Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет
им. К. Д. Ушинского»

Т. М. Корикова
И. В. Суслова
А. В. Ястребов

ИЗБРАННЫЕ ТЕОРЕМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ
В ДЕТАЛЯХ И НЮАНСАХ

Учебное пособие

Ярославль

2010

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
К66

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Рецензенты:
д. пед. н., профессор кафедры общей математики
ЯрГУ им. П.Г. Демидова
В.А. Кузнецова;
к. физ.-мат. н., доцент кафедры алгебры ЯГПУ
Т.Л. Трошина

Корикова, Т. М., Суслова, И. В., Ястребов, А. В.
К66 Избранные теоремы школьной математики в деталях и нюансах : учебное пособие / под ред. А. В. Ястребова. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2010. – 111 с.
ISBN 978-5-87555-648-7

Учебное пособие предназначено для бакалавров по направлению 050100 – «Педагогическое образование» и профилю «Математическое образование». Оно поддерживает курс «Методика обучения и воспитания в области математики», который изучается в 4–7 семестрах. Пособие посвящено методике изучения теорем и обучению школьников доказательству теорем. Предложены методические рекомендации по изучению ряда теорем школьного курса математики, которые, по мнению авторов, являются наиболее значимыми.

Пособие может быть полезно для учителей школ и преподавателей педагогических вузов.

УДК 51(07)
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-87555-648-7

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

> Анализ природы интеллектуальной деятельности в любой области – задача не из легких, даже если эта область не так далека от основного круга интеллектуальных усилий большинства людей, как математика. Анализ природы интеллектуальной деятельности труден по существу: какую бы сферу интеллектуальной деятельности мы ни взяли, анализировать ее несравненно труднее, чем непосредственно заниматься ею.
>
> *Дж. фон Нейман*, «Математик»

В процессе освоения математики школьники работают с дидактическими единицами разных типов: задачами, правилами, алгоритмами, определениями, теоремами. В этом ряду теоремы занимают особое место, причем по двум причинам одновременно. Во-первых, суждения о математических объектах, то есть результаты деятельности математиков, формулируются и фиксируются именно в виде теорем. Во-вторых, при работе с теоремой учащийся имеет дело с умозаключениями, которые написаны в тексте учебника, или произнесены учителем, или сделаны им самим. Умение понимать умозаключения других людей, умение конструировать собственные умозаключения и последовательности умозаключений, умение формулировать суждения на основе произведенных умозаключений – все это неотъемлемые элементы общей культуры человека, значение которых выходит далеко за рамки математики.

Умение доказывать математические утверждения является одним из ключевых при изучении математики. При этом основными целями обучения доказательству являются следующие:

- формирование навыков полноценной аргументации, способности обосновывать и доказывать свои рассуждения;
- формирование представлений о дедуктивном компоненте математики;
- усвоение учащимися теоретических знаний по курсу математики;
- обеспечение осознанности, глубины и оперативности знаний.

Очевидно, что эти сложные цели могут быть достигнуты только в том случае, когда школьников целенаправленно *обучают методам работы с теоремой.* Недостаточно изучить доказательства некоторой последовательности теорем, даже если их количество велико. Недостаточно самостоятельно доказать те или иные утверждения, даже если доказательства объективно сложны и психологически трудны. Опыт показывает, что школьников необходимо обучать глубокой рефлексии, то есть осознанию того, каковы этапы освоения теоремы, какие умственные действия характерны для того или иного этапа, и т.д. Данное пособие посвящено именно этому кругу вопросов. Оно предназначено для студентов и преподавателей педагогических вузов, а также для учителей школ, и могло бы носить рутинное название «Методика изучения теорем».

При изучении теоретического материала учителя, как правило, интересуют два фактора: какое количество учебного материала усвоено учеником (мера обученности); какими методами получения знаний, приемами и способами их использования владеет ученик (характер обученности). При обучении доказательствам первый фактор выполняет информационную функцию, а второй – развивающую. Отсюда следует, что в процессе работы над доказательствами теорем усилия учителя должны быть направлены как на усвоение новых теоретических фактов, так и на овладение общими методами и конкретными приемами, способами их доказательств.

Работы методистов-математиков показывают, что полноценное освоение теоремы включает в себя несколько этапов:

1) мотивация изучения теоремы;
2) ознакомление с фактом, изложенным в формулировке теоремы;
3) выделение условия и заключения теоремы, а в более широком плане – усвоение ее содержания;
4) запоминание формулировки теоремы;
5) построение аналитического рассуждения, помогающего осознанию доказательства;
6) проведение доказательства и оформление его записи;
7) закрепление формулировки теоремы и ее доказательства, поиск других способов доказательства;
8) применение теоремы;
9) установление связей изучаемой теоремы с другими теоремами.

Естественно, что при доказательстве того или иного утверждения отдельные этапы могут опускаться. Это зависит от сложности или простоты конкретного этапа применительно к изучаемой теореме, от новизны приемов рассуждения или хорошего знакомства с ними и от многого другого.

Все вышесказанное определяет содержание и структуру данной книги, а также некоторые из ее особенностей. Авторы рассматривают ряд наиболее значимых, по их мнению, теорем школьного курса математики и предлагают методические рекомендации по работе с ними. При этом авторы придерживаются в целом пунктов 1–9, изложенных выше, однако не считают обязательным прописывать каждый пункт для каждой из изучаемых теорем. Для некоторых этапов работы с теоремой предложено несколько способов реализации. Выбор того или иного способа реализации плана на конкретном уроке предоставляется читателю.

В заключение назовем те периоды, на которые разбивается работа по формированию умения доказывать математические утверждения. Она начинается задолго до того, как учащиеся явно познакомятся с понятием теоремы. Пропедевтическая подготовка к проведению доказательств начинается уже при изучении математики в V–VI классах. В этот период у учащихся закладываются потребность в обосновании своих суждений, начала дедуктивного мышления, умение подмечать закономерности.

При изучении геометрии в VII классе появляются новые для школьника понятия: «аксиома», «теорема», «доказательство». Первоначально учащиеся знакомятся с доказательствами теорем, которые предлагает учитель, не вовлекая пока детей в самостоятельный поиск. Готовые доказательства в данном случае выступают как образцы, на которых школьники обучаются приемам умственной деятельности, лежащим в основе умения доказывать. На этом этапе необходимо показать правильное построение умозаключений (силлогизмов): большая посылка – малая посылка – вывод.

Следующий этап в обучении доказательствам состоит в том, что учащиеся привлекаются к активной работе по поиску доказательств теорем, выбору рациональных методов и способов аргументации, выдвижению гипотез, поиску доказательства их истинности или ложности. Однажды начавшись, этот этап продолжается в течение всего периода изучения математики в школе и естественным образом распространяется на обучение в вузе.

ГЕОМЕТРИЯ

1. Свойство биссектрисы угла треугольника

Рассмотрим теорему, названную в заголовке, и покажем, как может быть организовано ее изучение на уроке. При этом мы будем придерживаться пунктов 1–9, описанных во Введении, выделяя сущность каждого этапа ***жирным курсивом.*** Отметим, что для некоторых этапов мы предложим несколько способов реализации. Выбор того или иного способа реализации плана на конкретном уроке предоставляется читателю.

Теорема 1. Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на два отрезка, пропорциональные прилежащим сторонам.

Мотивация-1. В качестве мотивации изучения теоремы учащимся можно дать следующее измерительно-вычислительное задание: «Постройте произвольный треугольник и биссектрису одного из углов. Сравните отношение сторон угла и отношение длин отрезков, на которые биссектриса разбивает третью сторону».

В результате выполнения практической работы в классе будет рассмотрено большое количество треугольников, у которых изучаемые отношения равны, несмотря на различие типов треугольников, размеров треугольников и другие отличия. Это дает веские основания считать, что эти отношения равны в любом произвольно взятом треугольнике. Тем не менее, сделанный вывод нельзя считать точно установленным фактом, причем по двум причинам сразу. Во-первых, вывод получен с помощью измерений, которые всегда имеют погрешность. Во-вторых, он сделан по аналогии на основании метода неполной индукции, а эти методы, как мы знаем, могут приводить к ошибкам. Тем самым, перед учащимися встает учебная задача – дать точную формулировку сделанному наблюдению – и исследовательская задача – найти метод доказательства сформулированного утверждения.

Очевидно, что при проведении практической работы одновременно происходит ***ознакомление с фактом,*** изложенным в теореме.

Мотивация-2. Иногда для «изобретения» теоремы самими учениками удобно использовать набор упражнений или задач. Приведем набор таких упражнений для изучаемой теоремы. В скобках будем давать ответ на поставленный вопрос.

1) Внимательно изучите рис. 1.

2) Выделите пары подобных треугольников. ($\Delta ABH \sim \Delta CBK$, $\Delta AHE \sim \Delta CKE$.)

3) Укажите коэффициент подобия для каждой пары подобных треугольников. Можно ли утверждать, что коэффициенты подобия можно выразить через длины одних и тех же отрезков? (Оба коэффициента подобия равны отношению $AH : CK = k$.)

4) Выразите коэффициенты подобия каждой пары подобных прямоугольных треугольников через отрезки, являющиеся их гипотенузами. ($k = BA : BC = EA : EC$.)

5) Рассмотрите треугольник ABC, в котором BE – биссектриса угла B. Учитывая соотношение, полученное в пункте 3, сформулируйте свойство биссектрисы угла треугольника (формулировка теоремы).

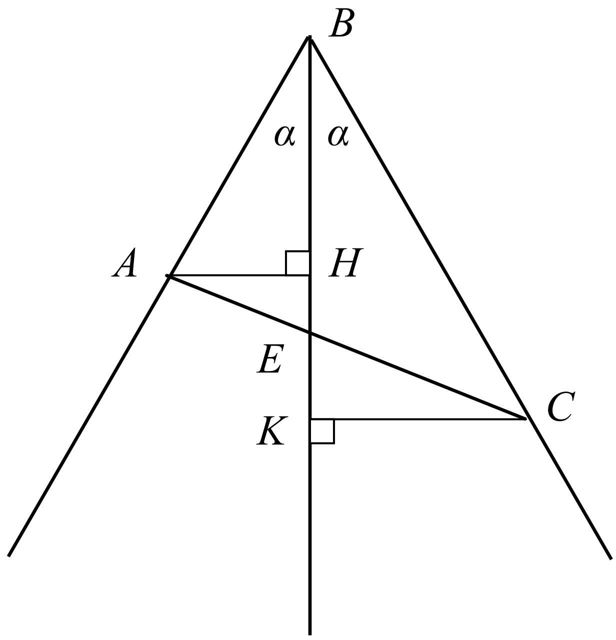


Рис. 1.

Очевидно, что в результате выполнения заданий 1–4 происходит ***ознакомление с фактом,*** изложенным в теореме. Очевидно также, что формальное доказательство теоремы может повторять приведенное выше рассуждение. В силу этого мы можем сказать, что методом доказательства является метод подобия.

Для учителя важно следующее: если ученик самостоятельно обнаруживает закономерность, самостоятельно дает или пытается дать ее словесное выражение, то это позволяет избавиться от навязывания мнения учителя при формулировке теорем.

Мотивация-3. Еще один подход – это создание проблемной ситуации. Учащимся может быть предложена задача, для решения которой потребуется новое знание – свойство биссектрисы угла треугольника.

Выделению условия и заключения в рассматриваемой теореме следует уделять внимание, поскольку каждый ученик должен отчетливо осознавать как то, что требуется доказать, так и то, на основании каких данных будет вестись доказательство. В нашем случае имеем следующее.

Дано: ABC – треугольник; BE – биссектриса; $E \in AC$.

Доказать: $BA : BC = EA : EC$.

Важным элементом работы с теоремой является ***актуализация необходимых знаний,*** то есть понятий, аксиом, теорем, на которых строится доказательство. Она может быть проведена непосредственно перед доказательством теоремы. Для этого с учащимися полезно рассмотреть либо систему вопросов для фронтальной работы, либо специально организованный набор задач. По мнению авторов, повторение материала целесообразнее осуществлять через задачный материал, поскольку это часто облегчает восприятие трудных моментов доказательств.

Применительно к рассматриваемой теореме анализ ее *формулировки* показывает, что при проведении доказательства мы будем пользоваться следующими основными понятиями и их свойствами: «треугольник», «биссектриса угла», «равные углы», «отношение длин отрезков». Анализ *доказательства* показывает, что мы дополнительно будем использовать признак подобия прямоугольных треугольников.

В методическом плане самым сложным этапом работы с теоремой является поиск ***аналитического рассуждения,*** помогающего осознанию доказательства. Именно этот этап помогает ученикам уяснить последовательность шагов доказательства, необходимость выполнения дополнительных построений, выявить идею способа (приема) проведения рассуждений.

Можно предложить *несколько аналитических рассуждений,* приводящих к доказательству рассматриваемой теоремы.

Первое аналитическое рассуждение приводит нас к доказательству, основанному на методе подобия. С отношением длин отрезков мы встречаемся при рассмотрении подобных треугольников. Выясним, нельзя ли увидеть или получить с помощью дополнительного построения подобные треугольники, в которые отрезки *AB*, *CB*, *AE*, *CE* входят как стороны. По условию теоремы *BE* – это биссектриса угла, поэтому $\angle ABE = \angle CBE$. Попытаемся получить с помощью дополнительного построения подобные треугольники, в которые вышеназванные отрезки и равные углы входят как элементы. Для этого включим отрезки в прямоугольные треугольники с равными острыми углами, а для этого проведем перпендикуляры *AK* и *CH* из вершин *A* и *C* к прямой, содержащей биссектрису угла *B* (рис. 2). Получим две пары прямоугольных треугольников *ABK*, *CBH* и *AKE*, *CHE*, подобие которых в каждой паре легко доказывается. Теперь из подобия первой пары треугольников получим, что $BA : BC = AH : CK$, а из подобия второй пары получим, что $AH : CK = EA : EC$. Отсюда следует требуемое соотношение.

Второе аналитическое рассуждение. Другой способ получения подобных треугольников – проведение прямой, параллельной одной из сторон треугольника. Например, проведем *AM* параллельно *BC*, где точка *M* лежит на *BE* (рис. 3).

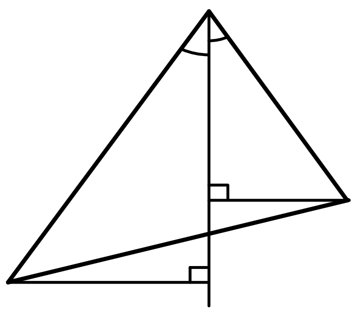


Рис. 2

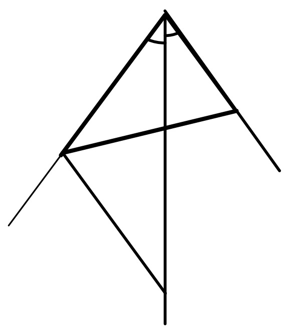


Рис. 3

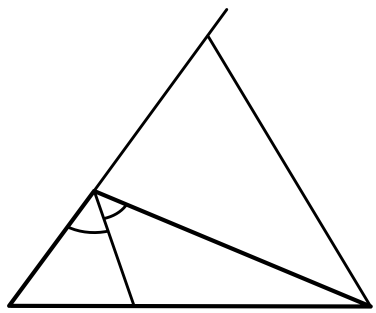


Рис. 4

В этом случае проблема сводится к доказательству подобия треугольников *MAE* и *BCE*, из которого следует пропорция $AE : CE = AM : BC$. Для доказательства истинности утверждения теоремы достаточно убедиться, что отрезок *AM* в полученной пропорции можно заменить на равный ему отрезок *AB*. Для этого достаточно доказать, что *ABM* – равнобедренный треугольник, используя определение биссектрисы угла, свойство углов при параллельных прямых и секущей, признак равнобедренности треугольника.

Заметим, что при работе со вторым аналитическим рассуждением актуализации подлежит несколько иной набор понятий и фактов, чем при работе с исходным доказательством.

Когда анализ поиска доказательства теоремы проведен, с учащимися обсуждается план доказательства. Теперь это легко сделать, поскольку все шаги доказательства логически и психологически обоснованы, а учащиеся имеют серьезные мотивы для поиска доказательства.

Краткая ***запись доказательства*** может быть представлена по логическим шагам согласно плану, с кратким обоснованием сделанных выводов (сделаны ссылки на определения, аксиомы, теоремы либо на результаты предыдущих шагов). Запись доказательства по логическим шагам удобна, поскольку позволяет легко проследить схему рассуждений.

После проведения доказательства теоремы необходимо выделить основные утверждения, на базе которых строилось доказательство. Это даст возможность проследить с учащимися ***связь*** нового теоретического факта с ранее изученными определениями понятий, аксиомами, теоремами, заложить основы для осознания системности знаний.

Поиск ***других способов доказательства*** теорем является существенным моментом в обучении доказательству. Важно показать учащимся, что новый способ доказательства мы получаем тогда, когда меняем набор понятий, аксиом, теорем, который логически предшествует данной теореме в данном курсе геометрии. Обобщенно говоря, мы должны показать *другую идею* доказательства.

Второе доказательство использует не метод подобия, а теорему Фалеса. Такой шаг является вполне естественным, поскольку учащиеся уже знакомы с ней.

Идея состоит в следующем. Так как в заключении теоремы используется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой (отрезки AE и EC), то попытаемся получить ситуацию, соответствующую теореме Фалеса. Для этого выделим две прямые AC и AB, на которых расположены три из отрезков, указанных в заключении теоремы (AE, EC и AB), и пересечем их двумя параллельными прямыми. Выбор таких прямых очевиден: это BE и параллельная ей CD, где точка D лежит на AB. Согласно теореме Фалеса можно записать соотношение $AE : EC = AB : BD$. Чтобы получить требуемое соотношение, достаточно доказать равенство отрезков BC и BD. Это следует из свойств углов при параллельных прямых и секущей и признака равнобедренности треугольника (рис. 4).

Третье доказательство использует метод площадей. Рассматривают треугольник ABC с биссектрисой BE и выражают площади треугольников ABE и CBE двумя способами: во-первых, через сторону и высоту, проведенную из вершины B, и, во-вторых, через две стороны, исходящие из вершины B, и углы между ними. Если в каждой паре выражений поделить одно равенство на другое, то получим соотношение $\frac{S_{ABE}}{S_{CBE}} = \frac{AE}{CE} = \frac{BA}{BC}$.

Итак, мы имеем несколько доказательств, проводимых различными методами. Естественно, что для работы на уроке можно использовать любой из них.

Работа по отысканию различных способов доказательства теоремы на основе имеющихся знаний обогащает опыт учащихся по поиску доказательства теорем, способствует осознанности и оперативности знаний.

