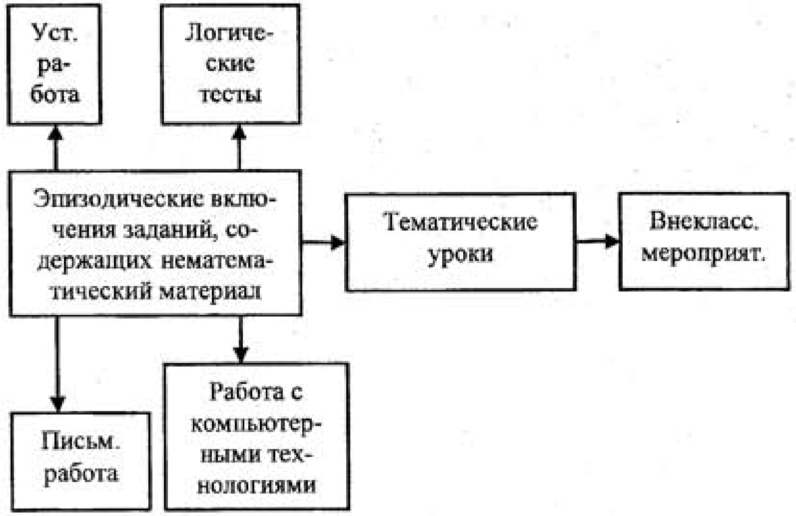
Гуманитаризация обучения математике предполагает усилен взаимосвязи естественно-математического образования с гуманитарным

Важную эстетическую особенность математики составля её связь с красотой в технике, искусстве и природе.

Основанием для эстетического фона урока математики служ материал как математический, так и нематематический.

Следует отметить, что даже эпизодическое включение в си тему работы учителя математики средств, позволяющих привле учащихся к красоте, истории, литературе, природе, даёт хорош возможности по усилению положительной мотивации к предмет развитию познавательной активности детей, их творчества, повыш нию уровня общекультурного развития учащихся.

Учителю необходимо работать над вопросами развития о щей культуры учащихся в системе. Только тогда его труды и стар ния принесут результат. Я предлагаю следующую схему работы н данной проблемой:



Рассмотрим подробнее реализацию этапов данной схемы.

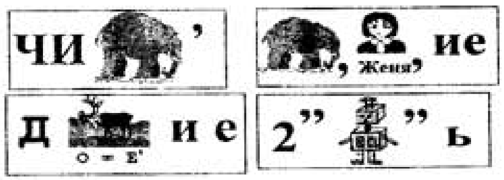
Эпизодические включения заданий, содержащих нематематическую информацию

Устная работа

Устная работа способствует формированию вычислительных навыков, развитию внимания учащихся, их инициативы. Она помогает учителю организовать весь класс и создать в классе рабочую обстановку. Целесообразно включать информацию, которая расширила бы кругозор учащихся, т.е. способствовала их общему развитию. При организации устной работы можно использовать разнообразные формы подачи условия: таблицы, схемы, программы, магические квадраты, блок – схемы, лабиринты, удивительные квадраты. Это позволяет учителю показать учащимся, что информация может быть представлена в разных формах.

Пример задания

Решить ребусы:



Логические тесты

Решить логический тест – значит определить способ решения первых заданий и, применяя метод аналогии, использовать его для решения остальных заданий, для нахождения ответа на поставленные вопросы.

Для решения математических тестов кроме знаний по математике необходимо умение наблюдать, сравнивать, обобщать, проводить аналогии, делать выводы и обосновывать их. Логические тесты позволяют организовать на уроках математики интересные деятельностные ситуации, способствующие лучшему усвоению программного материала и, в целом, развитию логического мышления.

Задания могут быть разнообразными. Их содержание во многом зависит от фантазии учителя.

Пример 1

Вставь пропущенное слово
СТОРОНА (СОВА) КВАДРАТ СТЕПЕНЬ (?) ПЛОЩАДЬ

Пример 2

Вставь пропущенное слово
МАТЕМАТИКА $3 \le X \le 6$ ТЕМА ДЕЦИМЕТР $5 \le X \le 8$?

Пример 3

Решите анаграмму и исключите лишнее слово
НОЕБОРД; ЗАКОПАТЕЛЬ; ЛОЕЦЕ; ПЕНЬСТЕ.

Письменная работа

Одной из особенностей предлагаемых заданий является что кроме требования произвести те или иные вычисления они

держат вопросы, направленные на развитие логического мышления, математической речи, умения объяснить «что?», «почему?», «как?» [5].

Пример

Великая Отечественная война началась 22 июня 1941 года. Узнать, сколько дней продолжалась война, поможет вам удивительный квадрат. Выберите из каждой строки и каждого столбца по одному числу, найдите сумму выбранных четырёх чисел – и вы получите ответ на вопрос.