Подбор упражнений, направленных на ***закрепление и применение*** доказанной теоремы, осуществляется на двух уровнях: первоначально предлагаются задачи на прямое применение полученного знания, с использованием типичных ситуаций; далее включаются задачи, при решении которых новая теорема используется в различных комбинациях с другими, ранее изученными, то есть, новое знание встраивается в систему ранее приобретенных.

Формулирование утверждения, обратного доказанному, и установление его истинности позволяют привлечь учащихся к самостоятельному пополнению знаний. Так, для изучаемой теоремы можно предложить сформулировать обратное утверждение и проверить его истинность. Убедившись в истинности полученного утверждения, учащиеся приходят к выводу, что имеет место обратная теорема – признак биссектрисы угла треугольника.

Теорема 2, обратная (признак биссектрисы). Если на стороне AC треугольника ABC взята точка E такая, что выполняется соотношение $BA:BC = AE:EC$, то BE является биссектрисой угла B треугольника.

После этого полезно обсудить вопрос о возможности *дальнейшего расширения* доказанной в теореме-свойстве закономерности. Для этого заменим биссектрису угла треугольника на биссектрису внешнего угла. Можно предложить учащимся сделать чертеж. Самостоятельное выполнение чертежа особенно значимо в данном случае, так как учащиеся фиксируют для себя основные элементы и соответствие между ними. В данной конфигурации весьма существенно выяснить следующее: *для любого ли треугольника биссектриса внешнего угла пересекает противолежащую сторону?* Затем возникает потребность сформулировать новое утверждение, пользуясь приемом аналогии.

Теорема 3 (аналогия с теоремой-свойством). Если биссектриса внешнего угла треугольника или ее продолжение пересекает продолжение противоположной стороны, то точка пересечения отстоит от концов этой стороны на расстояния, пропорциональные длинам двух других сторон.

Краткая запись теоремы такова:

Дано: ΔABC; BE – биссектриса внешнего угла при вершине B; $BE \cap AC = E$.

Доказать: $EA : EC = BA : BC$.

Здесь важно понять, что указанные прямые не пересекаются в том и только в том случае, когда стороны, исходящие из вершины B, не равны.

Работа над доказательством этого утверждения важна, так как в процессе доказательства проявится степень осознанности способов доказательства исходной теоремы и способность переносить усвоенные приемы рассуждения на аналогичную ситуацию. Любой из предложенных способов доказательства, использованных в первом случае, можно использовать и во втором.

Приведенное описание работы с теоремой показывает, что учащиеся могут не только принимать активное участие в получении знаний о геометрических фигурах, но одновременно с этим овладевать методологией поиска этих знаний.

2. Свойства медиан треугольника и тетраэдра

На этапе ***мотивации*** уместно предложить учащимся следующую практическую работу: построить произвольный (разносторонний) треугольник и провести в нем три медианы, причем сделать это как можно точнее. Школьники без труда замечают, что все медианы имеют общую точку M, иначе говоря, пересекаются в точке M.

Эта точка является одной из замечательных точек треугольника. Для подтверждения можно провести вторую практическую работу: 1) вырезать картонный треугольник; 2) положить его на тупой конец вертикально расположенного карандаша таким образом, чтобы точка M совпадала с концом карандаша. Важное физическое наблюдение состоит в том, что треугольник не упадет, а будет находиться в равновесии. Это свойство было известно еще древним грекам. Например, Архимед установил, что центр тяжести однородной треугольной пластинки лежит на каждой из медиан треугольника.

Обратим внимание на геометрическую особенность точки M. Она делит каждую медиану на два неравных отрезка. Глазомер подсказывает, что один из отрезков, концом которого является вершина, примерно в два раза больше другого. Это можно проверить, откладывая циркулем меньший отрезок на большем отрезке.

Итак, школьники с помощью учителя опытным путем установили два свойства медиан треугольника. Тем самым произошло ***ознакомление с теоремой,*** которую теперь нужно сформулировать и доказать.

Теорема 1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершин.

Эта замечательная теорема имеет много доказательств, основанных на *разных* идеях. В силу этого к ней уместно возвращаться при изучении различных разделов и тем курса планиметрии. Проиллюстрируем это утверждение, приведя несколько доказательств.

Начнем с доказательства, основанного на свойствах особых линий в треугольнике и параллелограмме.

Доказательство 1. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Согласно заключению теоремы необходимо доказать, что $AM = 2MA_1$ и $BM = 2MB_1$. Для этого введем в чертеж точки K и E, являющиеся серединами отрезков AM и BM соответственно.

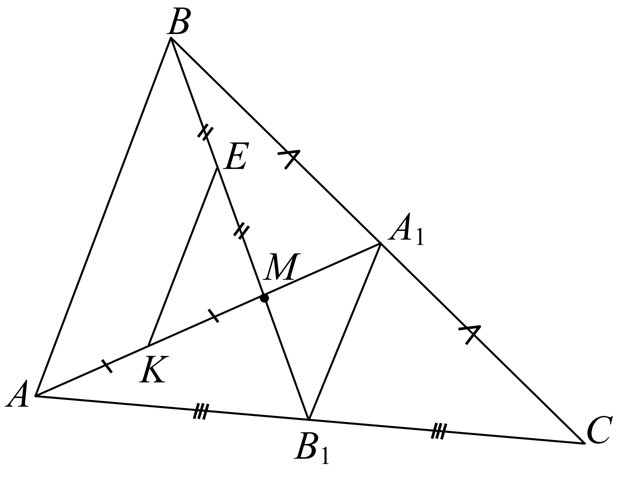


Рис. 5

Рассмотрим треугольник AMB. По построению отрезок EK является его средней линией, следовательно, $EK = \dfrac{AB}{2}$ и $EK \parallel AB$. Аналогично, в треугольнике ABC отрезок A_1B_1 является средней линией, следовательно, $A_1B_1 = \dfrac{AB}{2}$ и $A_1B_1 \parallel AB$. Получается, что четырехугольник EKB_1A_1 – параллелограмм, поскольку $EK = A_1B_1$ и $EK \parallel A_1B_1$.

Очевидно, что диагонали этого параллелограмма пересекаются в точке M. По свойству диагоналей параллелограмма $KM = MA_1$. Учитывая, что K – середина отрезка AM, получаем, что $AM = 2MA_1$.

Рассматривая другую диагональ параллелограмма и рассуждая аналогично, можно доказать, что $BM = 2MB_1$.

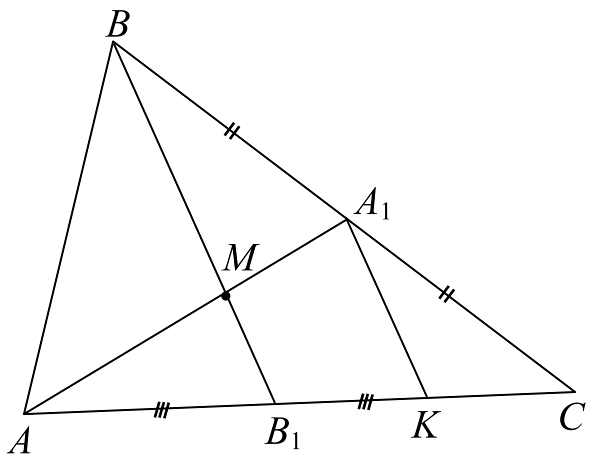


Рис. 6

Рассмотрим другую пару медиан, а именно *одну из рассмотренных* медиан AA_1 и *третью* медиану CC_1. Проводя аналогичные рассуждения, убедимся, что точка их пересечения делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершин. Однако на медиане AA_1 такая точка только одна, а именно точка M. Следовательно, третья медиана CC_1 также проходит через точку M.

Приведем другое доказательство теоремы, основанное на свойствах подобных треугольников.

Доказательство 2. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Рассмотрим треугольники ABM и A_1B_1M. Поскольку отрезок A_1B_1 является средней линией треугольника, справедливо соотношение $A_1B_1 \parallel AB$. Отсюда следует, что треугольники ABM и A_1B_1M подобны. По свойству средней линии треугольника $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{2}{1}$, следовательно, коэффициент подобия равен 2. Таким образом, точка M делит каждую из медиан, на которых она лежит, в отношении 2:1, то есть $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{2}{1}$.

Дословно повторив последний абзац доказательства 1, получим требуемое.

Третье доказательство теоремы основано на свойстве пропорциональных отрезков.

Доказательство 3. Пусть медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке M. Заключим отрезки AM и MA_1 медианы AA_1 между параллельными прямыми следующим образом: на отрезке B_1C выберем такую точку K, что $A_1K \parallel BB_1$ (рис. 6). Отрезок A_1K является средней линией треугольника BB_1C, следовательно, $B_1K = \frac{B_1C}{2} = \frac{AC}{4}$, откуда получаем, что $\frac{AB_1}{B_1K}=\frac{2}{1}$. В силу теоремы о пропорциональных отрезках $\frac{AM}{MA_1}=\frac{AB_1}{B_1K}=\frac{2}{1}$.

Проведя аналогичные рассуждения в отношении медианы BB_1, получим, что $\frac{BM}{MB_1}=\frac{2}{1}$. Дословно повторив последний абзац доказательства 1, получим требуемое.

Четвертое доказательство теоремы основано на принципиально ином математическом аппарате, а именно на использовании векторов.

Доказательство 4. Пусть точка P делит медиану AA_1 в требуемом отношении: $\frac{AP}{PA_1}=\frac{2}{1}$. Рассмотрим произвольную точку O на плоскости и выразим радиус-вектор точки P через радиус-векторы вершин треугольника.

В силу построения мы имеем векторное равенство $\overline{AP}=2\overline{PA_1}$. Его можно переписать в равносильном виде $\overline{OP}-\overline{OA}=2(\overline{OA_1}-\overline{OP})$, затем в виде $\overline{OP}-\overline{OA}=2\left(\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})-\overline{OP}\right)$, откуда следует, что $\overline{OP}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$. Полученная формула интересна тем, что радиус-вектор изучаемой точки P выражается *только* через радиус-векторы вершин треугольника.

Пусть теперь точки Q и R делят медианы BB_1 и CC_1 соответственно в отношении 2:1. Рассуждая аналогично, получим, что $\overline{OQ}=\overline{OR}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})=\overline{OP}$, следовательно, $P=Q=R=M$, а значит, медианы треугольника имеют общую точку и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин.

Использование векторов для доказательства теоремы 1 – это не просто удобный технический метод. Оно представляет самостоятельный интерес, поскольку подводит учащихся к целой *серии* однотипных алгебро-геометрических утверждений и вопросов.

1. Середина M отрезка AB, и только она, удовлетворяет равенству $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$ для произвольной точки O.

2. Середина M отрезка AB, и только она, удовлетворяет равенству $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{0}$.

3. Точка M пересечения медиан треугольника ABC, и только она, удовлетворяет равенству $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$ для произвольной точки O.

4. Точка M пересечения медиан треугольника ABC, и только она, удовлетворяет равенству $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \overline{0}$.

5. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Какими геометрическими свойствами обладает точка M, удовлетворяющая векторному равенству $\overline{OM} = \frac{1}{4}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$ для произвольной точки O?

6. Пусть дан тетраэдр $ABCD$. Какими геометрическими свойствами обладает точка M, удовлетворяющая векторному равенству $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \overline{0}$?

Очевидно, что утверждения 1 и 3 в совокупности с вопросом 5 аналогичны друг другу и отличаются лишь количеством вершин в изучаемой фигуре. Очевидно также, что утверждения 2, 4, 6 получаются из утверждений 1, 3, 5 соответственно путем простой конкретизации $O = M$.

Сама постановка вопросов 5 и 6 подсказывает, что было бы целесообразно изучить тетраэдр и выяснить, справедливо ли для него утверждение, аналогичное теореме о медианах треугольника. Для этого нам потребуется определение медианы тетраэдра.

Медианой тетраэдра называют отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.

Теорема 2. Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 3:1, считая от вершин.

Естественно предположить, что при доказательстве теоремы 2 можно применить те же приемы, которые были использованы при доказательстве теоремы 1. Приведем два доказательства, предоставив поиск других доказательств читателю. *Первое доказательство использует подобие треугольников.*

Доказательство 1. Пусть отрезки AM_a, BM_b, CM_c и DM_d являются медианами тетраэдра $ABCD$. Из определения медиан тетраэдра следует, что медианы AM_a и DM_d лежат в плоскости треугольника ADK, где K – середина ребра CB. Очевидно, что они пересекаются в некоторой точке, которую мы обозначим через G.

Рассмотрим выносной чертеж, содержащий треугольник ADK и две выбранные медианы (рис. 7а).

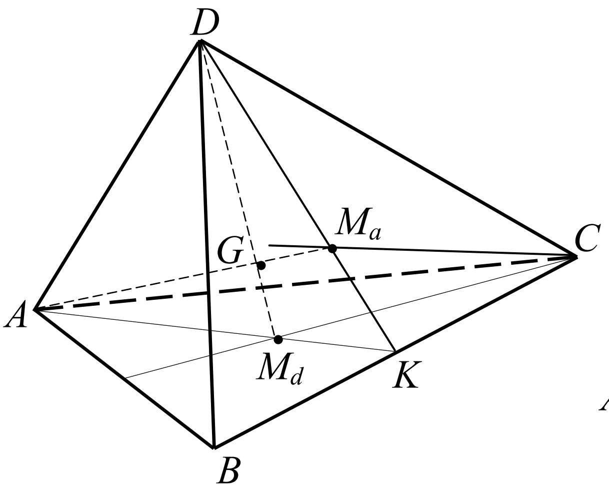


Рис. 7

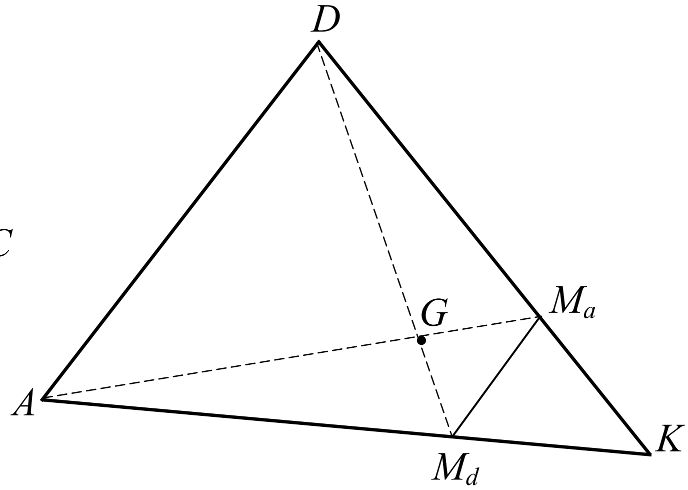


Рис. 7а

Точки M_a и M_d делят стороны треугольника ADK в отношении 2:1, считая от вершин D и A. Отсюда следует, что треугольники ADK и M_dM_aK подобны, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{AD}{M_dM_a} = \dfrac{3}{1} = 3$. Из подобия этой пары треугольников следует параллельность $AD \parallel M_dM_a$, которая, в свою очередь, влечет подобие другой пары треугольников: $\Delta ADG \cong \Delta M_aM_dG$. Коэффициент подобия второй пары треугольников, фактически, уже вычислен: $\dfrac{AD}{M_aM_d} = 3$. Выразив этот коэффициент через другие стороны второй пары треугольников, получим, что $\dfrac{AG}{GM_a} = \dfrac{DG}{GM_d} = \dfrac{3}{1}$, то есть точка G пересечения двух медиан тетраэдра делит эти медианы в отношении 3:1.

Рассмотрим другую пару медиан, а именно *одну из рассмотренных* медиан AM_a и *одну из оставшихся* медиан, например, BM_b. Проводя аналогичные рассуждения, убедимся, что точка их пересечения делит каждую медиану в отношении 3:1, считая от вершин. Однако на медиане AM_a такая точка только одна, а именно точка G.

Следовательно, третья медиана BM_b также проходит через точку G. Аналогичное утверждение для четвертой медианы очевидно.

Второе доказательство основано на векторном методе и использует ту же идею, что и доказательство 4 теоремы 1.

Доказательство 2. Пусть точка P делит медиану AM_a в требуемом отношении: $\dfrac{AP}{PM_a}=\dfrac{3}{1}$. Рассмотрим произвольную точку O в пространстве и выразим радиус-вектор точки P через радиус-векторы вершин тетраэдра.

В силу построения мы имеем векторное равенство $\overline{AP}=3\overline{PM_a}$. Его можно переписать в равносильном виде $\overline{OP}-\overline{OA}=3(\overline{OM_a}-\overline{OP})$, а затем в виде $\overline{OP}-\overline{OA}=3\left(\dfrac{1}{3}(\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})-\overline{OP}\right)$, откуда следует, что $\overline{OP}=\dfrac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. Полученная формула интересна тем, что радиус-вектор изучаемой точки P выражается *только* через радиус-векторы вершин треугольника.

Пусть теперь точки Q, R и S делят медианы BM_b, CM_c и DM_d соответственно в отношении 3:1. Рассуждая аналогично, получим, что $\overline{OQ}=\overline{OR}=\overline{OS}=\dfrac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})=\overline{OP}$, следовательно, $P=Q=R=S=G$, а значит, медианы тетраэдра имеют общую точку и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершин.

Очевидно, что точка G играет особую роль в тетраэдре. Ее дальнейшие свойства естественно изучать в процессе решения задач, одну из которых мы приведем.

Задача. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке, а именно в точке пересечения медиан тетраэдра.

Решение. Пусть F и K – середины противоположных рёбер BC и AD тетраэдра $ABCD$. По свойству середины отрезка $\overline{OF}=\dfrac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC})$ и $\overline{OK}=\dfrac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OD})$. Если точка N является серединой отрезка FK, то $\overline{ON}=\dfrac{1}{2}(\overline{OF}+\overline{OK})=\dfrac{1}{4}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}+\overline{OD})$. В силу теоремы 2 $\overline{ON} = \overline{OG}$, следовательно, $N = G$. Рассуждения для других отрезков проводятся аналогично.

Итак, *четыре* медианы тетраэдра и *три* отрезка, соединяющие середины его противоположных ребер, пересекаются в одной точке. Эту точку называют *центроидом* тетраэдра. Аналогично, точку пересечения медиан треугольника называют центроидом треугольника.

В заключение отметим, что рассмотренный материал может быть использован и обобщен в процессе изучения центра масс системы материальных точек.

3. Свойства высот треугольника и тетраэдра

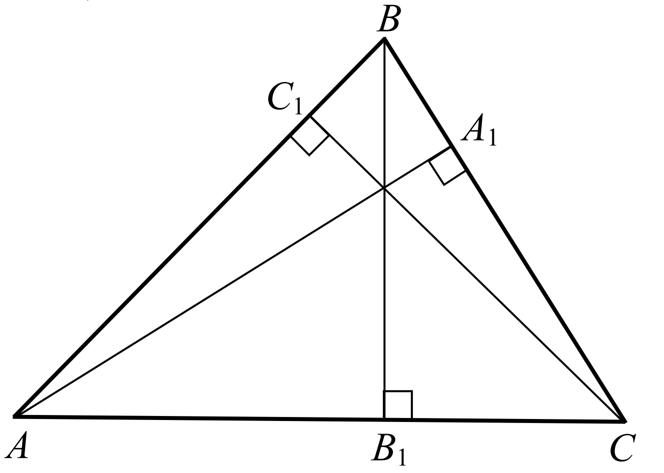
Мотивация изучения любой теоремы практически всегда опирается на уже имеющиеся знания учащихся. В случае теоремы о высотах треугольника естественно обратиться к следующему факту: *серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке – центре описанной окружности.* Если каждый из этих перпендикуляров переместить параллельно самому себе, то свойство «пересекаться в одной точке» будет, вообще говоря, утрачено, хотя, быть может, и сохранится в особых случаях. При этом существует «сверхособый» случай, когда перпендикуляры к сторонам треугольника проходят через противоположные вершины треугольника, то есть являются его высотами. Возникает естественный вопрос: пересекаются ли в одной точке высоты треугольника?

Для выдвижения гипотезы естественно проделать простой эксперимент: каждый учащийся строит какой-либо треугольник и его высоты. При этом следует позаботиться о том, чтобы одна часть класса строила остроугольные треугольники, другая часть – тупоугольные треугольники, а третья – прямоугольные треугольники. Построения, проделанные для большого количества разнообразных треугольников, позволяют учащимся выдвинуть *гипотезу*, которую мы сразу запишем в виде теоремы.

Теорема 1. Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Так происходит ***ознакомление с изучаемым фактом.*** В процессе выявления этого факта учащиеся были в высокой степени самостоятельными, а словесная формулировка его весьма проста, поэтому мы вправе надеяться на то, что ***запоминание формулировки теоремы*** не потребует специальных усилий.

Выделение условия и заключения теоремы также является достаточно простым и фактически сводится к введению обозначений (рис. 8).



Дано: ΔABC,
$AA_1 \perp BC,\ A_1 \in BC$;
$BB_1 \perp AC,\ B_1 \in AC$;
$CC_1 \perp AB,\ C_1 \in AB$.
Доказать:
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = H$.

Рис. 8

Доказательство 1 (метод дополнительных построений). Прежде всего, заметим, что на этапе мотивации мы уже ***актуализировали*** те знания, которые потребуются в процессе доказательства, а именно свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Построим новый треугольник таким образом, чтобы *высоты* изучаемого треугольника ABC оказались принадлежащими *серединным перпендикулярам* к сторонам вновь построенного вспомогательного треугольника. Очевидно, что в этом случае они будут пересекаться.

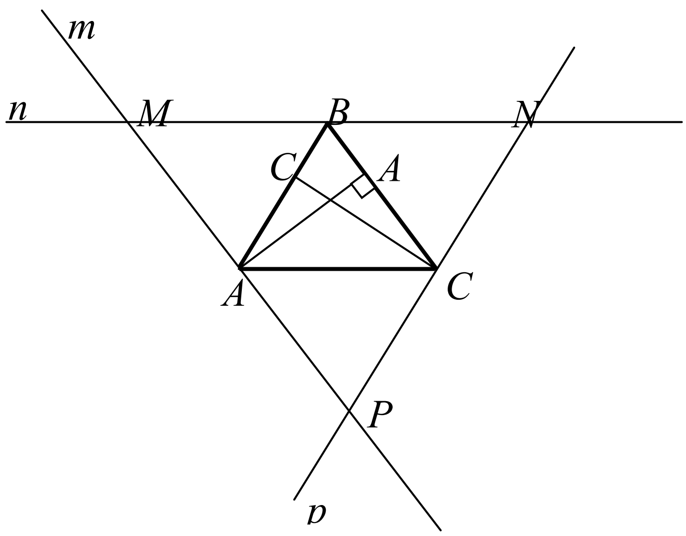


Рис. 9

Для построения проведем прямые m, n, p через вершины A, B, C соответственно, которые параллельны противолежащим сторонам треугольника: $m \parallel BC$, $n \parallel AC$, $p \parallel AB$ (рис. 9). Пересекаясь, прямые m, n, p образуют треугольник. Его вершины обозначим через M, N, P таким образом, что $A \in MP$, $B \in MN$, $C \in NP$.

Покажем, что треугольник MNP является искомым. Для этого постараемся понять, каково взаимное расположение каждой из высот относительно треугольника MNP. Начнем с высоты AA_1.

По построению $AA_1 \perp BC$ и $MP \parallel BC$, следовательно, $AA_1 \perp MP$. Теперь нужно доказать, что точка A является серединой стороны MP, то есть $MA = AP$. Для этого подберем третий отрезок, который равен каждому из отрезков MA и AP. С этой целью включим эти отрезки в четырехугольники $MACB$ и $PABC$. По построению они являются параллелограммами, следовательно, их противоположные стороны равны, в частности, выполняется равенство $MA = BC = AP$. Итак, высота AA_1 лежит на прямой, являющейся серединным перпендикуляром к стороне MP треугольника MNP.

Аналогично можно доказать, что две другие высоты также лежат на прямых, являющихся серединными перпендикулярами к сторонам вспомогательного треугольника. Поскольку серединные перпендикуляры к сторонам треугольника MNP пересекаются в одной точке, то и высоты треугольника ABC также пересекаются в одной точке. Тем самым доказательство теоремы завершено.

Сделаем несколько разнотипных замечаний. Во-первых, реальное выполнение аналогичных рассуждений является тренировкой для учащихся, а их способность или неспособность рассуждать по аналогии показывает учителю, насколько глубоко было понято первоначальное рассуждение. Во-вторых, приведенное доказательство выполнено ***аналитическим*** методом. Очевидно, что при необходимости его можно заменить синтетическим доказательством. В-третьих, приведенное доказательство содержит два простых, но полезных эвристических приема, характерных для геометрии: 1) два отрезка равны между собой, если они порознь равны третьему; 2) перпендикуляр к одной из параллельных прямых является перпендикуляром и к другой прямой.

Доказательство 2 (векторный метод). Идея второго доказательства существенно отличается от идеи первого доказательства. Пусть высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H (рис. 10). Если мы докажем, что прямая CH перпендикулярна стороне AB треугольника ABC, то это будет означать, что третья высота треугольника также проходит через точку H.

Для реализации этой идеи *переведем* условие нашей геометрической теоремы на язык векторов, используя радиус-векторы $\overline{HA}$, $\overline{HB}$ и $\overline{HC}$. Перпендикулярность $AA_1 \perp BC$ равносильна обращению в нуль скалярного произведения: $\overline{HA} \bullet \overline{BC} = 0$. Представив второй сомножитель в виде $\overline{BC} = \overline{HC} - \overline{HB}$ и раскрыв скобки, получим, что

$$\overline{HA}\bullet\overline{HC}-\overline{HA}\bullet\overline{HB}=0 \qquad (1)$$

Аналогично, перпендикулярность $BB_1 \perp AC$ может быть представлена в равносильной форме

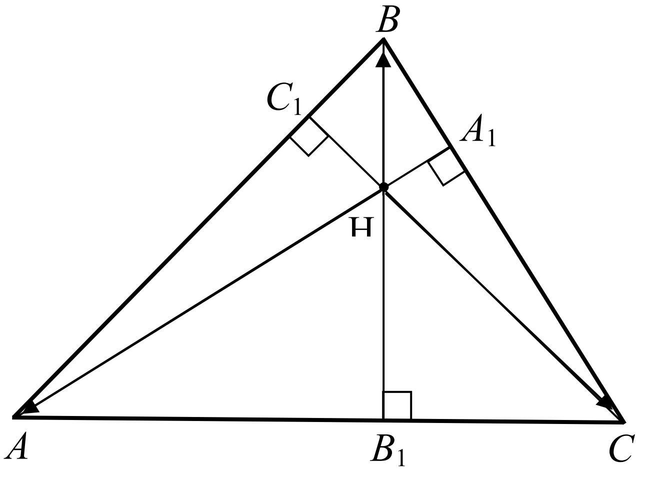


Рис. 10

$$\overline{HB}\bullet\overline{HC}-\overline{HB}\bullet\overline{HA}=0 \qquad (2)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим, что $\overline{HA}\bullet\overline{HC}-\overline{HB}\bullet\overline{HC}=0$, откуда следует равенство $(\overline{HA}-\overline{HB})\bullet\overline{HC}=0$, равносильное равенству $\overline{BA}\bullet\overline{HC}=0$. *Переводя* полученное векторное равенство на геометрический язык, получаем искомое утверждение $AB \perp HC$.

Рассмотренные доказательства теоремы используют две *различные* геометрические идеи, которые реализуются двумя *различными* методами. С точки зрения авторов, полезно обратить внимание школьников на такое разнообразие, поскольку именно в процессе накопления подобных примеров формируются представления людей о богатстве математики.

Теорема 1 выражает основное свойство высот треугольника. Тем не менее, заслуживают внимания и другие свойства высот. Рассмотрим два из них.

Свойство 1. Пусть в треугольнике ABC с непрямым углом C точки A_1 и B_1 являются основаниями высот, проведенных из вершин A и B. Тогда треугольники ABC и A_1B_1C подобны, причем коэффициент подобия k равен $|\cos C|$.

Дано: 1) ΔABC; 2) $\angle C \neq 90^{\circ}$; 3) AA_1, BB_1 – высоты.

Доказать: 1) ΔABC подобен ΔA_1B_1C; 2) $k = |\cos C|$.

Доказательство. 1) Пусть угол C является острым (рис. 11a). Тогда треугольники AA_1C и BB_1C прямоугольные и имеют общий острый угол C. Выразим косинус угла C через стороны каждого из треугольников. Рассматривая треугольник AA_1C, получим, что $\cos C = CA_1 : CA$, аналогично, из треугольника BB_1C имеем $\cos C = CB_1 : CB$. Отсюда следует, что $CA_1 : CA = CB_1 : CB$.

Рассмотрим треугольники ABC и A_1B_1C. Они подобны, т.к. имеют общий угол C, а стороны, образующие этот угол, пропорциональны. Предыдущие вычисления показывают, что коэффициент подобия $k = \cos C = |\cos C|$, поскольку $\cos C > 0$.

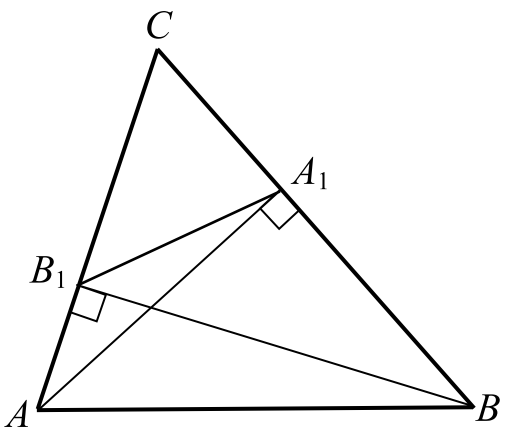


Рис. 11а

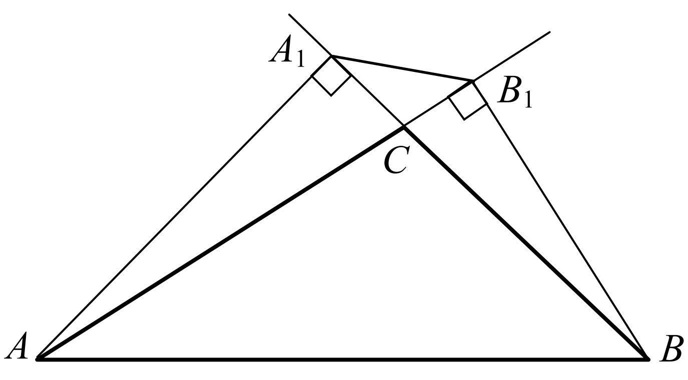


Рис. 11б

2) Пусть угол C является тупым (рис. 11б). Тогда треугольники AA_1C и BB_1C прямоугольны и имеют равные вертикальные острые углы при вершине С. Найдем выражение $-\cos C$ через стороны каждого из треугольников. Рассматривая треугольник AA_1C и используя формулы приведения, получим, что $-\cos C = \cos\angle ACA_1 = CA_1 : CA$, а рассматривая треугольник BB_1C, получим, что $-\cos C = \cos\angle BCB_1 = CB_1 : CB$. Отсюда имеем, что $CA_1 : CA = CB_1 : CB$.

Рассмотрим треугольники ABC и A_1B_1C. Они подобны, так как имеют равные вертикальные углы при вершине C, а стороны, образующие эти углы, пропорциональны. Предыдущие вычисления показывают, что коэффициент подобия равен $k = -\cos C = |\cos C|$, поскольку $\cos C < 0$.

Свойство 2. Если треугольник является остроугольным, то точка пересечения его высот является центром окружности, вписанной в треугольник, образованный основаниями его высот (рис. 12).

Доказательство. Докажем, что высота A_1A делит пополам $\angle C_1A_1B_1$. Сделаем это в несколько этапов.

1) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABA_1. Поскольку $\angle BA_1A$ является прямым, получаем, что $\angle C_1A_1A = 90^\circ - \angle BA_1C_1$. Применив свойство 1 к подобным треугольниками ABC и A_1BC_1, мы получим, что $\angle BA_1C_1 = \angle BAC$, поэтому предыдущее равенство примет вид

$$\angle C_1A_1A = 90^\circ - \angle BAC. \qquad (1)$$

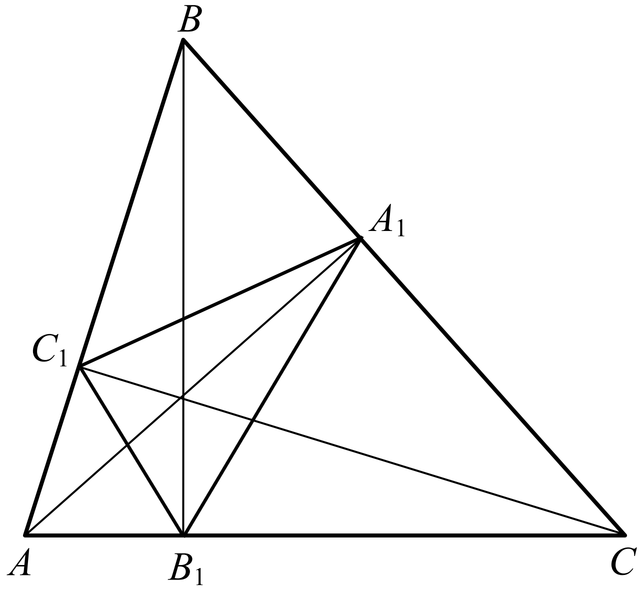


Рис. 12

2) Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ACA_1. Поскольку $\angle CA_1A$ является прямым, получаем, что $\angle B_1A_1A = 90^\circ - \angle CA_1B_1$. Применив свойство 1 к подобным треугольникам ABC и A_1B_1C, мы получим, что $\angle CA_1B_1 = \angle BAC$, поэтому предыдущее равенство примет вид

$$\angle B_1A_1A = 90^\circ - \angle BAC. \quad (2)$$

3) Из равенств (1) и (2) следует, что $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$, поэтому A_1A является биссектрисой $\angle C_1A_1B_1$.

Аналогично можно доказать, что две другие высоты B_1B и C_1C также являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

Итак, точка пересечения высот треугольника ABC является точкой пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$, то есть центром вписанной в него окружности.

Доказательство свойства 2 можно провести на основе использования идеи метода вспомогательной окружности (см. параграф 7).

Пространственным аналогом треугольника является тетраэдр. Естественно выяснить, не обладают ли высоты тетраэдра каким-либо особым свойством, подобным свойству высот треугольника. При столкновении с новой ситуацией полезно составить вместе с учащимися программу ее изучения. Прежде всего, необходимо понять, существуют ли такие тетраэдры, высоты которых пересекаются в одной точке. Если ответ окажется отрицательным, то дальнейшее изучение высот тетраэдра потеряет смысл. Если же ответ окажется положительным, то необходимо выяснить, во всяком ли тетраэдре высоты пересекаются в одной точке. Если ответ окажется положительным, то будет выявлена глубокая аналогия между высотами треугольника и тетраэдра. Если же ответ окажется отрицательным, то целесообразно отыскать некоторый *специальный класс* тетраэдров, высоты которых пересекаются в одной точке.

Говоря о целесообразности составления данной программы, мы имеем ввиду не только геометрию, но и *алгебру,* и пусть это не покажется странным. Действительно, приступая к изучению нового для учащихся вида уравнений (систем уравнений), прежде всего, следует понять, каков критерий совместности уравнения (системы) данного вида. Если уравнение (система) совместно, то следует понять, каков критерий единственности решения. Наконец, необходимо получить формулы для нахождения решений или описание множества решений. При всей разнице между геометрией и алгеброй обращает на себя внимание то обстоятельство, что суть предмета заставляет размышляющего человека рассуждать неким регулярным способом, и при этом не важно, кем является этот человек – школьником или математиком-исследователем.

Приступим к реализации данной программы. Рассмотрим тетраэдр $SABC$, у которого все плоские углы при вершине S являются прямыми (рис. 13а). В нем все высоты пересекаются в одной точке.

Действительно, в силу критерия перпендикулярности прямой и плоскости ребра AS, BS и CS перпендикулярны граням BCS, ACS и ABS соответственно, следовательно, они являются высотами тетраэдра. Очевидно, что они имеют общую точку S. Высота, проведенная из оставшейся вершины S, также проходит через точку S. Итак, мы привели пример тетраэдра, у которого все высоты пересекаются в одной точке.

Покажем теперь, что не во всяком тетраэдре высоты пересекаются в одной точке. Для этого достаточно рассмотреть предыдущий тетраэдр $SABC$ и «чуть-чуть пошевелить» вершину B, оставив неизменным положение остальных вершин. Более точно, рассмотрим новую точку B_1, которая лежит внутри отрезка AB (рис. 13б). Очевидно, что высоты тетраэдра SAB_1C не пересекаются в одной точке, поскольку высоты, проведенные из вершин C и B_1, являются скрещивающимися прямыми.