Например, вы выбрали числа 218, 569, 349 и 282 и их сумма 1418; можно выбрать и другие числа: 474, 569, 349 и 26 – сумма этих чисел тоже 1418.

13	18	74	67
69	74	30	79
95	0	56	49
21	6	82	75

Работа с компьютерными технологиями

Человечество сегодня находится в технологической фазе научно-технической революции. Основная черта этого этапа – информатизация всех сторон жизни. Образование является информационным процессом и поэтому использование информационных технологий с применением компьютера особенно важно.

Применение компьютеров как средства обучения повышает мотивацию обучения за счёт интереса учащихся к деятельности, связанной с компьютером.

Проверка знаний с помощью компьютера значительно ускоряет процедуру подведения итогов выполнения работ. Использование электронных таблиц Excel позволяет решать эту педагогическую задачу.

Тематические уроки

На уроках обобщения и систематизации изученного можно использовать во всех заданиях нематематический материал по конкретной теме. Тематические уроки позволяют возбуждать и удерживать интерес учащихся к учебному труду.

Рассмотрим урок закрепления изученного материала по теме «**Уравнения с одной переменной**», на котором используются сведения о театре (6 класс).

Цели урока

1. Отработ ка навыков решения уравнений с одной переменной, применения уравнений к решению задач.
2. Развитие познавательного интереса к изучению математики.
3. Расширение знаний о театре, воспитание средствами математики бережного отношения к культурному наследию нашего народа.

Подготовка к уроку

Дать учащимся задание подготовить рефераты о театре, найти литературу, репродукции о театре.

План урока

1. Постановка цели урока. **2.** Задание на дом. **3.** Логическое задание. **4.** Слово о театре. **5.** Устная работа. **6.** Работа по рядам (решить уравнение). **7.** Выступления о билете, спектакле, сцене. **8.** Диктант. **9.** Выступление об артисте. **10.** Решение задачи. **11.** Соревнование: кто больше решит уравнений. **12.** Итог. **13.** Дополнение.

1. Постановка цели

Отработка навыков решения уравнений, применения уравнений к решению задач, подготовка к контрольной работе, расширение знаний о театре.

2. Задание на дом

№1342 (л; м) (работа с уравнением); 1343 (задача); 1294 (повторение: умножение смешанных чисел).

3. Логическое задание

На доске написано задание.

> Решите анаграммы и исключите лишнее слово.
> **ОНРЬЕК; РВУАЕИНЕН;**
> **ИСЧОЛ; ТАРЕТ**

Даны слова: корень; уравнение; число; театр.

Лишнее слово: театр. Лишнее в задании, но не лишнее для нас.

4. Слово о театре

Театр – особый и прекрасный мир. «Волшебный край» – как называл его А.С. Пушкин. В этом мире всё необычно. Вы видите людей, которые не существуют в реальной жизни: их придумал драматург, и сыграли артисты. Но, глядя на сцену, вы забываете вдруг о театральном освещении, декорациях, артистах. Вы даже не замечаете, как мысли и мечты, придуманных драматургом людей, становятся близкими вам самим.

5. Устная работа

1) Фронтальный опрос

На доске составлено слово «театр» из бумажных листов. На обратной стороне вопросы.

1	2	3	4	5
Т	Е	А	Т	Р

1 вопрос: Что называют уравнением?

2 вопрос: Что называют корнем уравнения?

3 вопрос: Что значит решить уравнение?

4 вопрос: Какое уравнение называется линейным?

5 вопрос: Сколько корней может иметь линейное уравнение?

2) Решив уравнения, мы узнаем, кто является основателем первого русского театра.

К	В	О	Л	Ф	У
0	*5*	*-5*	*6*	*-6*	*1*

1. $3x-4=11$ (Ответ: 5) **4.** $x^2=0$ (Ответ: 0)

2. $x+5=5$ (Ответ: -5) **5.** $|x|=5$ (Ответ: -5; 5)

3. $-\frac{1}{6}x=-1$ (Ответ: 6) Получили: Волков.

Волков Ф. Г. был выходцем из купеческой семьи. Посланный из Ярославля в Москву учиться торговому делу, он ходил в театр, жадно изучал всё, что имеет отношение к театру.

Вернувшись в Ярославль, Волков принимается за устройство театра, первые спектакли которого начались в 1750 году. Ф. Г. Волкова называют «отцом русского театра».

3) Каким является для театра имени Волкова сезон 2008/2009 года, мы узнаем, если найдём корни уравнения:

$(x-2)(x-5)(x-9)=0$

$x=2$ или $x=5$ или $x=9$

Ответ: 259-ый сезон.

6. Работа по рядам

На столе у учителя лежат 3 листочка. Наверху каждого листочка написано число (корень уравнения), а на обратной стороне слово, связанное с театром.

По 1 человеку с каждого ряда решают уравнения у доски, остальные решают на местах. Через 1 минуту проверяем.