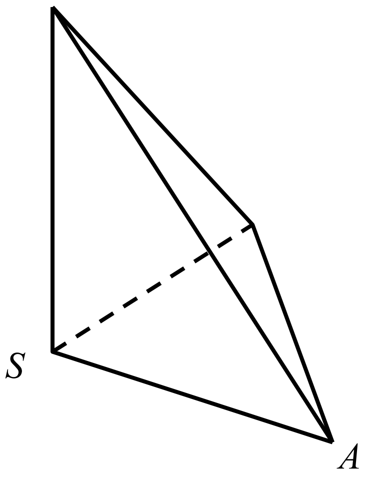


Рис. 13а

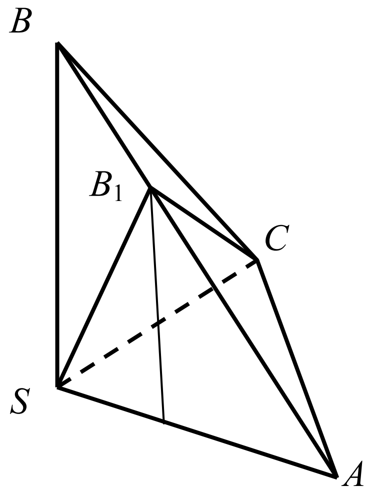


Рис. 13б

Приступая к поиску класса тетраэдров, у которых все высоты пересекаются в одной точке, обратимся к нашему первому примеру и отметим одну его особенность: противоположные ребра тетраэдра $SABC$ взаимно перпендикулярны. Естественно предположить, что наличие у всех высот общей точки вытекает именно из этого свойства. Попытаемся доказать следующую теорему.

Теорема 2. Если противоположные ребра тетраэдра взаимно перпендикулярны, то высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $AB \perp CD$, $BC \perp AD$, $BD \perp AC$.

Доказать: высоты тетраэдра $ABCD$ пересекаются в одной точке.

Доказательство. Проведем наше доказательство в два этапа, выделив логические шаги в каждом из них.

Первый этап. Докажем, что любые две высоты тетраэдра, противоположные ребра которого взаимно перпендикулярны, пересекаются.

Обозначим через AH_1, BH_2, CH_3, DH_4 высоты тетраэдра, проведенные к граням BCD, ADC, ABD, ABC соответственно.

а) Проведем плоскость через ребро AD и высоту DH_4 и обозначим ее (ADH_4). Выясним, каково взаимное расположение прямой BC и плоскости (ADH_4). Они взаимно перпендикулярны, поскольку $BC \perp AD$ по условию и $BC \perp DH_4$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Пусть K есть точка пересечения прямой BC и плоскости (ADH_4). Очевидно, что $(ADH_4) = (ADK)$.

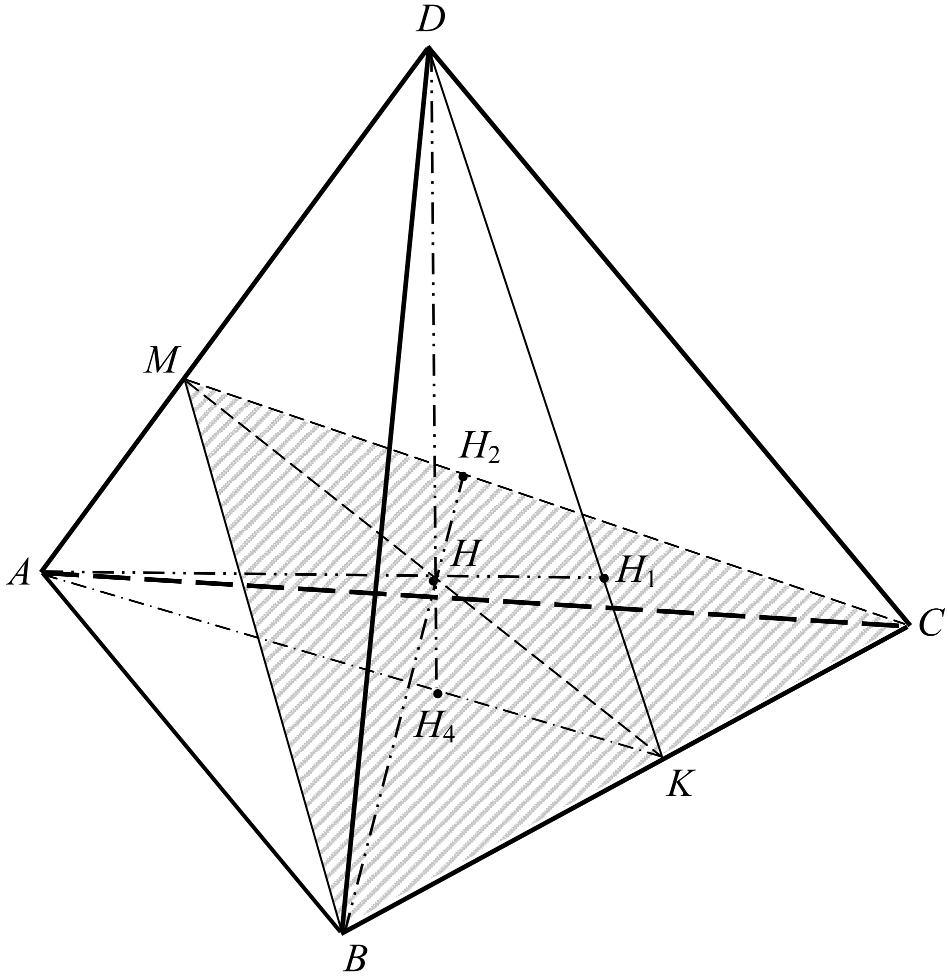


Рис. 14

б) Выясним, каково взаимное расположение плоскостей (ADK) и (DBC). Они взаимно перпендикулярны, поскольку вторая плоскость содержит прямую BC, перпендикулярную к первой из них. При этом линией пересечения этих плоскостей является прямая DK.

с) Рассмотрим треугольник ADK и две его высоты, проведенные из точек A и D. По определению перпендикулярности прямой и плоскости $DH_4 \perp AK$. Вторая высота AH_1 перпендикулярна DK, значит, по свойству перпендикулярных плоскостей AH_1 перпендикулярна плоскости BCD. Отсюда делаем вывод, что высоты треугольника ADK совпадают с высотами тетраэдра AH_1 и DH_4 соответственно. Поскольку высоты тетраэдра совпадают с высотами треугольника, то они пересекаются. Обозначим через H точку их пересечения, $AH_1 \cap DH_4 = H$.

Зафиксируем полученный *промежуточный вывод:* любые две высоты тетраэдра, удовлетворяющего условиям теоремы, пересекаются.

Второй этап. Докажем, что две оставшиеся высоты тетраэдра также проходят через точку H. Сначала сделаем это для высоты BH_2.

а) В треугольнике ADK проведем третью высоту KM и рассмотрим плоскость (BMC). Выясним, каково взаимное расположение этой плоскости и прямой AD. Они взаимно перпендикулярны, поскольку $AD \perp BC$ по условию и $AD \perp KM$ по построению.

б) Из соотношения $AD \perp (BMC)$ следует, что $(BMC) \perp (ADC)$ на основании признака перпендикулярности плоскостей. При этом линией пересечения этих плоскостей является CM, в частности, CM является также высотой треугольника ADC.

в) Из соотношения $(BMC) \perp (ADC)$ следует, что высота тетраэдра BH_2 лежит в плоскости (BMC), а ее основание H_2 лежит на CM – высоте треугольника ADC.

г) Согласно нашему промежуточному выводу высоты DH_4 и BH_2 должны пересекаться в некоторой точке. При этом высота BH_2 целиком лежит в плоскости (BMC), а высота DH_4 имеет с плоскостью (BMC) единственную общую точку H. Следовательно, высота BH_2 также проходит через точку H.

Рассуждения для высоты CH_3 аналогичны тем, которые приведены на втором этапе доказательства. Рекомендуем проделать их.

4. Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

Мотивация 1. Для мотивации изучения теоремы можно учащимся дать *измерительно-вычислительное задание:* «Постройте окружность и любые две пересекающиеся хорды (в частности, хорда может быть диаметром). Измерьте образовавшиеся отрезки хорд и сравните произведения длин отрезков каждой из хорд».

В результате такой практической работы в классе будет рассмотрено большое число пар пересекающихся хорд различных окружностей, что позволит выдвинуть гипотезу о равенстве произведений отрезков любых пересекающихся хорд в окружности. Эта гипотеза требует доказательства. Во-первых, вывод получен с помощью измерений, которые всегда имеют погрешность. Во-вторых, он сделан по аналогии на основе метода неполной индукции, а такой способ рассуждений не всегда приводит к верному выводу. Поэтому перед учащимся встает как учебная задача – сформулировать теорему согласно проведенным наблюдениям, так и исследовательская задача – найти метод доказательства теоремы.

Мотивация 2 *(создание проблемной ситуации).* Учитель может предложить учащимся своеобразную игру – «угадайку». Каждый ученик строит две хорды окружности AB и CD, пересекающиеся в точке M. Измеряют длины отрезков AM, MB, CM и MD, называя учителю длины трех из них. Учитель «угадывает» длину четвертого отрезка, вызывая удивление школьников.

Раскрытие «тайны угадывания» приводит учащихся к необходимости овладения новыми знаниями. Дальнейшее подведение к самостоятельной формулировке теоремы можно вести так же, как описано в случае мотивации 1.

Теорема 1 *(свойство отрезков пересекающихся хорд).* Если две хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M, то

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Ознакомление с фактом, изложенным в теореме, происходит в результате выполнения измерительно-вычислительного задания на этапе мотивации.

Для того чтобы включить учащихся в самостоятельную работу по поиску доказательства теоремы, следует уделить внимание ***выделению её условия и заключения.***

Дано: окружность, AB и CD – хорды, $AB \cap CD = M$.

Доказать: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Чтобы доказательство было понятным и легче воспринятым учащимися, следует осуществлять ***актуализацию необходимых знаний.***

Целесообразно повторить свойства вписанных и вертикальных углов и признаки подобия треугольников. Это можно сделать либо через систему вопросов, либо через набор задач, например, набор задач на готовых чертежах.

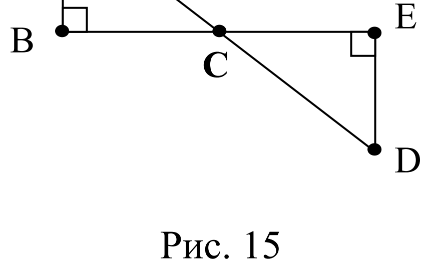


Рис. 15

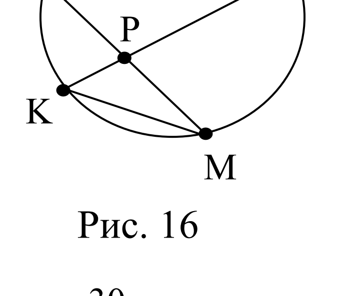


Рис. 16

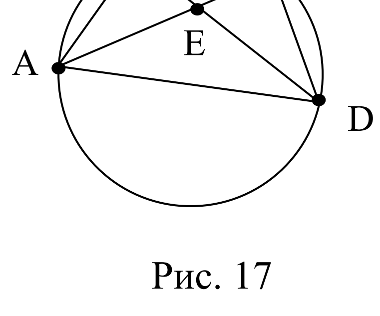


Рис. 17

Задание. На рисунках 15-17:

1) укажите равные углы;

2) выделите подобные треугольники.

Осознанию доказательства, пониманию проводимых дополнительных построений способствует аналитический метод доказательства, или аналитическое рассуждение, приводящее к доказательству рассматриваемой теоремы.

Аналитическое рассуждение приводит к доказательству теоремы 1, основанному на методе подобия.

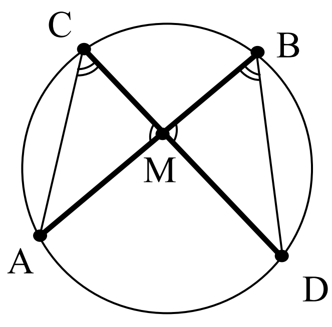


Рис. 18

Доказательство. 1) Для того чтобы равенство $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ было верно, достаточно, чтобы была верна пропорция $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$, где AM *и* MB – либо крайние, либо средние члены пропорции. Можно также использовать одну из равносильных пропорций $\frac{MB}{MD} = \frac{CM}{AM}$ *или* $\frac{MB}{CM} = \frac{MD}{AM}$, *или* $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$.

2) Для пропорциональности $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$ достаточно, чтобы были подобны треугольники AMC *и* DMB. Выполним дополнительное построение – соединим точки A, C и B, D. При этом мы включим в чертеж необходимые треугольники AMC и DMB (рис.18).

3) Для того чтобы треугольники AMC *и* DMB были подобны, достаточно подвести их под один из признаков подобия, а для этого достаточно указать в них по два соответственно равных угла. Условие теоремы, следствия из дополнительного построения, а также знания о свойствах вертикальных и вписанных углов позволяют установить, что углы AMC и DMB равны как вертикальные, а углы ACM *и* DBM равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD.

Рассуждение приведено *методом восходящего анализа.*

После аналитического рассуждения легко составить с учащимися ***план доказательства:***

1. Сделать дополнительное построение.
2. Доказать подобие треугольников AMC и DMB.
3. Записать пропорциональность сторон подобных треугольников.

Вот краткая ***запись доказательства,*** которую можно рассматривать как *синтетический метод* доказательства.

1. Соединим точки A, C и B, D.

2. $\begin{cases} \angle AMC = \angle DMB \text{ как вертикальные} \\ \angle ACM = \angle DBM = \frac{1}{2} \cup AD \text{ как вписанные} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta DMB$ по двум углам

3. $\Delta\, AMC \sim \Delta\, DMB \Rightarrow \dfrac{AM}{CM} = \dfrac{MD}{MB}$.

Набор задач на ***закрепление и применение*** доказанной теоремы должен быть разноуровневым. Естественно начать с задачи на прямое применение теоремы в стандартной ситуации.

Задача 1. Хорда KL пересекает хорду MN той же окружности в её середине – точке E. Найдите длину хорды MN, если $KE = 20$, *а* $EL = 5$.

Затем учащиеся включаются в работу с задачами, которые предполагают использование новой теоремы в комбинации с ранее изученным материалом.

Задача 2. На продолжениях медиан AM *и* BE треугольника ABC взяты точки P *и* K соответственно, такие, что $AP : AM = 2 : 1$, *а* $BK : BE = 3 : 2$. Оказалось, что точки A, B, C, P *и* K лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 90^0$, $\angle C = \arccos\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\angle B = 90^0 - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

При решении задачи помимо свойства пересекающихся хорд необходимо использовать целый ряд теорем: свойство медиан треугольника; признак параллелограмма; свойство четырёхугольника, вписанного в окружность; теорему Пифагора; свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр. Именно в многочисленных связях с другими теоремами геометрии и состоит математическая красота этой задачи.

Формулировка обратного утверждения и установление его истинности способствуют лучшему осознанию учащимися структуры изучаемой теоремы и расширению их знаний. Школьные учебники, как правило, не ориентируют учащихся на такой вид деятельности.

Теорема 2 *(обратная теореме 1).* Если отрезки AB *и* CD пересекаются в точке M и $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то отрезки AB *и* CD являются хордами одной окружности.

Концы двух пересекающихся отрезков можно ассоциировать с вершинами выпуклого четырёхугольника, в котором данные отрезки будут диагоналями. Тогда возможна другая формулировка обратной теоремы.

Теорема 2_1 *(обратная к теореме 1).* Если точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит их на отрезки такие, что произведения отрезков каждой из диагоналей равны, то около такого четырёхугольника можно описать окружность.

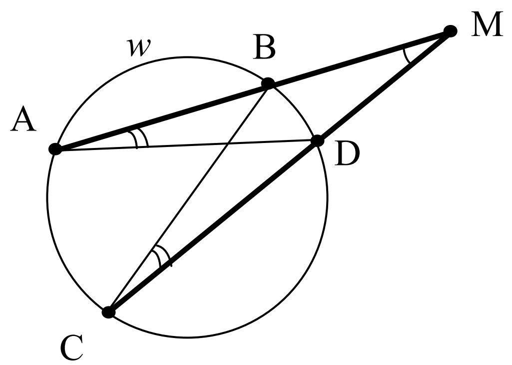


Рис. 19

Полезно рассмотреть возможности дальнейшего ***расширения*** теоремы 1. Заменим *хорду* на *секущую* (можно считать, что хорда является частью секущей). Рассмотрим случай, когда две секущие имеют общую точку M вне круга.

Теорема 3 *(аналогичная теореме 1).* Если из точки M к окружности проведены две секущие (рис. 19), пересекающие окружность в точках A, B *и* C, D соответственно, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Для доказательства теоремы 3 можно провести аналитическое рассуждение, аналогичное тому, которое проводилось при доказательстве теоремы 1. В ходе его устанавливается, что достаточно доказать подобие треугольников ADM и CBM.

Отметим, что возможны другие формулировки теоремы 3.

Теорема 3_1. Произведение секущей к окружности на её внешнюю часть не зависит от выбора секущей.

Теорема 3_2. Произведение секущей к окружности на её внешнюю часть есть величина постоянная.

У учащихся вызывает интерес и одновременно трудности установление той константы, о которой идёт речь в теореме 3_2. Можно предложить школьникам представить вращение секущей MC вокруг точки M, продолжающееся до тех пор, пока секущая MC не займёт положение касательной, касающейся окружности в точке K (рис. 20). При этом точки C *и* D совпадают с точкой K, поэтому получим, что $MC = MD = MK$. Тогда из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ получают

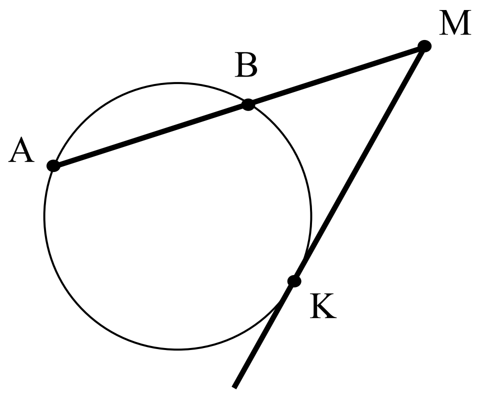


Рис. 20

новое равенство $AM \cdot MB = MK^2$. Теперь учащиеся сами смогут сформулировать соответствующую теорему.

Теорема 4 *(конкретизация теоремы 3).* Произведение большего отрезка секущей окружности на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведённой из той же точки.

Доказательство вытекает из подобия треугольников AMK и KMB (рис. 20), установление которого включает необходимость знания свойства об угле между касательной и хордой.

Для ***мотивации*** изучения теоремы 4 можно создать проблемную ситуацию, используя *задачу с практическим содержанием*.

Задача 3. Как далеко видно из самолёта, летящего на высоте 4 км над Землёй, если радиус Земли 6370 км?

Для решения можно воспользоваться теоремой Пифагора. ***Второе решение*** базируется на теореме 4. По условию задачи (рис. 21) MA – секущая, причём $AB = 2R = 2 \cdot 6370$ (км), $MB = 4$ км, откуда $MA = 12744$ км. Здесь касательная MK к окружности – это искомый отрезок. По теореме 4 имеем: $MK^2 = MA \cdot BM$.

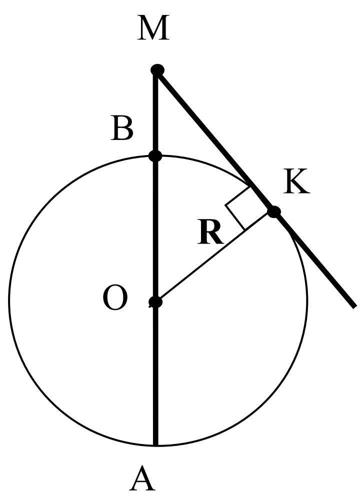


Рис. 21

Следствие теоремы 4 *(свойство касательных к окружности*). Касательные, проведённые из точки к окружности, равны (рис. 22).

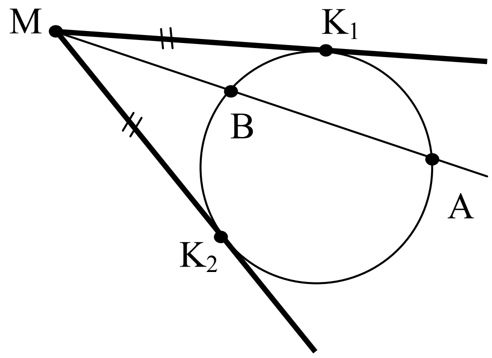


Рис. 22

Расширение знаний по этой теме может осуществляться и во внеурочной работе (на факультативе или в элективном курсе). Можно познакомить учащихся с понятием *степень точки относительно окружности.*

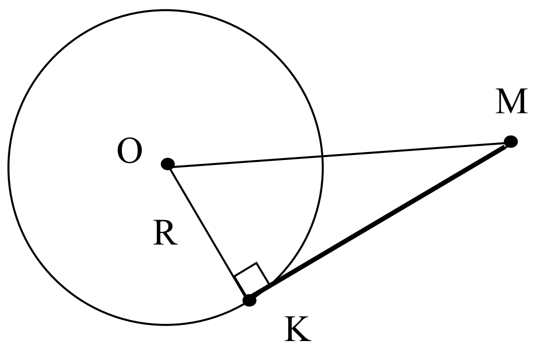


Рис. 23

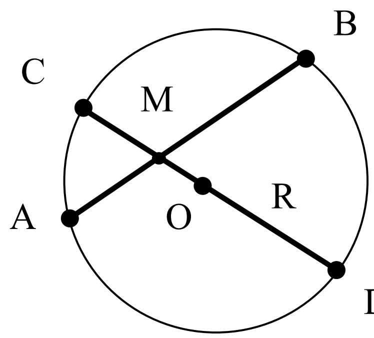


Рис. 24

Если точка M лежит вне круга, то по теореме 4 о квадрате касательной следует, что $AM \cdot MB = MK^2$ (рис. 23). С другой стороны, $MK^2 = OM^2 - R^2$, где O – центр окружности, OM – расстояние точки M до её центра, R – её радиус (рис). Итак,

$$MA \cdot MB = OM^2 - R^2 \qquad (1)$$

Если точка M лежит внутри круга, то по теореме 1 о свойстве пересекающихся хорд (одна из хорд является диаметром (рис. 24)) имеем $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, где $MC = R - OM$ и $MD = R + OM$. Итак,

$$MA \cdot MB = R^2 - OM^2 \qquad (2)$$

Выражения (1) и (2) похожи друг на друга. Придадим им ещё большее сходство. Будем понимать под произведением направленных отрезков $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ произведение длин отрезков MA и MB, взятых со знаком «плюс», если точки A *и* B лежат по одну сторону от M, и со знаком «минус», если по разные стороны от точки M.

Тогда формулы (1) и (2) можно объединить в одну $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$.

Формула справедлива, если точка M лежит и на окружности.

Величина $\delta = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$ называется *степенью точки M относительно данной окружности.*

Очень важно обсудить с учащимися вопрос о возможности «переноса» изучаемой теоремы из плоскости в пространство. Заменив окружность сферой, круг – шаром, хорду окружности – хордой сферы (отрезок, соединяющий две точки сферы) по аналогии с теоремами 1–4 формируем следующие теоремы.

Теорема 5 *(аналогичная теореме 1).* Если две хорды AB и CD одной сферы пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Две пересекающиеся хорды задают единственную плоскость. Сечение шара такой плоскостью есть круг. Продолжение доказательства теоремы 5 полностью повторяет доказательство теоремы 1.

При доказательстве следующих теорем используется та же схема: данные в условии теорем (две пересекающиеся секущие, пересекающиеся секущая и хорда) однозначно задают секущую плоскость; выделяется круг – сечение шара; повторяется соответствующее доказательство в плоскости.

Теорема 6 *(обратная теореме 5).* Если отрезки AB и CD в пространстве пересекаются в точке M и $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то отрезки AB и CD являются хордами одной сферы.

Теорема 7 *(аналогичная теореме 3).* Если из точки M к сфере проведены две секущие, пересекающие сферу в точках A, B *и* C, D соответственно, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Теорема 8 *(аналогичная теореме 4).* Произведение большего отрезка секущей сферы на её внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведённой из той же точки.

Описанная методическая схема работы с теоремой позволит развивать у учащихся познавательную активность, интерес к геометрии, а также способствовать развитию у них логического мышления за счёт выполнения ими логических операций анализа, синтеза, сравнения, обобщения, конкретизации, аналогии.

5. Сумма углов треугольника

Теорема о сумме углов треугольника является одной из важнейших теорем евклидовой геометрии. Создать положительную ***мотивацию*** для изучения данной теоремы можно различными способами, например, путем *создания проблемной ситуации.*

Школьникам выдают вырезанные из цветной бумаги треугольники, первой группе – остроугольные, второй группе – прямоугольные и третьей группе – тупоугольные.

Задание 1. Обведите контур модели треугольника в тетради (три ученика разных групп выполняют задания на доске) и обозначьте его вершины A, B и C. Измерьте величины всех углов треугольника, запишите результаты измерений.

Задание 2. Найдите сумму углов A и B.

Задание 3. Назовите сумму углов A и B соседу по парте и предложите назвать величину угла C.

Учащимся недостаточно знаний для выполнения последнего задания, а учитель легко «угадывает» величину угла C в треугольниках у нескольких учеников. Свой успех учитель объясняет тем, что знает свойство углов треугольника, которое поможет открыть школьникам.

Задание 4. Найдите сумму всех углов треугольника ABC.

Сравнение результатов вычисления суммы всех углов большого числа разного вида треугольников позволяет учащимся самостоятельно выдвинуть *гипотезу* о том, что сумма углов в любом треугольнике равна 180°, и раскрыть «тайну угадывания» величины угла C учителем. Эта гипотеза требует доказательства, так как измерения углов с помощью транспортира имеют погрешность и вывод сделан по аналогии на основе метода неполной индукции.

Перед учащимися ставится учебная задача – сформулировать теорему, опираясь на приведенные наблюдения, и исследовательская задача – найти различные способы доказательства.

Теорема 1. Сумма углов любого треугольника равна 180°.

Чтобы включить учащихся в самостоятельную работу по поиску доказательства теоремы, следует уделить внимание ***выделению ее условия и заключения***. Для школьника это совсем не простая задача, поскольку математическая сущность теоремы делает предпочтительной ее *категорическую формулировку*. При этом условием теоремы служит указание на объект исследования – треугольник.

Дано: ΔABC.

Доказать: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказательства теоремы опираются на свойства накрест лежащих, внутренних односторонних, соответственных углов при пересечении параллельных прямых секущей, а также на свойство развернутого угла. ***Актуализация необходимых знаний*** поможет школьникам участвовать в процессе доказательства и сделать его понятным. Повторение выделенных свойств можно организовать через систему вопросов и набор задач. Например, задачи на готовых чертежах (рис. 25):

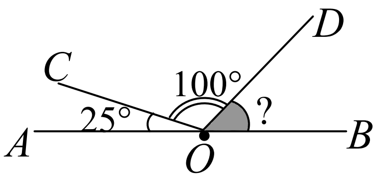


Рис. 25а

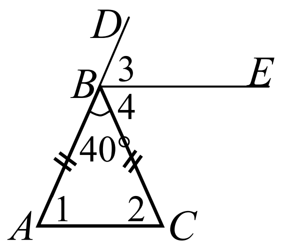


Рис. 25б

Дано: $BE \parallel AC$, $AB = BC$, $\angle ABC = 40°$

Доказать: BE – биссектриса $\angle CBD$.

Найти: $\angle A$, $\angle C$, $\angle A + \angle B + \angle C$.

Поиску способа доказательства, выделению идеи и осознанию доказательства, пониманию проводимых дополнительных построений способствует аналитическое рассуждение и практическая работа.

Аналитическое рассуждение

Вопрос-1 (В-1). Как можно доказать, что сумма углов в треугольнике равна 180°?

Ответ-1 (О-1). Составить из углов треугольника (или соответственно равных им углов) угол равный 180° – развернутый угол.

Иллюстрация на модели. На вырезанной из бумаги модели треугольника, перегибая по штриховым линиям (рис. 26), «сложить» его углы.

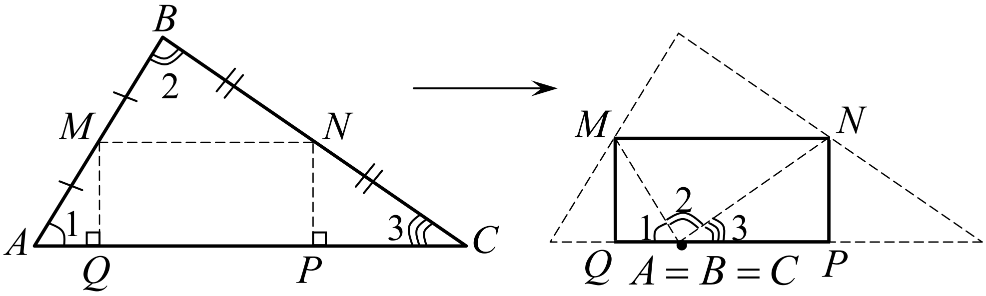


Рис. 26

Идея доказательства: на чертеже достаточно иметь развернутый угол (дополнительное построение) и доказать, что составляющие его углы соответственно равны углам рассматриваемого треугольника.

Доказательство 1 (*синтетический метод*).

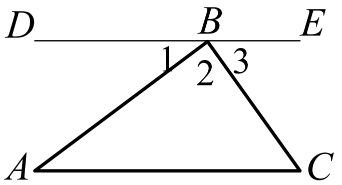


Рис. 27

1. Дополнительное построение: $DE \parallel AC$, B лежит на DE (рис. 27).

2. $\angle A = \angle 1$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых DE и AC секущей AB.

3. $\angle C = \angle 3$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых DE и AC секущей BC.

4. $\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle DBE \\ \angle DBE = 180^\circ \text{ как развернутый угол} \end{cases} \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow$

5. Учитывая равенство углов, получаем, что
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Вместе с учащимися полезно составить ***план доказательства***:

а) сделать дополнительное построение;

б) доказать, что $\angle A = \angle 1$, $\angle C = \angle 3$;

в) доказать, что $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$;

г) сделать вывод, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

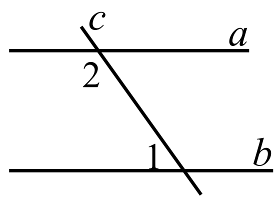
Аналитическое рассуждение можно направить на поиск других способов доказательства теоремы:

В-2. В каких теоремах фигурирует величина 180°?

О-2$_1$. Сумма внутренних односторонних углов при пересечении параллельных прямых секущей равна 180° (рис. 27).

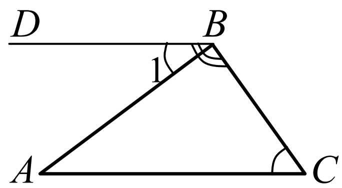
О-2$_2$. Сумма двух прямых углов составляет 180°.

Доказательство 2. **В-3.** Какое дополнительное построение нужно сделать, чтобы заменить углы треугольника соответственно равными углами, составляющими внутренние односторонние углы?



$a \parallel b$, c – секущая,
$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

Рис. 28а

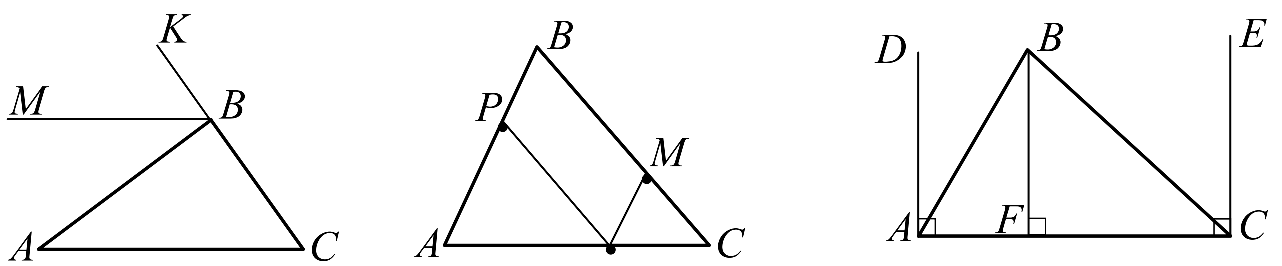


$BD \parallel AC$, BC – секущая,
$\angle C$ и $\angle CBD$ – внутренние односторонние углы

Рис. 28б

О-3. Через вершину B провести луч BD параллельно AC (рис. 28).

Доказательства 3-5 можно предложить провести учащимся самостоятельно по готовым чертежам (рис. 29).



$BM \parallel AC$ — а)

N – любая точка на AC, $NM \parallel AB$, $NP \parallel BC$ — б)

$BF \perp AC$, $AD \perp AC$, $CE \perp AC$ — в)

Рис. 29

Важная ***роль теоремы*** обусловлена тем, что она позволяет классифицировать треугольники на *остроугольные*, *прямоугольные* и *тупоугольные*.

Закрепление рассматриваемой теоремы можно организовать через решение задач, соответствующих разным уровням усвоения знаний и сформированности умений.

Следует начать с простой задачи на прямое применение теоремы.

Задача 1. Найдите угол C треугольника ABC, если: а) $\angle A = 65°$, $\angle B = 57°$; б) $\angle A = \alpha$, $\angle B = 2\alpha$.

Затем естественно предложить более сложные задачи, которые предполагают использование новой теоремы в комбинации с ранее усвоенными знаниями, включают учащихся в исследовательскую деятельность.

Задача 2. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 115°. Найдите углы треугольника.

Ответ: 1) 65°, 57,5°, 57,5°; 2) 50°, 65°, 65°.

При решении задачи 2 ученик должен знать свойство углов равнобедренного треугольника, свойство внешнего угла и рассмотреть два случая расположения внешнего угла в равнобедренном треугольнике.

Задача 3. Существует ли треугольник с двумя: а) прямыми углами, б) тупыми углами?

Отметим, что задача 3 решается методом от противного, трудным для школьника, но весьма важным для формирования его математической культуры.

Среди задачного материала необходимо выделить *задачи-теоремы*.

Задача-теорема 4. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60° (*свойство равностороннего треугольника*).

Формулировка обратного утверждения и установление его истинности способствует осознанию структуры теоремы, формированию приемов решения геометрических задач.

Задача-теорема 4_1 (*обратная* к задаче-теореме 4). Если в треугольнике каждый угол равен 60°, то треугольник равносторонний (*признак равностороннего треугольника*).

В дидактических целях обратная задача-теорема содержит избыточное условие. Достаточно наличия двух углов по 60°, чтобы сделать вывод, что треугольник будет равносторонним.

Совместно с учащимися следует *систематизировать приемы* доказательства того, что треугольник равносторонний.

В-4. Какой факт достаточно установить (доказать), чтобы сделать вывод о правильности треугольника?

О-4_1. Достаточно доказать, что все стороны треугольника равны.

О-4_2. Достаточно доказать, что все углы треугольника равны 60°.

О-4_3. Достаточно доказать, что треугольник является равнобедренным и один из его углов равен 60°.

Как ***следствие*** теоремы о сумме углов треугольника выступает *теорема о внешнем угле треугольника*.

Теорема 2. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

Расширение и обобщение теоремы 1 о сумме углов треугольника можно получить при изучении многоугольников в 8 классе. Начнем с обобщения в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Сумма углов выпуклого n-угольника равна

$$(n-2)\cdot 180^\circ .$$

Идея доказательства заключается в разбиении многоугольника на неперекрывающиеся треугольники.

Доказательства этой теоремы могут быть различными в зависимости от способа разбиения многоугольника на треугольники.

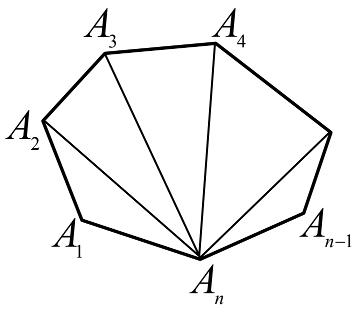


Рис. 30а

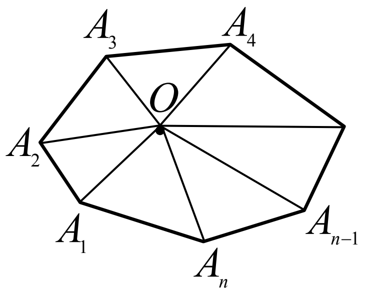


Рис. 30б

Приведем систему вопросов и предполагаемых ответов, с помощью которых можно получить нужную формулу.

Доказательство 1. Соединим диагоналями одну из вершин (A_1) многоугольника с другими его вершинами (рис. 30а).

В-5. Сколько получилось треугольников?

О-5. Получили $n-2$ треугольника.

В-6. Из чего складывается сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$?

О-6. Из суммы внутренних углов $n-2$ треугольников.

В-7. Запишите, чему равна сумма углов выпуклого n-угольника.

О-7. $S_n = (n-2)\cdot 180°$.

Доказательство 2. Возьмем внутри выпуклого n-угольника точку O и соединим ее отрезками с вершинами многоугольника (рис. 30б). Многоугольник «разрезан» на n треугольников, у каждого из которых сумма углов 180°. Поэтому общая сумма их углов составит $n\cdot 180°$. Сумма углов n-угольника (S_n) складывается из общей суммы углов треугольников за исключением 360° – суммы всех углов треугольников при вершине O. Получаем формулу $S_n = n\cdot 180° - 360°$, а после преобразований $S_n = (n-2)\cdot 180°$.

Для получения ***расширения*** теоремы 3 (распространение выведенной формулы на класс невыпуклых n-угольников) перед учащимися может быть поставлен *проблемный вопрос*: «Подумайте, верен ли этот результат для невыпуклых многоугольников?»

Как *частный случай* может быть рассмотрен вопрос о сумме углов четырехугольника и сформулирована соответствующая теорема.

Теорема 4. Сумма углов любого четырехугольника равна 360°.

Из задачного материала выделим задачу о сумме *внешних* углов выпуклого n-угольника.