Представитель каждого ряда, решив уравнение у доски, сможет достать слово, связанное с театром.

1 РЯД	2 РЯД	3 РЯД
$2X+7=3X-2(3X-1)$	$4-2(X+3)=4(X-5)$	$5X-3=7X-5(2X+1)$
Ответ: -1	Ответ: 3	Ответ: $-\frac{1}{4}$

-1	3	$-\frac{1}{4}$
БИЛЕТ	СПЕКТАКЛЬ	СЦЕНА

7. Выступления учащихся (или сам учитель говорит)

1) На первый спектакль в Ярославском театре билет стоил 3 копейки. Эта цена была символической и доступной. Зал был полон.

2) Спектаклем называют театральное представление. Спектакль, в основе которого лежит какое-либо драматическое произведение, создаётся коллективными усилиями актёров, режиссёра,

художников, композитора, рабочих театральных цехов. Возглавляет этот большой коллектив и направляет его деятельность режиссёр-постановщик.

3) К технике сцены относится архитектурное устройство сценической коробки, её оборудование, а также технические приспособления, которые иногда изготовляются для конкретного спектакля.

8. Диктант

Без кого не обходится ни один спектакль, мы узнаем, пройдя небольшое испытание в виде диктанта. 2 человека решают за доской, остальные решают на местах в тетрадях.

	1 вариант	2 вариант
1 задание	Дано уравнение:	
	$3x=-6$	$5x-6=2x$
	Является ли это уравнение линейным?	
2 задание	Даны числа 0; 2; - 2. Какое из этих чисел является корнем выше предложенного уравнения?	
3 задание	Равносильны ли уравнения:	
	$2x-7=0$ и $2x=7$?	$x^2=4$ и $x-2=0$?
4 задание	Имеет ли корни уравнение и сколько	
	$\|x\|=-6$	$\|x\|=0$

Каждый отвечающий у доски берёт со стола учителя карточку и читает:

АРТИСТ	**ЗРИТЕЛЬ**

9. Выступление об артисте

К середине 50-х годов XVIII века уже существовала национальная русская драматургия А. П. Сумарокова и М. В. Ломоносова. И вот в 1756 году был подписан указ об образовании национального русского театра в Ярославле. Его директором стал А. П. Сумароков.

Комедии Сумарокова любил играть великий актёр ***Михаил Семёнович Щепкин*** (1788–1863 г.) Щепкин также сыграл очень много ролей в русской и западноевропейской драме. Глубокая дружба связывает его с А. С. Пушкиным, Н. В. Гоголем, В. Г. Белинским, А. И. Герценом. Щепкин был не только гениальным актёром, но и прекрасным педагогом, теоретиком искусства.

10. Решение задачи

Найти внешний облик персонажа, раскрыть его внутренний мир, определить историческую, социальную и национальную характеристику среды, в которой происходит действие, помогает актёру ***театральный костюм***. Необходимое дополнение к костюму – ***грим*** и ***причёска***.

***Задача* 1** (человек к доске)

За три вида материи, необходимых для изготовления театрального костюма, заплатили 869 рублей. Второй вид материи стоит в 3 раза дороже, чем первый, а третий – на 139 рублей дешевле второго. Сколько рублей израсходовали на каждый вид материи?

11. Соревнование

Кто больше решит уравнений за 2 минуты.

Как зритель благодарит артистов? Это цветы и аплодисменты. Кто больше решит уравнений, тот лучше отблагодарит артистов.

На столах у учащихся карточки (2 варианта).

1 вариант		**2 вариант**	
1	$\frac{2}{3}x=18$	1	$\frac{3}{4}x=27$
2	$6x-12=4x-8$	2	$5y-8=2y-5$
3	$(2x-5)-(3x-7)=4$	3	$(2+3x)-(4x-7)=10$
4	$5(x-1{,}2)-3x=2$	4	$2(x-1{,}5)+x=6$
5	$\frac{1}{2}(x-6)-3=\frac{1}{3}x$	5	$\frac{2}{3}(x+9)-2=\frac{1}{6}x$
6	$0{,}5(8x-3)=-4(2{,}5-x)$	6	$1{,}2(5-4x)=-6(0{,}8x+1)$

12. Итог урока

Достигли ли мы цели урока?

1) Повторили тему «Уравнения с одной переменной», применение уравнений к решению задач.

2) Вспомнили, что Ярославль является родиной первого русского театра.

3) Расширили знания о театре.

Искусство театра поможет вам видеть прекрасное в жизни и в людях. Каждый вечер на театральные подмостки выходят волшебники театра – артисты, чтобы теплотой своих сердец оживить литературных героев, заразить вас верой в их идеалы.

В театре живёт чудо. Его нельзя потрогать рукой, но можно увидеть и услышать. Оно имеет душу и сердце. Оно способно заставит нас смеяться и плакать.

13.Дополнение

Если время останется, то заслушать некоторые рефераты, которые готовили учащиеся о театре.