Задача-теорема 5. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого n-угольника равна 360°.

В заключение, подчеркивая важную роль теоремы о сумме внутренних углов треугольника, следует отметить, что эта теорема дает школьникам еще одну существенную характеристику треугольника – сумма его внутренних углов равна 180°. Выделенную отличительную черту треугольника, наряду с другими (наличие трех сторон, трех углов), удобно использовать в задачах. Проиллюстрируем это на примере одной из олимпиадных задач.

Задача 6. Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого взяты 500 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Тысячеугольник разделили на непересекающиеся треугольники, вершинами которых являются данные 500 точек. Сколько получилось треугольников?

Методические замечания к решению. При поиске решения необходимо установить, что для составления модели задачной ситуации существенными являются следующие характеристики: 1) четность числа вершин, $n = 1000$; 2) наличие внутри n-угольника половинного количества точек, $n/2 = 500$; 3) способ разбиения на треугольники.

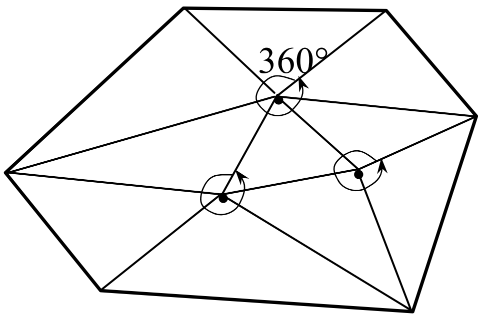


Рис. 31

Естественно начать с простых ситуаций и рассмотреть восьмиугольник и четыре точки внутри его, шестиугольник с тремя внутренними точками (рис. 31). Однако при подсчете числа треугольников не удается установить зависимость их количества от числа вершин.

Ключом к решению задачи является выбор такой характеристики треугольника, как сумма его внутренних углов. Искомое число треугольников можно получить при делении суммы S внутренних углов *всех* образовавшихся треугольников на 180° – сумму углов одного треугольника. Сумма S легко подсчитывается по формуле $S = (1000 - 2) \cdot 180° + 360° \cdot 500 = 180° \cdot 1998$.

6. Теорема Фалеса

Мотивация изучения теоремы может быть проведена через создание проблемной ситуации, связанной с использованием двух весьма похожих задач на построение, решение одной из которых хорошо известно учащимся, а решение другой неизвестно.

Задача 1. Разделите *пополам* данный отрезок AB с помощью циркуля и линейки.

Решение этой задачи сводится к построению серединного перпендикуляра к отрезку, что является базовой задачей на построение. Изменим требование задачи.

Задача 2. Разделите *на три равные части* данный отрезок AB с помощью циркуля и линейки.

Учащиеся не могут решить задачу 2 с помощью тех основных задач на построение, которыми они владеют к настоящему моменту. Для решения им необходимо овладеть новым теоретическим фактом, позволяющим выйти из затруднения.

Решение этой задачи связывают с именем выдающегося древнегреческого математика Фалеса Милетского (ок. 640 – ок. 546 гг. до н.э.). Он первым доказал теорему, которая позволяет делить отрезок на любое количество равных частей, и с тех пор эта теорема носит его имя.

Для ***ознакомления с фактом,*** изложенным в теореме, полезно предложить учащимся выполнить построение, касающееся деления отрезка на три равные части и носящее характер математического эксперимента.

Построение. Вне прямой AB выберем точку M и проведем луч AM. На этом луче отложим от точки A три равных отрезка AK_1, K_1K_2 K_2K_3 и проведем прямую BK_3. Через точки K_2 и K_1 проведем прямые, параллельные BK_3. Пусть B_2 и B_1 – точки пересечения этих прямых с отрезком AB.

Сравним длины отрезков AB_1, B_1B_2 и B_2B. Сравнение можно провести путем измерений с помощью линейки или же с помощью раствора циркуля. В результате получим, что *эти отрезки равны*, то есть отрезок AB оказывается поделенным на три равные части.

Данный результат относится к одному конкретному отрезку AB и получен с помощью построений и измерений. Для того чтобы убедиться в его истинности, необходимо сформулировать теорему и провести строгое доказательство. Здесь уместно обсудить два вопроса. 1) Зависит ли проводимое построение от того количества равных частей, на которые требуется разделить отрезок? 2) Какие прямые выбираются как основные при проведении построения? Далее можно предложить учащимся попытаться сформулировать теорему.

Теорема Фалеса. Если на одной из двух прямых отложены несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то на второй прямой отложатся равные отрезки.

Теперь учащиеся готовы к тому, чтобы ***выделить условия и заключение*** теоремы и ввести необходимые обозначения.

Дано: 1) a и b – прямые; 2) $A_1 \in a$, $A_2 \in a$, $A_3 \in a \ldots$; 3) $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$; 4) $n_1 \parallel n_2 \parallel n_3 \ldots$; 5) $A_1 \in n_1$, $A_2 \in n_2$, $A_3 \in n_3 \ldots$ 6) $n_1 \cap b = B_1$, $n_2 \cap b = B_2$, $n_3 \cap b = B_3 \ldots$

Доказать: $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$

Поскольку в условии теоремы речь идет о двух прямых, возникает необходимость рассмотрения взаимного расположения двух прямых на плоскости: 1) прямые параллельны; 2) прямые пересекаются.

Доказательство. 1) Пусть $a \parallel b$ (рис. 32а). Чтобы доказать, что отрезки, высекаемые на прямой b, равны, достаточно доказать, что равны параллелограммы $A_1A_2B_2B_1$, $A_2A_3B_3B_2$ … Отсюда будет следовать, что $B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots$ Здесь мы видим еще один пример ***аналитического рассуждения.***

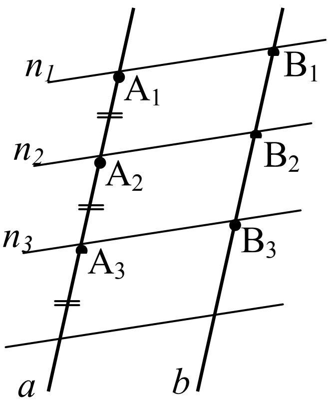


Рис. 32а

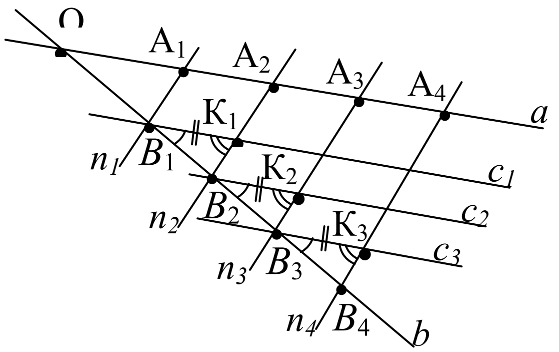


Рис. 32б

2) Пусть $a \cap b = O$ (рис. 32б). Для доказательства равенства отрезков, высекаемых на прямой b параллельными прямыми, включим эти отрезки в треугольники и докажем их равенство. Для этого проведем через точки B_1, B_2, B_3 … прямые c_1, c_2, c_3 …, параллельные прямой a, причем такие, что $B_1 \in c_1$, $B_2 \in c_2$, $B_3 \in c_3$ … В результате получим точки $K_1 = n_2 \cap c_1$, $K_2 = n_3 \cap c_2$, $K_3 = n_4 \cap c_3$ …

Рассмотрим треугольники $B_1K_1B_2$, $B_2K_2B_3$, $B_3K_3B_4$ ... Прежде всего, $B_1K_1 = B_2K_2 = B_3K_3 = \ldots$ согласно доказанному в пункте 1. Кроме того, $\angle K_1B_1B_2 = \angle K_2B_2B_3 = \angle K_3B_3B_4 = \ldots$ как соответственные углы при параллельных прямых c_1, c_2, c_3 ... и секущей b. Наконец, $\angle B_1K_1B_2 = \angle B_2K_2B_3 = \angle B_3K_3B_4 = \ldots$ как углы с соответственно параллельными сторонами. Отсюда следует, что рассматриваемые треугольники равны по второму признаку равенства треугольников. Из равенства треугольников следует, что $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$

Теорему Фалеса полезно сформулировать в ***обобщенном*** виде. Действительно, если возможно деление отрезка на равные части, то естественно поставить вопрос о делении отрезка в некотором наперед заданном отношении.

Обобщенная теорема Фалеса. Если на одной из двух прямых отложены несколько равных отрезков и через их концы проведены параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то на ней отложатся отрезки, пропорциональные данным.

Теорему Фалеса и ее обобщение можно использовать в точном соответствии с их содержанием при решении задач на построение, в которых требуется разделить отрезок AB на равные части либо в заданном отношении. Алгоритмы построения аналогичны в обоих случаях.

1. Провести луч AM, где $M \notin AB$.

2. На луче AM отложить равные отрезки (либо отрезки, находящиеся в заданном отношении).

3. Через точку B и конец последнего из отложенных отрезков провести прямую.

4. Провести прямые, параллельные построенной, через концы других отрезков, отложенных на луче AM.

5. Построенные прямые пересекут отрезок AB, разбивая его на равные части (либо в заданном отношении).

На рис. 33 приведены примеры деления отрезка на 5 равных частей и деления отрезка в отношении 5:2.

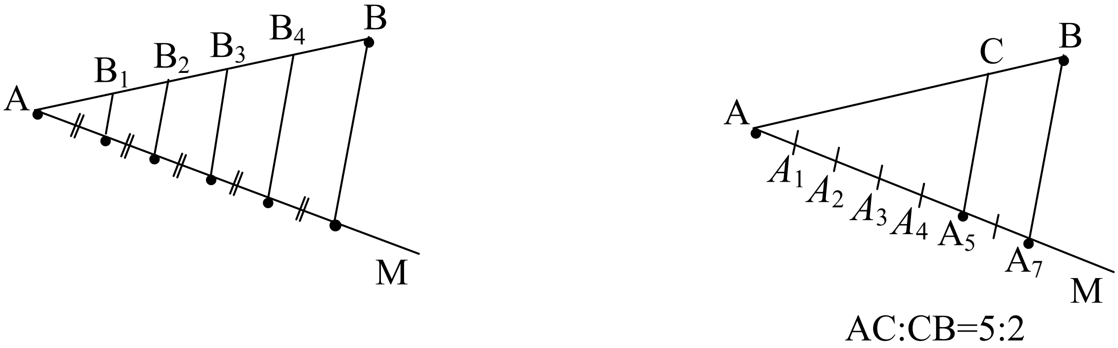


Рис. 33

Теорему Фалеса можно эффективно использовать при решении задач на доказательство и вычисление. Приведем пример задачи на нахождение отношений, в которых отрезки делятся при пересечении.

Задача 3. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и P, такие, что $AM:MB=2:1$ и $BP:PC=3:2$. Найдите отношение, в котором отрезок AP делится точкой D, где $D=AP\cap CM$ (рис. 34).

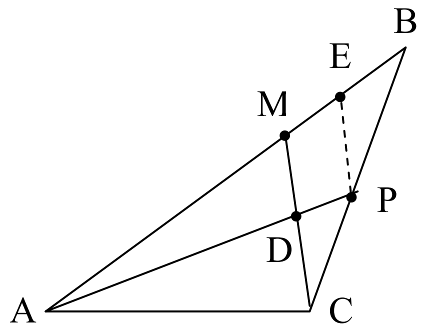


Рис. 34

Решение. Согласно требованию задачи необходимо найти отношение, в котором отрезок AP делится точкой D. Поскольку отрезок AP делится точкой D на отрезки AD и DP, заключим их между двумя параллельными прямыми. Для этого потребуется дополнительное построение – проведение параллельных прямых.

В качестве одной из них используем прямую CM. Через точку P проведем прямую PE, где $E\in AB$, параллельную прямой CM. Согласно обобщенной теореме Фалеса имеем $AD:DP=AM:ME$.

Чтобы найти отношение отрезков AM и ME, выразим отрезок ME через AB. Для этого воспользуемся теоремой Фалеса, применяя ее к прямым AB и BC, которые пересечены параллельными прямыми CM и PE. На прямой BC имеем отрезки BP и PC, такие, что $BP:PC=3:2$. Согласно обобщенной теореме Фалеса $BP:PC=BE:EM=3:2$. Отсюда следует, что $EM=\frac{2}{5}BM$. Учитывая, что $BM=\frac{1}{3}AB$, получим, что $EM=\frac{2}{15}AB$. Теперь несложно найти искомое отношение отрезков AM и EM. Действительно, $AM:EM=\frac{2}{3}AB:\frac{2}{15}AB=5:1$. Окончательно получаем, что $AD:DP=AM:ME=5:1$.

7. Четырехугольник, вписанный в окружность

Мотивация изучения материала о четырехугольниках может быть аргументирована следующим образом: среди различных геометрических задач наиболее интересными являются те, в которых рассматриваются комбинации окружности с другими геометрическими фигурами (треугольником, четырехугольником и др.). Для решения таких задач требуются знания как свойств фигур, вписанных в окружность, так и условия, при которых около них можно описать окружность.

Известно, что около любого треугольника можно описать окружность. Справедливо ли подобное утверждение для четырехугольников? Следующая задача поможет ответить на этот вопрос.

Задача 1. Дан ромб $ABCD$ с углом A, равным 60°. Рассмотрите окружность, описанную около треугольника ABD, и выясните, принадлежит ли точка C этой окружности.

Решение. Центр O окружности принадлежит диагонали AC ромба. Треугольник ABD является равносторонним, поэтому радиус окружности равен $\frac{AC}{3}$. Следовательно, расстояние от центра O окружности до точки C равно $\frac{2}{3}AC$, то есть в два раза больше радиуса. Очевидно, что вершина C ромба не лежит на окружности, проходящей через три его вершины.

Подобное рассуждение можно провести для любого ромба, не являющегося квадратом, вне зависимости от величины его угла, и в результате мы получим тот же вывод. Значит, мы нашли класс четырехугольников, вокруг которых нельзя описать окружность. В общем случае четыре произвольно взятые точки не будут лежать на одной окружности, поскольку три из них определяют окружность, которая «не обязана» проходить через четвертую точку.

Обратим ситуацию: на произвольно взятой окружности выберем последовательно четыре точки A, B, C, D и соединим их таким образом, чтобы получился выпуклый четырехугольник. Очевидно, что он вписан в окружность. Поставим задачу изучить свойства вписанного четырехугольника и выявить условия, при которых четырехугольник является вписанным.

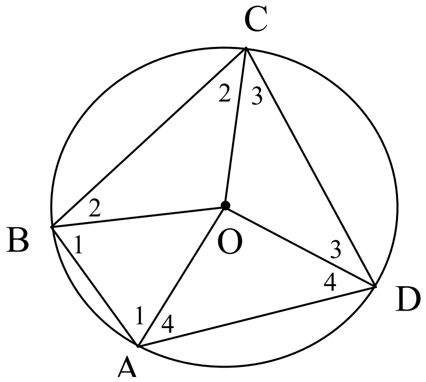


Рис. 35

Пусть $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность с центром в точке O. Для определенности будем считать, что центр O лежит внутри четырехугольника (рис. 35).

Искомое свойство может быть получено в результате следующего рассуждения. Соединив точку О с вершинами четырехугольника, получим четыре равнобедренных треугольника OAB, OBC, OCD и ODA. Используя свойство углов равнобедренного треугольника, отметим равные углы и сравним суммы пар противоположных углов четырехугольника, то есть величины $\angle A + \angle C$ и $\angle B + \angle D$. Наше рассуждение завершается следующим ***итогом:*** в выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, суммы пар противоположных углов равны.

Напомнив учащимся, что сумма углов четырехугольника равна $360°$, учитель вправе рассчитывать на то, что они самостоятельно сформулируют полученный вывод в виде теоремы.

Теорема 1. Во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180°.

Рассмотренное выше рассуждение позволит учащимся без труда выделить условие и заключение теоремы.

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник,
вписан в окружность.

Доказать: $\angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle D$.

Целесообразно предложить учащимся самостоятельно рассмотреть два способа доказательства теоремы. Первый способ основывается на использовании теоремы о вычислении вписанного угла. Во втором способе используется дополнительное построение – проведение касательной к окружности. С помощью этого построения нетрудно показать, что два противоположных угла четырехугольника составляют развернутый угол. В процессе доказательства применяются теоремы о вычислении угла, вписанного в окружность, и угла, образованного касательной и хордой. Поскольку доказательства не вызывают трудностей у учащихся, позволим себе воспользоваться приемом древних, выраженным словом «смотри», то есть проиллюстрируем оба способа доказательства лишь чертежами.

Доказательство 1 **Доказательство 2**

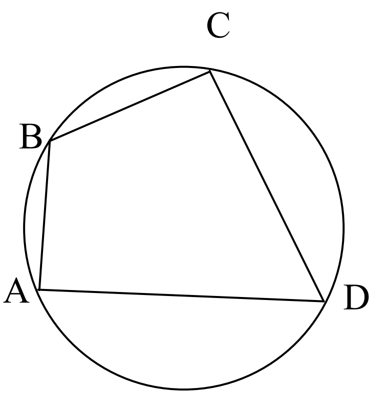


Рис. 36

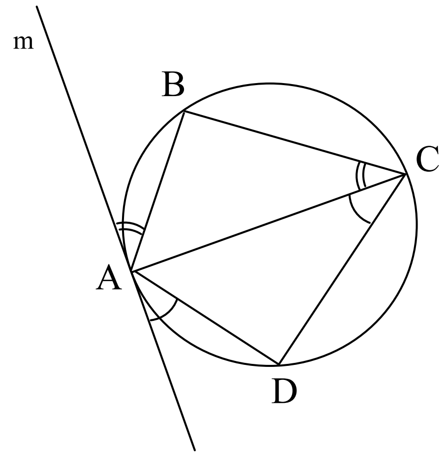


Рис. 37

Отметим, что наше неполное рассуждение о равнобедренных треугольниках, предшествующее получению теоремы, можно дополнить и превратить в еще одно – третье доказательство теоремы.

Заканчивая изучение теоремы 1, необходимо обсудить один принципиальный вопрос, который мы сформулируем в нескольких модификациях: 1) Насколько важно требование выпуклости четырехугольника, выделенное в условии теоремы? 2) В каком месте доказательства используется выпуклость четырехугольника? 3) Останется ли теорема справедливой, если четырехугольник не является выпуклым?

После того, как теорема 1 изучена, естественным образом возникает задача ***изучения других свойств*** четырехугольников, вписанных в окружность. Для этого проведем диагонали AC и BD во вписанном четырехугольнике и предложим учащимся сравнить углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поскольку они равны, мы получим серию равенств: $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle ADB$ и др.