Мною разработаны следующие тематические уроки:

1) «Сложение и вычитание смешанных чисел» (решение упражнений с использованием сказок А. С. Пушкина) – 6 класс.

2) «Действия с рациональными числами» (решение упражнений с использованием сведений о растениях Ярославской области) – 6 класс.

Внеклассные мероприятия

Игра, учение, труд являются основными видами деятельности человека. При этом игра готовит ребёнка как к учению, так и к труду. Игры оказывают большое влияние на умственное развитие детей, совершенствуя их мышление, внимание, творческое воображение [3]. Во время игры учащиеся обучаются культуре общения.

Мною разработаны следующие внеклассные мероприятия:

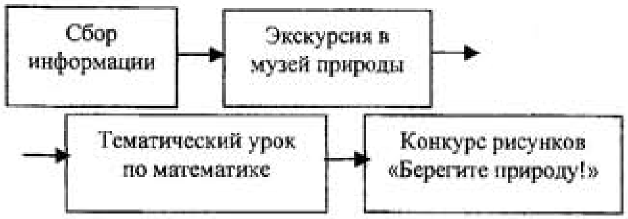
1) Игра «Звёздный час» – 5 класс, 6 класс.
2) Игра «Математический поезд в страну Геометрия» – 6 класс.
3) Игра «Русское лото» по теме «Четырёхугольники» – 8 класс.
4) Занятие для любознательных «Математика в литературных произведениях» – 9 класс.

Повышение воспитательного потенциала общеобразовательного процесса

При организации учебного процесса необходимо добиваться единства обучения, воспитания, развития. Эффективность решения воспитательных задач зависит от целенаправленного отбора содержания учебного материала, предоставляющего ученикам образцы подлинной нравственности, духовности, гражданственности, гуманизма, от профессионализма педагога [4].

Связать весь комплекс функций обучения – образовательной, развивающей, воспитывающей – и оказывать непосредственное и опосредованное влияние на развитие общей культуры учащихся позволяют разные мероприятия, посвящённые одной и той же теме. Эти мероприятия образуют единую цепочку. Например:

5 класс



Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Экскурсия в музей: музей-заповедник г. Ярославля в отдел природы.

Тематический урок по математике: «Действия с обыкновенными дробями» (решение упражнений с использованием сведений о животных, занесённых в Красную книгу).

Конкурс рисунков: «Берегите природу!». Во время конкурса учащиеся выступают с докладами по данной теме. Помощь оказывают учителя биологии и изобразительного искусства. За доклады учащиеся получают оценку по биологии, а за рисунки по изобразительному искусству.

6 класс

Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Посещение библиотеки: варианты разные (в школе, в районе, в городе).

Тематический урок по математике: «Сложение и вычитание смешанных чисел» (решение упражнений с использованием сказок А. С. Пушкина).

Инсценировка сказок А. С. Пушкина: учащиеся предварительно разбиваются на группы по 5–6 человек, каждой группе по жребию предлагается инсценировать сказку или сюжет из сказки. Помощь оказывает учитель русского языка и литературы.

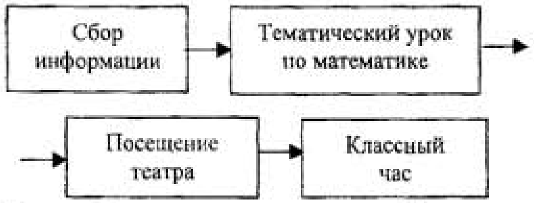
Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Экскурсия: в ботанический сад при ЯГПУ (или музей-заповедник г. Ярославля в отдел природы).

Тематический урок по математике: «Действия с рациональными числами» (решение упражнений с использованием сведений о растениях Ярославской области).

Классный час: «О здоровом образе жизни». Помощь оказывают учителя биологии и медицинский работник школы. За доклады учащиеся получают оценку по биологии.

7 класс



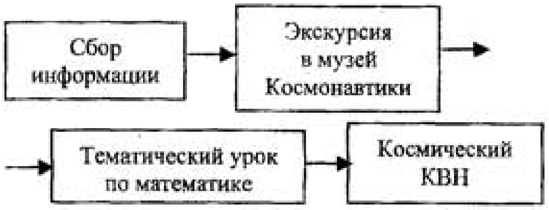
Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Тематический урок по математике: «Уравнения с одной переменной» (решение упражнений с использованием сведений о театре).

Посещение театра: это может быть ТЮЗ (театр юного зрителя), театр им. Ф. Г.Волкова.

Классный час: учащиеся выступают с докладами, затем проводится викторина. Помощь оказывает учитель литературы. За доклады учащиеся получают оценки по литературе.

8 класс



Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Экскурсия: в музей Космонавтики с. Никульское.

Тематический урок по математике: «Квадратные уравнения» (решение упражнений с использованием сведений о космосе).

Космический КВН: учащиеся предварительно делятся на две команды, получают домашнее задание. Помогает учитель физики. Учащиеся за доклады получают оценку по физике.

9 класс

Сбор информации: учащиеся подбирают литературу, иллюстрации, готовят доклады.

Экскурсия по городу: «Улицы города Ярославля».

Тематический урок по математике: «Уравнения» (решение упражнений с использованием сведений из истории города Ярославля).

Классный час: игра «Русское лото» «Мой город». Помогает учитель истории. За доклады учащиеся получат оценку по краеведению.

Необходимо готовить к творческой деятельности каждого растущего человека. Тяга к творчеству, которая является не врождённым качеством, не природным даром, а результатом воспитания (стихийного, незаметного или организованного, очевидного), – эта тяга к творчеству может быть сама обращена в средство педагогического воздействия, в частности, в средство формирования познавательных интересов школьников, в средство формирования потребности учиться, получать знания, в средство развития общей культуры.

Библиографический список

1. Виленкин, Н. Я. Математика. 6 класс [Текст]. – М.: Мнемозина, 2006.
2. Добыш, Г. Звёзды русской сцены [Текст]. – М., 1989.
3. Оникул, П. Р. 19 игр по математике [Текст]. – С.–П., 1999.
4. Розов, М. Х. Гуманитарная математика [Текст] // Математика в высшем образовании. – 2003. – № 1.
5. Перькова, О. И., Сазанова, Л. И. Упражнения для учащихся V–VII классов [Текст] // Математика в школе. – 1993. – № 1.
6. Вестник образования России, 2002. – № 14.
7. Детская энциклопедия. – М.: Искусство, 1977. – Т. 12.
8. Энциклопедический словарь юного зрителя. – М.,1989.

Приложение

Цели урока

1. Отработка навыков действий с рациональными числами.
2. Развитие познавательного интереса к изучению математики.
3. Расширение знаний о растениях Ярославского края, воспитание средствами математики бережного отношения к природе и понятия о здоровом образе жизни.
4. Выработка с помощью вычислений умений использования местных растений в питании человека.

Тип урока

Урок закрепления изученного материала.

Подготовка к уроку

Дать учащимся задание подготовить рефераты о лекарственных растениях Ярославской области, подобрать литературу, картинки, фотографии по данной теме.

План урока

1. Постановка цели урока. **2.** Логическое задание. **3.** Устный счёт. **4.** Повторение правил. **5.** Решение задачи. **6.** Работа по рядам. **7.** Самостоятельная работа. **8.** Лотерея. **9.** Повторение правил сбора растений. **10.** Домашнее задание. **11.** Итог.

Ход урока

1. Постановка цели

Отработка навыков действий с рациональными числами, расширение знаний учеников об окружающей их природе, воспитание бережного отношения к ней.

2. Логическое задание

(вербальный тест)

На доске написано задание:

Вставьте пропущенное слово		
ЧИСЛИТЕЛЬ	**(ТЕЛО)**	**ЧИСЛО**
ДРОБЬ	(?)	ЗНАМЕНАТЕЛЬ

Пропущено слово: ***роль.***

Сейчас каждый из вас попробует сыграть роль исследователя полей, лугов, лесов нашего Ярославского края.

Высокомерие не к лицу ни великану, ни мудрецу.
В сосновом бору, в берёзовой роще,
Где так многогранно желание жить.

3. Устный счёт

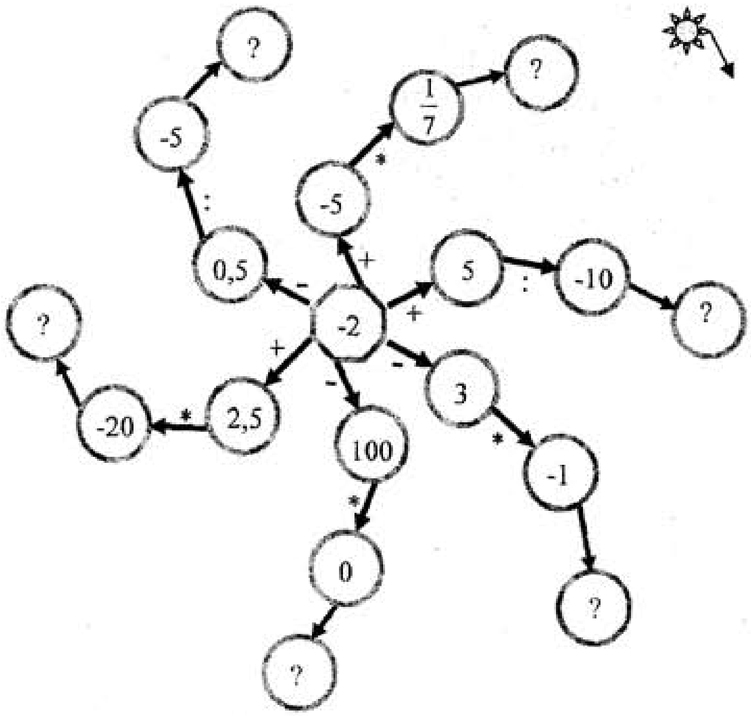
Это растение можно встретить, гуляя по лугу, полю. Узнать его название мы сможем после того, как прокатимся на математической карусели.