Поскольку к моменту изучения теорем у учащихся уже накоплен достаточный геометрический опыт, уместно поставить вопрос: «Будут ли рассмотренные свойства достаточными условиями для того, чтобы четырехугольник являлся вписанным в окружность?» Расчет учителя состоит в том, что учащиеся уже неоднократно пользовались понятием «обратная теорема» и смогут самостоятельно сформулировать теорему, обратную для только что доказанной.

Теорема 2 (*обратная*). Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполняется одно из условий: а) сумма противоположных углов равна $180°$; б) $\angle ABD = \angle ACD$. Тогда около такого четырехугольника можно описать окружность.

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник;

а) $\angle A + \angle C = 180° = \angle B + \angle D$;

б) $\angle ABD = \angle ACD$.

Доказать: $ABCD$ можно вписать в окружность.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABD, около которого всегда можно описать окружность. Чтобы доказать, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным, достаточно убедиться, что точка C принадлежит построенной окружности. Воспользуемся методом от противного и предположим, что это не так. Тогда точка C может либо лежать вне окружности, либо лежать внутри неё.

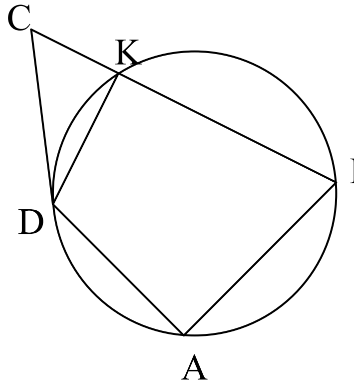


Рис. 38а

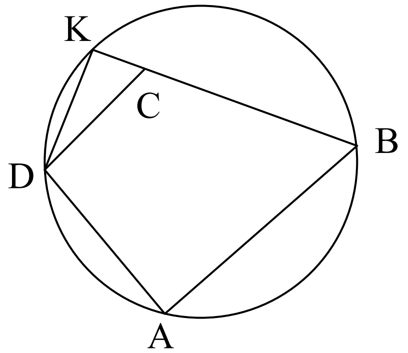


Рис. 38б

Пусть точка C лежит вне окружности. Тогда прямая BC пересекает окружность в некоторой точке K. При этом K принадлежит отрезку BC (рис. 38а), а значит, четырехугольник $ABKD$ – вписанный, так что имеет место соотношение

$$\angle BAD + \angle BKD = 180° \qquad (1)$$

Угол BKD является внешним для треугольника DKC, откуда $\angle BKD > \angle C$, так как внешний угол треугольника больше внутреннего, несмежного с ним. Учитывая соотношение (1), получим, что $\angle BAD + \angle C < 180°$, а это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно.

Если допустить, что точка C лежит внутри окружности (рис. 38б), то, рассуждая аналогично, получим неравенство $\angle BKD < \angle C$, значит, $\angle BAD + \angle C > 180°$. Как и в предыдущем случае, получено противоречие с условием теоремы. Значит, имеет место третий случай – точка C лежит на окружности, то есть $ABCD$ – вписанный в окружность четырехугольник.

Доказательство для случая (б) основано на использовании признаков подобия треугольников и утверждения пункта (а).

После изучения обратной теоремы естественно провести ***исследование.*** Вместо выпуклого четырехугольника $ABCD$ рассмотрим четыре точки A, B, M, K и выясним, при каких условиях эти четыре точки принадлежат одной окружности. Интуитивно, учитывая ранее доказанные достаточные условия, обеспечивающие наличие окружности, описанной около выпуклого четырехугольника, можно высказать гипотезу, что утверждения, аналогичные сформулированным в теореме 2, могут быть высказаны и для четырех точек плоскости.

Теорема 3. Пусть для четырех точек плоскости A, B, M и K выполняется одно из условий: 1) точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и сумма углов $\angle AMB$ и $\angle AKB$ равна $180°$; 2) точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и $\angle AMB = \angle AKB$. Тогда точки A, B, M, K принадлежат одной окружности.

В том случае, когда углы AMB и AKB являются прямыми, получаем следствие из теоремы.

Следствие. Если для четырех точек плоскости A, B, M и K выполняется условие $\angle AMB = \angle AKB = 90°$, то точки лежат на окружности диаметра AB.

При решении геометрических задач ученики чаще всего испытывают затруднения в том случае, когда необходимо ввести в рассуждение дополнительные элементы, о которых в условии задачи речь не идет. Им отнюдь не просто выполнить рациональное дополнительное построение. Выработке такого навыка способствуют опыт и внимательный анализ тех геометрических конструкций, которые заданы в условии задачи. В том случае, когда в ходе решения возникает потребность сравнить углы или доказать их равенство, окружность может быть использована в качестве дополнительного элемента. В теореме 3 выделены условия, обеспечивающие возможность введения *вспомогательной окружности*. Иногда этот шаг быстро приводит к достижению цели.

Поскольку класс задач, в решение которых дополнительно вводится окружность, достаточно широк, то говорят о *методе вспомогательной окружности.* Проиллюстрируем использование метода вспомогательной окружности при решении следующей задачи.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. На высоте AA_1 выбрана такая точка D, что $A_1D = B_1D$. Точка E – середина стороны AB. Докажите, что точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности.

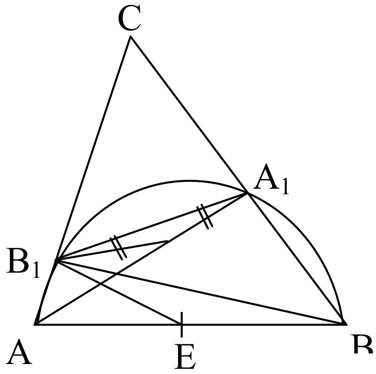


Рис. 39

Для доказательства того, что четыре точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности, достаточно показать выполнение хотя бы одного из условий теоремы 3. Исходя из условия задачи, выясним наличие равных углов в заданной ситуации. По условию $B_1D = A_1D$, следовательно, ΔB_1DA_1 является равнобедренным, и, значит, $\angle B_1A_1D = \angle A_1B_1D$. Угол B_1DA является внешним для ΔB_1DA, отсюда

$$\angle B_1DA = 2\angle B_1A_1A \qquad (2)$$

Треугольник AB_1B является прямоугольным и имеет гипотенузу AB, причем точка E – её середина. Согласно свойству медианы, проведенной из вершины прямого угла, $B_1E = BE$, следовательно, треугольник B_1EB – равнобедренный, и по свойству внешнего угла

$$\angle AEB_1 = 2\angle ABB_1 \qquad (3)$$

Четыре точки A, B_1, D и E расположены так, что точки E и D лежат по одну сторону от прямой AB_1. Согласно теореме 3 (условие

2) достаточно доказать, что $\angle B_1DA = \angle B_1EA$, и в этом случае задача будет решена. В силу соотношений (2) и (3) это равенство равносильно другому равенству: $\angle B_1A_1A = \angle B_1BA$.

Для доказательства последнего равенства рассмотрим два прямоугольных треугольника AB_1B и AA_1B с общей гипотенузой AB. Согласно следствию из теоремы 3 точки A, B_1, A_1 и B лежат на одной окружности с диаметром AB. Введем в рассуждение вспомогательную окружность с центром в точке E. Тогда углы $\angle B_1A_1A$ и $\angle B_1BA$ являются вписанными и равными, так как опираются на одну и ту же дугу.

Итак, из равенства $\angle B_1A_1A = \angle B_1AB$ следует, что $\angle B_1DA = \angle B_1EA$, а значит, точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности.

8. Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Мотивация 1. Формирование мотивов к изучению данного признака естественно начать с анализа определения: прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она пересекает эту плоскость и перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. Если мы попытаемся применить данное определение для проверки перпендикулярности конкретной прямой и конкретной плоскости, нам придется убедиться в том, что изучаемая прямая перпендикулярна *всем* прямым, проходящим через точку пересечения прямой и плоскости. Следовательно, придется сделать *бесконечное* количество проверок. Очевидно, что это затруднительно. Было бы естественно получить теорему, которая упростила бы ситуацию и позволяла делать *конечное* количество проверок. Кстати, на начальном этапе анализа ситуации не ясно, каким должно быть то минимальное количество проверок, которое гарантирует перпендикулярность прямой и плоскости.

Выполним следующую практическую работу (рис. 40 а, б).

На плоскости α выберем точку A и проведем через неё несколько прямых n_1, n_2, n_3 и т.д., принадлежащих ей. Воспользуемся угольником и приложим его к одной из этих прямых, например, n_1, так, чтобы вершина прямого угла совпала с точкой A, а один из катетов лежал на прямой n_1. Ясно, что второй катет угольника обязательно перпендикулярен прямой n_1, независимо от того, принадлежит ли он плоскости α или же располагается вне ее. Очевидно, однако, что он не будет перпендикулярен любой прямой, лежащей в плоскости, а значит, и самой плоскости. Отсюда следует, что одной проверки явно недостаточно (рис. 40а). Возьмем второй угольник и расположим его так, чтобы вершина прямого угла также совпала с точкой A, один из катетов лежал на прямой n_2, а второй катет нового угольника совпал с катетом первого угольника, который не принадлежит плоскости α. Рассматривая полученную конструкцию и пользуясь глазомером, можно предположить, что общий катет двух угольников будет перпендикулярен плоскости α (рис. 40б). Естественно, что это утверждение требует доказательства.

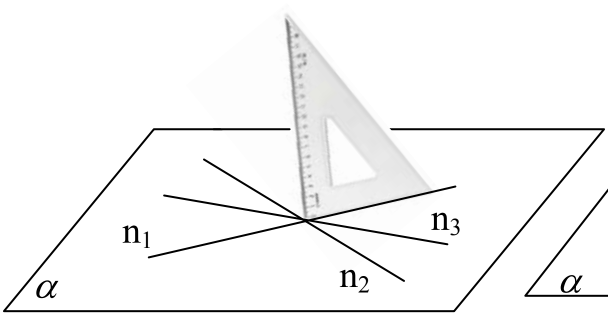


Рис. 40а

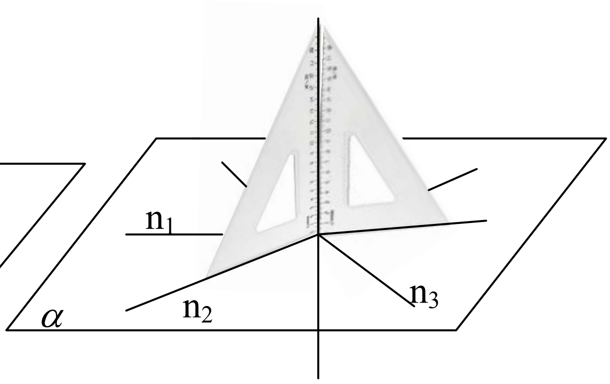


Рис. 40б

Приведем пример из жизни, подтверждающий наше предположение. Известно, что, устанавливая новогоднюю елку, используют деревянную крестовину, которая с геометрической точки зрения представляет собой два пересекающихся отрезка. Ствол елки располагают в точке пересечения брусков крестовины перпендикулярно каждому из них. В этом случае ствол елки перпендикулярен плоскости пола. Фактически мы имеем ту же конструкцию, что на рис. 40б: два пересекающихся бруска крестовины принадлежат двум прямым, лежащим в плоскости пола; ствол елки – прямая, перпендикулярная каждой из этих прямых и проходящая через точку их пересечения. Этот житейский пример подтверждает математическую гипотезу: чтобы доказать перпендикулярность прямой и плоскости, достаточно убедиться в перпендикулярности этой прямой двум пересекающимся прямым этой плоскости. Другими словами, для доказательства перпендикулярности достаточно двух проверок. Здесь уместно предложить учащимся привести другие примеры из окружающей действительности, в которых можно видеть практическое использование высказанной гипотезы.

Мотивация 2. Для получения гипотезы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости, с учащимися можно рассмотреть задачу на доказательство перпендикулярности прямой и плоскости с помощью вычислений, используя простейшую фигуру – тетраэдр, у которого плоские углы при одной из вершин являются прямыми.

Задача. Дан тетраэдр $OABC$, в котором плоские углы при вершине O – прямые и $OA = OB = OC = a$ (рис. 41). Докажите, что прямая OC перпендикулярна плоскости (OAB).

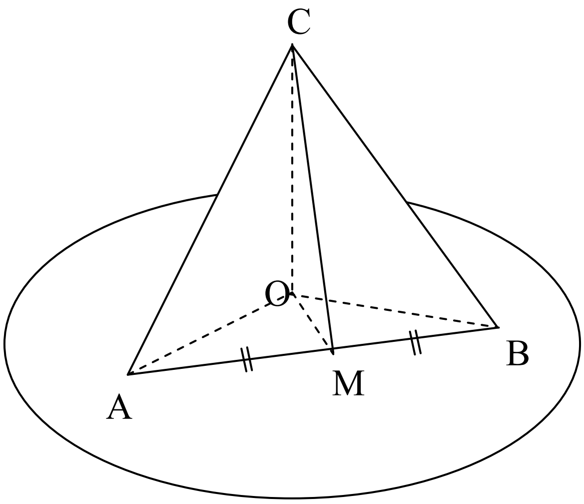


Рис. 41

Решение. Для доказательства перпендикулярности прямой и плоскости достаточно показать, что прямая OC перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости (OAB). Для простоты вычислений в качестве произвольно взятой прямой n выберем ту, которая проходит через вершину O и середину M ребра AB. Докажем, что прямые OC и OM взаимно перпендикулярны, то есть что ΔCOM является прямоугольным.

Выразим длины сторон треугольника COM через a. Грань ABC тетраэдра – равносторонний треугольник со стороной равной $a\sqrt{2}$. Отрезок CM является медианой этого равностороннего треугольника, и его длина равна $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Отрезок OM является медианой прямоугольного равнобедренного треугольника AOB, проведенной из вершины прямого угла, откуда $OM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Проверим истинность «пифагоровского» равенства для сторон треугольника COM. Прямым вычислением получаем, что $OC^2 + OM^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{3a^2}{2} = CM^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, получаем, что треугольник COM является прямоугольным и имеет прямой угол при вершине O. Следовательно, $CO \perp OM$.

Естественно, что в качестве прямой n можно взять произвольную прямую, проходящую через точку O и пересекающую прямую AB в точке M', а затем для треугольника COM' провести аналогичные рассуждения. Оставляем эту проверку для самостоятельного упражнения.

Итог решения предложенной задачи – высказывание учащимися гипотезы и формулировка признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Выделение условия и заключения теоремы не вызывает затруднений и фактически сводится к введению обозначений и выполнению построения, соответствующего условию теоремы.

Дано: 1) α – плоскость, a, b, p – прямые, $a \cap b = A$;

2) $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $p \notin \alpha$, $p \perp a$, $p \perp b$.

Доказать: $p \perp \alpha$ (или $p \perp n$ для любой прямой $n \subset \alpha$).

Доказательство 1. При проведении доказательства можно рассматривать лишь те прямые плоскости, которые проходят через точку пересечения прямой и плоскости (рис. 42а).

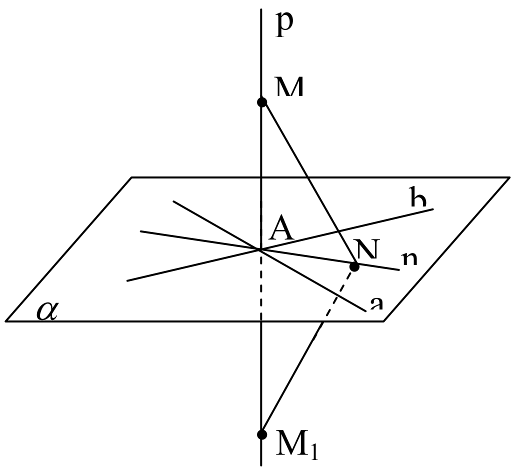


Рис. 42а

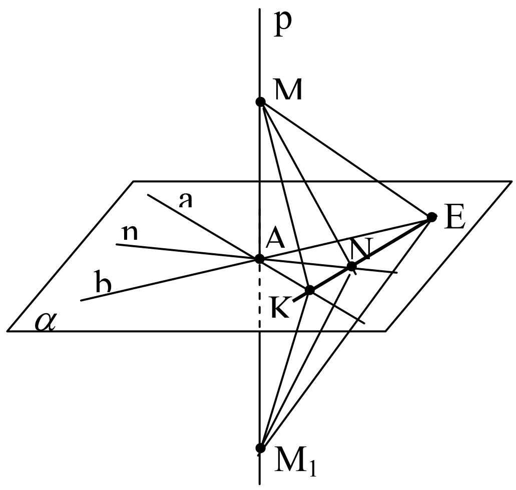


Рис. 42б

Пусть $A \in p$. Пусть n – произвольная прямая плоскости α и $A \in n$. Достаточно доказать, что смежные углы, образованные при пересечении прямых p и n, равны; в этом случае $p \perp n$.

Известно, что два угла равны, если они являются 1) соответственными углами равных треугольников; 2) углами при основании равнобедренного треугольника; 3) углами, образованными проведением медианы к основанию равнобедренного треугольника. Таким образом, необходимо включить смежные углы, образованные при пересечении прямых n и p, в треугольники.

Выберем на прямой p две различные точки M и M_1 (рис. 42б), равноудаленные от точки A. Выберем на прямой n произвольную точку N. Треугольники MAN и M_1AN содержат интересующие нас смежные углы. Равенство углов MAN и M_1AN могло бы следовать из равенства треугольников MAN и M_1AN, в которых $AM = AM_1$, AN – общая сторона. Значит, для равенства треугольников достаточно доказать равенство третьих сторон, то есть отрезков MN и M_1N.

Включим отрезки MN и M_1N в другие треугольники. Для этого проведем в плоскости α через точку N прямую m так, что $m \cap a = K$, $m \cap b = E$. Треугольники MKM_1 и MEM_1 являются равнобедренными по признаку равнобедренного треугольника, следовательно, $MK = M_1K$ и $ME = M_1E$.

Рассмотрим треугольники KME и KM_1E. Они равны по третьему признаку равенства треугольников, а значит, $\angle MEK = \angle M_1EK$ и $\angle MKE = \angle M_1KE$. Выделим треугольники, которые содержат отрезки MN и M_1N в качестве сторон. Это, например, треугольники MEN и M_1EN. Они равны по второму признаку равенства треугольников, поскольку $ME = M_1E$, EN – общая сторона и $\angle MEN = \angle M_1EN$. Из равенства последней пары треугольников следует, что $MN = M_1N$. Отсюда следует, что $\Delta MAN = \Delta M_1AN$, а значит, $\angle MAN = \angle M_1AN$. Заметим, что эти углы являются смежными при пересечении прямых p и n, следовательно, $p \perp n$. Поскольку n – *произвольная* прямая плоскости α, то по определению прямая p перпендикулярна плоскости α.