В кружках карусели записаны рациональные числа. На стрелках, соединяющих кружки, указаны действия. Задание состоит в том, чтобы выполнить последовательно действия, продвигаясь по стрелке от центра внешней окружности. Выполняя последовательно действия по указанному маршруту, ученик даёт ответ. Первая цепочка указана звёздочкой, двигаемся по часовой стрелке.

Ключ к ответу

А	В	Е	Щ	Ь	Л
-0,3	*5*	*0*	*-1*	*0,5*	*-10*

Получили слово: ***щавель***



Выступление ученика:

Щавель кислый – растение высотой 30–100 см. Листья сочные, кислые на вкус. Листья щавеля содержат витамин С, щавелево-кислые соли, азотистые вещества. Используют щавель как в сыром виде, так и для приготовления щей, супов, зелёных борщей, приправ к мясным блюдам, начинок для пирогов и пельменей.

4. Повторение правил

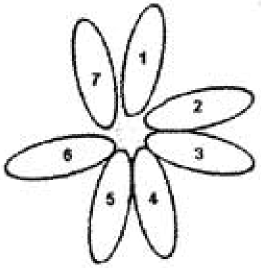
О, белое диво природы,
Раскинулось на все
Зелёные просторы.

Что это за растение?

Ромашка позволит повторить правила действий с рациональными числами.

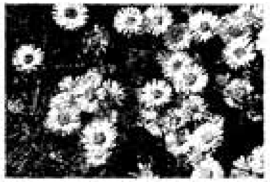
На каждом лепестке с обратной стороны правило. Учитель подходит к ученику. Ученик отгибает один лепесток, читает правило и отвечает на него.

Правила



1. Сложение двух отрицательных чисел.
2. Сложение чисел с разными знаками.
3. Вычитание.
4. Умножение двух отрицательных чисел.
5. Умножение двух чисел с разными знаками.
6. Деление двух отрицательных чисел.
7. Деление двух чисел с разными знаками.

Выступление ученика:



Ромашка – это чудесное светолюбивое растение. Чаще всего ромашка растёт на лугах и полях. Многие люди собирают букеты из цветов, чтобы украсить дом. Эти белые цветы обладают целебными свойствами. Настой из ромашки не совсем приятный, но очень полезный для организма. Сейчас на основе экстракта ромашки делают различные кремы, бальзамы для волос и шампуни.

5. Решение задачи

Выйдешь в поле, рожь колосится.

Задача

Рожь выдерживает зимнюю температуру без снежного покрова -25°, что составляет $\frac{5}{8}$ температуры, выдерживаемой рожью под снежным покровом. Определите, какую температуру выдерживает рожь под снежным покровом?

1 ученик – к доске

Решение

$$-25 : \frac{5}{8} = -\frac{25 \cdot 8}{5} = -40 .$$

Ответ: рожь выдерживает температуру -40°.

6. Работа по рядам

Информация учителя:

О важности правильного питания ещё более 100 лет назад говорил мудрый врач Авиценна. В настоящее время люди едят мало растительной пищи: овощей в 3 раза меньше нормы, фруктов – в 4 раза.

Вам предлагаются рецепты блюд из местных растений, которые можно приготовить уже ранней весной.

Каждому ряду свой рецепт. Все работают на местах, по 1 человеку от каждого ряда к доске.

Задание

Определите массу каждого компонента в рецепты.

1 ряд		**2 ряд**		**3 ряд**	
Салат из одуванчиков	**200г**	**Суп из листьев лопуха**	**640г**	**Биточки из крапивы**	**340г**
Листья одуванчика	50%	Листья лопуха	40%	Крапива	34%
Зелёный лук	30%	Репчатый лук	15%	Пшеничная каша	59%
Петрушка	12%	Рис	10%	Жир	5%
Растительное масло	8%	Жир	5%	Петрушка	2%
По желанию, добавить яйцо		Картофель	30%		

Ответы:

1 ряд: 100 г, 60 г, 24 г, 16 г.

2 ряд: 256 г, 96 г, 64 г, 32 г, 192 г.

3 ряд: 115,6 г, 200,6 г,17 г, 6,8 г.

Выступления учеников

1 ученик

Одуванчик лекарственный – растёт на лугах, в полях и садах, около дорог. Цветёт в апреле – мае. Листья одуванчиков содержат витамины С и Е, каротин. В пищу используют почти всё растение. Чтобы удалить горечь, их вымачивают в солёной воде

20–30 минут. Цветочные почки маринуют, заправляют винегреты, блюда из дичи. Из жареных корней готовят заменитель кофе.

2 ученик

Крапива – многолетнее растение высотой до 1 метра, с листьями, усаженными жгучими волосками. Листья крапивы содержат витамины С и А, каротин, по питательности не уступают бобам и гороху. Используют для приготовления салатов, супов, щей, соусов, пюре.

3 ученик

Лопух паутинистый – многолетнее растение высотой до 1,5 метров. Молодые листья и стебли содержат витамины С, эфирные масла и дубильные вещества. Корни лопуха употребляют в сыром, печёном или жареном виде, как заменитель картофеля.

7. Самостоятельная работа

4 варианта на карточках (1 вариант для слабых учащихся). Выполняя задания, учащиеся получат названия растений.

1 вариант

	Н	Ы	Л	Д	А	Ш	ЗАДАНИЯ	
1	30	10	-30	-10	2	-2	№1	-10+(-20)
2	-8	46	$\frac{1}{8}$	-46	8	10	№2	27+(-19)
3	-5	15	10	5	-10	-15	№3	37-42
4	$-\frac{1}{8}$	$\frac{8}{25}$	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{25}{8}$	-8	№4	$-\frac{1}{5}\cdot(-\frac{5}{8})$
5	6	-13	-5	10	13	-12	№5	-169:13
6	$-\frac{1}{3}$	15	$\frac{7}{15}$	-15	$-\frac{7}{15}$	-3	№6	$2\frac{1}{7}:(-\frac{5}{7})$

2 вариант

	Б	А	Ц	Е	Р	Ч	ЗАДАНИЯ	
1	$7\frac{2}{7}$	$2\frac{3}{7}$	$5\frac{4}{7}$	$-2\frac{3}{7}$	$-5\frac{4}{7}$	$-7\frac{2}{7}$	№1	$-4\frac{6}{7}+(-2\frac{3}{7})$
2	$-\frac{12}{25}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{14}$	$-\frac{12}{35}$	$-1\frac{3}{14}$	№2	$-\frac{5}{14}+\frac{7}{10}$
3	-136	96	162	136	-162	-92	№3	$34\cdot(-4)$
4	$-\frac{4}{9}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{15}$	№4	$-1\frac{1}{15}:(-4\frac{4}{5})$
5	9	8	-9	-8	7	-7	№5	$-4x=32$
6	28	5	22	75	-22	-28	№6	$x-25=-3$

3 вариант

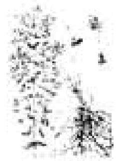
	Г	И	Т	О	Н	К	ЗАДАНИЯ	
1	$\frac{17}{24}$	$-2\frac{7}{20}$	$1\frac{17}{24}$	$2\frac{7}{8}$	$-1\frac{17}{24}$	$\frac{2}{3}$	№1	$-\frac{5}{6}+(-\frac{7}{8})$
2	10,9	-10,9	2,4	1,7	-2,4	-1,7	№2	-4,6+6,3
3	-4,6	13,8	5,6	4,6	-5,6	-13,8	№3	4,6–9,2
4	$\frac{3}{15}$	$5\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{15}$	$-5\frac{1}{3}$	$2\frac{4}{15}$	$-2\frac{4}{15}$	№4	$-3\frac{1}{5}\cdot1\frac{2}{3}$
5	0,33	3,7	3,07	-3,7	-3,07	-0,33	№5	-33,77:(-11)
6	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{15}$	$1\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{15}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	№6	$-2\frac{1}{3}x=\frac{7}{15}$
7	-8,9	-1,7	2,1	8,9	1,7	-2,1	№7	$-5,4-x=-3,5$

4 вариант

	В	О	Р	Б	Е	Й	З	ЗАДАНИЯ	
1	2,6	3,16	-2,6	10,9	-10,9	9,6	-3,16	№1	-2,3+(-0,86)
2	8,2	20,9	21	-8,2	-20,9	-21	9,4	№2	14,6+(-6,4)
3	$-6\frac{9}{20}$	$5\frac{2}{9}$	$2\frac{1}{20}$	$-5\frac{2}{9}$	$6\frac{9}{20}$	$-2\frac{1}{20}$	$1\frac{4}{5}$	№3	$2\frac{1}{4}-(-4\frac{1}{5})$
4	7,7	7,6	-7,6	0	6,6	-6,6	5	№4	0–7,6
5	$5\frac{4}{13}$	-6	$6\frac{1}{7}$	$6\frac{1}{5}$	6	$-5\frac{1}{7}$	$-6\frac{1}{5}$	№5	$-4\frac{2}{7}\cdot 1\frac{2}{5}$
6	$-\frac{3}{16}$	$4\frac{4}{7}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{3}{16}$	$-4\frac{4}{7}$	$-\frac{14}{25}$	$6\frac{6}{21}$	№6	$-1\frac{1}{14}:(-5\frac{5}{7})$
7	-16,6	-11,8	15	-17,7	16,6	11,8	17,7	№7	2,9–x=14,7
8	2	3	-2	4	-4	-3	0,3	№8	-1,8x=5,4

Ответы:
1 вариант: ***ландыш***
2 вариант: ***чабрец***
3 вариант: ***ноготки***
4 вариант: ***зверобой***



Путешествуя, мы нашли ещё 4 растения: ландыш, чабрец, ноготки, зверобой.

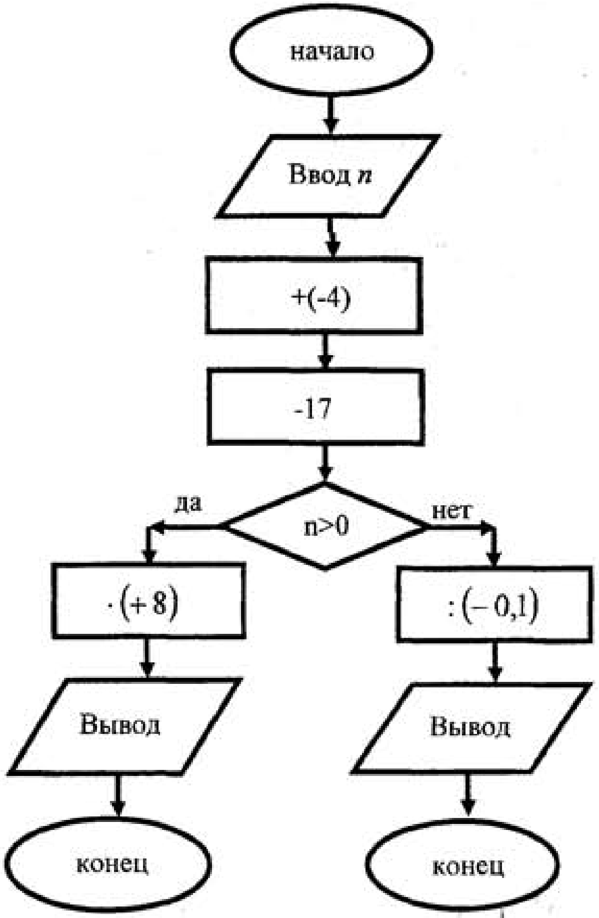
Показать ребятам рисунки ил фотографии этих растений.

8. Лотерея с использованием компьютера

Каждому ряду задаётся число. Результат действия соответствует номеру растения.

1 ряд: 22; ***2 ряд:*** -3; ***3 ряд:*** 2.

Ответы: ***1 ряд:*** 8; ***2 ряд:*** 240; ***3 ряд:*** 190.



8 ***подорожник***
240 ***шиповник***
190 ***иван-чай***


Иван-чай:

На лугу расцвёл кипрей. Вот семья богатырей!
Крепки, статны и румяны, Встали братья-великаны.
Славный выбрали наряд – Куртки пламенем горят.

9. Повторение правил сбора растений

1) Нельзя вести заготовку в одних и тех же местах.
2) Нельзя вырывать корневища, луковицы, корни.
3) Нельзя срывать листья на концах побегов.

4) Подземные части следует собирать только после созревания и опадания семян.

5) Не рекомендуется собирать в черте города и вблизи дорог.

Ученики могут дополнить ещё правила сбора.

10. Домашнее задание

№1198 (в; г) (вычислить удобным способом).

№1217 (в) (выполнить действия).

№1208 (2) (повторение – задача на движение).

11. Итог урока

Сегодня на уроке мы повторили правила действий с рациональными числами, расширили знания о растениях нашего края.

Немецкий философ К. Маркс сказал:

«Человек живёт природой – это значит, что природа есть его тело, с которым человек должен оставаться на всю жизнь в процессе постоянного общения, чтобы не умереть».

Список литературы к уроку

1. Альхова, З. Н. Математика. Тетрадь с печатной основой для учащихся 6 класса [Текст]. – Саратов: Лицей, 1997.
2. Виленкин, Н. Я., Жохов В. И. Математика–6 [Текст]. – М.: Мнемозина, 2003.
3. Ершова, А. П., Голобородько, В. В. Математика–6. Самостоятельные и контрольные работы [Текст]. – М.: Илекса, 2003.
4. Коваленко, В. Г. Дидактические игры на уроках математики [Текст]. – М.: Просвещение, 1990.
5. Юрченко, Е. В., Юрченко Ел. В. Математика. 5–6 классы. Тесты [Текст]. – М.: Дрофа, 2003.
6. Лекарственные препараты и их применение [Текст]: справочное издание. – М., 1993.
7. Полная энциклопедия народной медицины [Текст]. – М., 2004.
8. Советский энциклопедический словарь / под ред. Прохорова А. М. – М. 1983.

Содержание