На последнем этапе доказательства можно рассуждать несколько иначе: если $MN = M_1N$, то треугольник MNM_1 является равнобедренным с медианой NA. Однако в равнобедренном треугольнике медиана является высотой, то есть $p \perp n$.

Случай $A \notin p$ легко сводится к случаю $A \in p$ с помощью определения угла между скрещивающимися прямыми.

В заключение работы над доказательством теоремы целесообразно выделить его основные логические шаги.

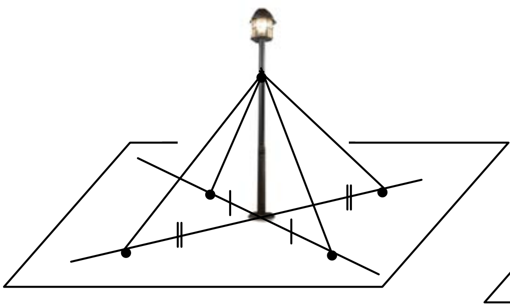


Рис. 43

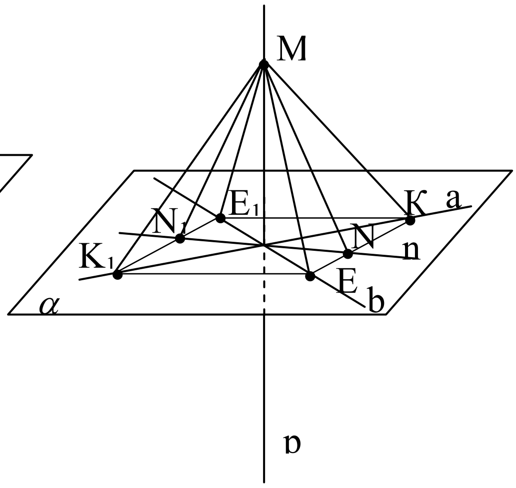


Рис. 44

1. Выполните дополнительные построения:

- на прямой p отложите от точки A равные отрезки AM и AM_1;
- в плоскости α проведите прямую m, пересекающую прямые a, b, n в точках K, E и N соответственно.

2. Докажите, что треугольники MKM_1 и MEM_1 – равнобедренные, запишите следствия.

3. Докажите равенство треугольников MKE и M_1KE, выведите следствия.

4. Докажите равенство треугольников MEN и M_1EN, выведите следствия.

5. Докажите равенство треугольников MAN и M_1AN, сделайте вывод.

Доказательство 2 целесообразно предварить примером из практики. Желая закрепить в вертикальном положении неглубоко врытый в землю столб, его оттягивают двумя парами оттяжек. Аналогично, при установке мачты на корабле перпендикулярно плоскости палубы её закрепляют двумя парами канатов (рис. 43).

Это наводит на мысль, что все наши построения можно проводить по одну сторону от плоскости α.

Выполним дополнительные построения:

- выберем на прямой p произвольную точку M;
- на прямой a отложим равные отрезки AK и AK_1;
- на прямой b отложим равные отрезки AE и AE_1;
- соединим точку M с точками K, K_1, E, E_1 (рис. 44).

В результате построения возникает четырехугольник KEK_1E_1, диагонали которого делятся пополам точкой их пересечения и который, следовательно, является параллелограммом.

Рассмотрим прямую n в плоскости α, которая проходит через точку A и пересекает прямые KE и K_1E_1 в точках N и N_1 соответственно. Чтобы убедиться в перпендикулярности прямых p и n, достаточно доказать, что треугольник NMN_1 является равнобедренным и отрезок MA является его высотой, проведенной к основанию. Для этого достаточно доказать равенства отрезков $MN = MN_1$ и $AN = AN_1$. Далее, как и в предыдущем доказательстве, рассуждения сводятся к рассмотрению цепочки равных треугольников. Предоставляем читателю самостоятельно завершить доказательство.

Доказательство 3 проводится векторным методом. На наш взгляд, оно проще, чем два предыдущих доказательства. При рассмотрении векторного метода в стереометрии его полезно предложить учащимся в качестве задачи на доказательство.

Чтобы использовать векторный метод, переведем условие теоремы на язык векторной алгебры. Для этого на прямых a, b, p и n отложим от точки A векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{p}$ и $\overline{n}$ соответственно (рис. 45). Условия $a \perp p$ и $b \perp p$ можно выразить с помощью скалярного произведения векторов: $\overline{a} \bullet \overline{p} = 0$ и $\overline{b} \bullet \overline{p} = 0$. Поскольку векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не коллинеарны, а векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{n}$ компланарны, имеет место векторное равенство $\overline{n} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$, где α и β – числа.

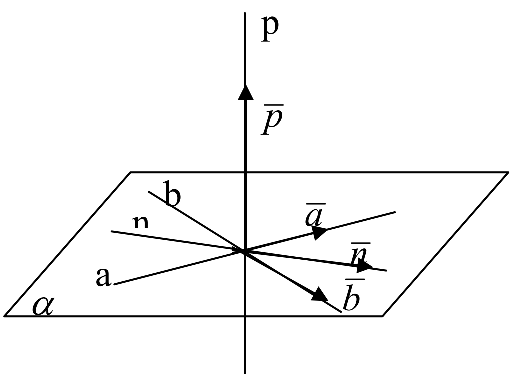


Рис. 45

Вычисляя скалярное произведение векторов $\overline{n}$ и $\overline{p}$, получаем, что $\overline{n} \bullet \overline{p} = (\alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) \bullet \overline{p} = \alpha(\overline{a} \bullet \overline{p}) + \beta(\overline{b} \bullet \overline{p}) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$. Скалярное произведение ненулевых векторов $\overline{n}$ и $\overline{p}$ равно нулю, следовательно, угол между ними равен 90°, то есть прямые n и p взаимно перпендикулярны.

9. Расстояние между скрещивающимися прямыми

В школьном курсе геометрии рассматриваются расстояния между различными объектами: между двумя точками; между точкой и фигурой; между двумя фигурами; между точкой и прямой; между точкой и плоскостью; между двумя прямыми – параллельными или скрещивающимися; между прямой и параллельной ей плоскостью; между параллельными плоскостями.

Особое внимание в курсе стереометрии уделяется нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми.

Мотивация изучения данной темы достигается путем *создания проблемной ситуации*. Учащимся предлагается решить две задачи.

Задача 1. На горизонтальной плоскости задана прямая, а на прямой – две точки. Обе точки одновременно стали удаляться с одинаковой скоростью от этой плоскости по прямолинейной траектории: первая точка вертикально, а вторая – нет. Выясните, какая из точек окажется ближе к заданной прямой и к заданной плоскости спустя некоторое время.

Задача 2. На горизонтальной плоскости заданы три прямые a, b и c. Прямые a и b параллельны между собой. Обе эти прямые стали удаляться с одинаковой скоростью от этой плоскости, двигаясь параллельно самим себе: прямая a – вертикально, а прямая b – нет. Выясните, какая из прямых (a или b) окажется ближе к прямой c спустя некоторое время.

Для решения первой задачи школьникам достаточно применить знания о расстоянии от точки до прямой, от точки до плоскости и уметь сравнивать длины перпендикуляра и наклонной к плоскости, проведенных из одной точки. При решении второй задачи они сталкиваются с проблемой нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми (после начала движения прямые a и c, а также прямые b и c будут скрещивающимися).

Чтобы определение расстояния между скрещивающимися прямыми и приемы его нахождения были осознаны учащимися, целесообразно привлечь их к конструированию определения и выделению приемов нахождения расстояния.

Задача 3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AA_1 = a$, $AB = b$, $AD = c$ (рис. 46). Найдите расстояние между:

а) точкой A_1 и плоскостью (ABC);

б) точкой D и плоскостью (ABB_1);

в) прямой AD и плоскостью (BCC_1);

г) прямой AD и плоскостью $(A_1B_1C_1)$;

д) прямой AB_1 и плоскостью (DCC_1);

е) плоскостями (ABC) и $(A_1B_1C_1)$.

При ***актуализации*** знаний о нахождении расстояний между параллельными плоскостями, от любой фигуры, лежащей в одной из параллельных плоскостей, до другой плоскости, между параллельными прямой и плоскостью учитель подводит школьников к выводу о том, что в каждом из разобранных случаев *расстояние – это длина общего перпендикуляра рассматриваемых объектов*.

Естественным образом, *по аналогии*, появляется представление о том, что за расстояние между скрещивающимися прямыми целесообразно принять длину их общего перпендикуляра, если, конечно, таковой существует.

Определение 1. *Общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на данных прямых и перпендикулярный к каждой из них.

Задача 4. На рис. 46 укажите пары скрещивающихся прямых и общий перпендикуляр для каждой пары.

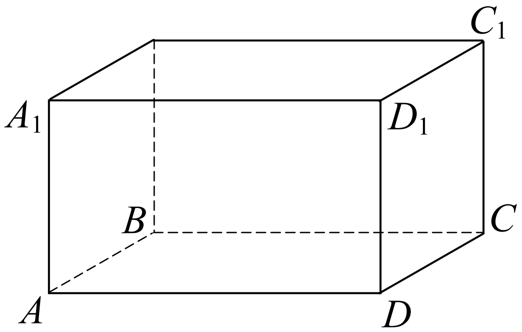


Рис. 46

Следующая теорема отвечает на два важных вопроса: 1) Для каждой ли пары скрещивающихся прямых можно построить общий перпендикуляр? 2) Если да, то сколько их существует?

Теорема. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Чтобы школьники принимали активное участие в доказательстве, следует уделить внимание ***выделению условия*** и ***заключения теоремы***.

Дано: $a \dot{-} b$ (a и b – скрещивающиеся прямые).

Доказать: 1) существует отрезок $[AB]$, $A \in a$, $B \in b$ такой, что: а) $[AB] \perp a$, $[AB] \perp b$; б) $[AB] \perp \alpha$, $[AB] \perp \beta$, где $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ и $\alpha \parallel \beta$.
2) $[AB]$ – единственный.

Следует разъяснить учащимся, что для доказательства существования отрезка AB достаточно указать способ его построения.

Доказательство *существования общего перпендикуляра*.

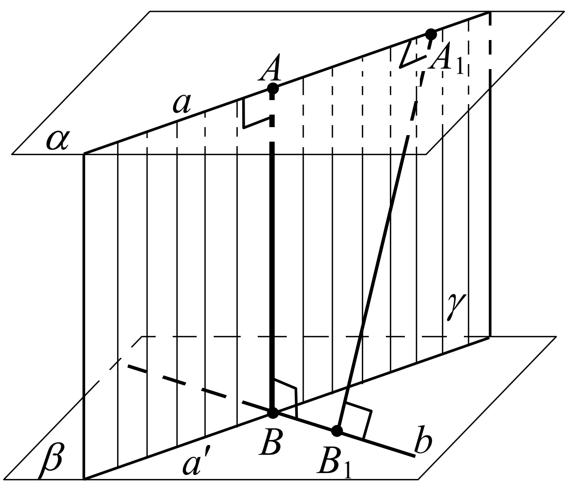


Рис. 47

1. Построим плоскости α и β, такие, что $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ и $\alpha \parallel \beta$ (рис. 47).

2. Построим плоскость γ: $a \subset \gamma$, $\gamma \perp \beta$. Тогда $\gamma \cap \beta = a'$. Так как $\alpha \parallel \beta$, то $a' \parallel a$.

3. Пусть $a' \cap b = B$. Точка B является ортогональной проекцией на плоскость β некоторой точки A прямой a. Следовательно, $[AB] \perp \beta$, откуда $[AB] \perp b$ и $[AB] \perp a'$.

4. Так как $[AB] \perp a'$ и $a' \parallel a$, то $[AB] \perp a$.

5. Так как $[AB] \perp \beta$ и $\alpha \parallel \beta$, то $[AB] \perp \alpha$.

6. $[AB]$ – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых a и b, а также параллельных плоскостей α и β, содержащих прямые a и b.

Доказательство *единственности общего перпендикуляра прямых a и b* (*метод от противного*).

1. Предположим, что существует другой общий перпендикуляр прямых a и b, например, отрезок A_1B_1, причем $A_1 \in a$, $B_1 \in b$ (рис. 47).

2. Так как $[A_1B_1] \perp a$ и $a_1 \parallel a$, то $[A_1B_1] \perp a'$. По условию $[A_1B_1] \perp b$, причем прямые a' и b пересекаются. Тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что $[A_1B_1] \perp \beta$.

3. Имеем: $[AB] \perp \beta$ и $[A_1B_1] \perp \beta$, откуда $[AB] \parallel [A_1B_1]$. Это означает, что точки A, B, A_1 и B_1 и, следовательно, данные скрещивающиеся прямые a и b лежат в одной плоскости, что противоречит определению скрещивающихся прямых.

4. Допущение неверно. Итак, общий перпендикуляр прямых a и b является единственным.

После доказательства теоремы вводится определение расстояния между скрещивающимися прямыми.

Определение 2. *Расстоянием между скрещивающимися* прямыми называется длина их общего перпендикуляра.

Для прямого ***применения*** определения и теоремы можно предложить следующую задачу.

Задача 5. Найдите расстояние между противолежащими ребрами правильного тетраэдра, длина ребра которого равна 1.

Решение. Так как $AB \subset (ABC)$, $SC \cap (ABC) = C$, $C \notin AB$, то по признаку скрещивающихся прямых AB и SC – скрещивающиеся.

I. *Построение общего перпендикуляра к прямым AB и SC.*

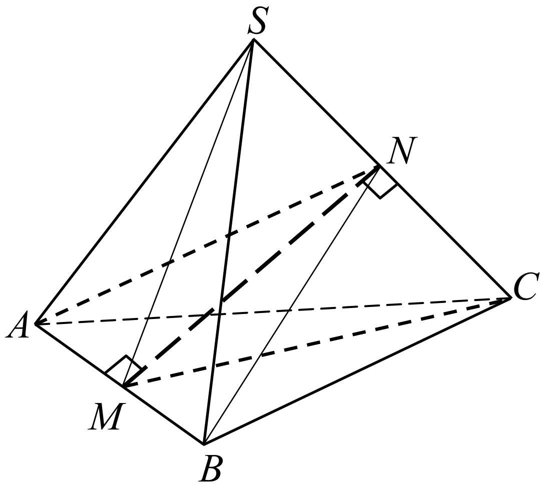


Рис. 48

1. M – середина отрезка AB.
2. N – середина отрезка SC.
3. $[MN]$ – искомый отрезок.

II. *Доказательство.* 1. ΔANB – равнобедренный ($AN = BN$ как медианы равных треугольников ASC и BSC), в котором NM – медиана и, следовательно, высота. Тогда $NM \perp AB$.

2. Аналогично из равнобедренного треугольника SMC получаем, что $MN \perp SC$.

3. Делаем вывод: отрезок MN – общий перпендикуляр к прямым AB и SC.

III. *Вычисление длины отрезка MN.* 1. ΔASC: $AN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

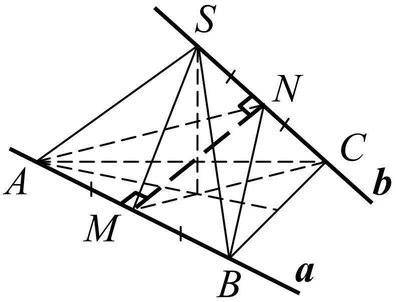
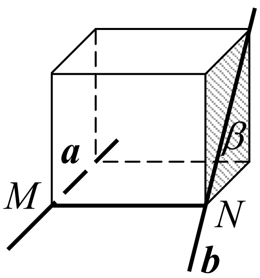
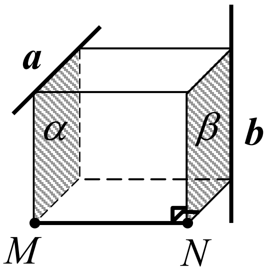
2. ΔAMN: $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

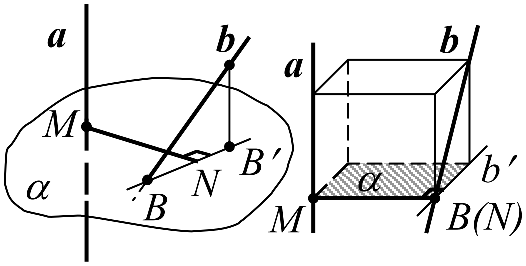
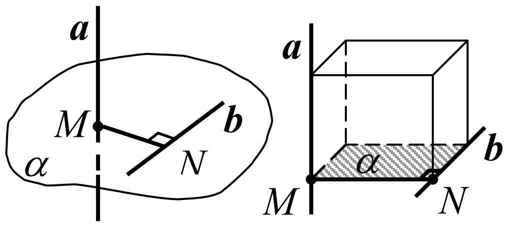
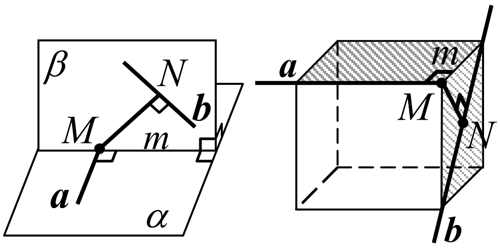
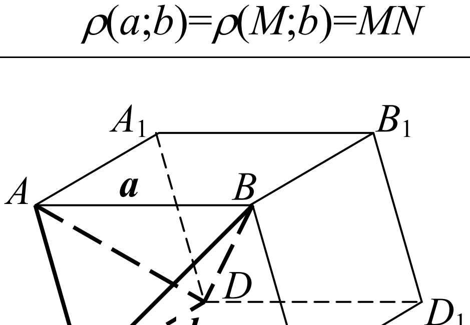
$\rho(AB; SC) = MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Стоит заметить, что задача на построение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым требует весьма кропотливой работы. В то же время при нахождении расстояния между скрещивающимися прямыми часто и нет необходимости строить их общий перпендикуляр. Достаточно бывает лишь увидеть (провести) более подходящий отрезок, длина которого будет искомым расстоянием.

Осуществляя деятельностный подход в обучении, целесообразно систематизировать знания учащихся, выделив приемы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми.

Основные приемы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми a и b

$SABC$ – правильный тетраэдр  $a \dot{-} b$, $\rho(a;b) = \rho(AB;CS) = MN$	1. Построить общий перпендикуляр к прямым a и b (его изображение на плоскости) и вычислить его длину. Используя *векторный* метод, достаточно предположить, что MN – общий перпендикуляр к прямым a и b, выбрать векторный базис, разложить вектор $\overrightarrow{MN}$ по базисным векторам. Из условий $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ и $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{SC}=0$ найти коэффициенты разложения $\overrightarrow{MN}$ по базисным векторам, а затем и длину вектора $\overrightarrow{MN}$
 $a \dot{-} b$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, N – проекция M на β; $\rho(a;b)=\rho(a;\beta)=\rho(M;\beta)=MN$ $M\left(x_0, y_0, z_0\right)$, $\beta: a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$	2. Через одну из скрещивающихся прямых провести плоскость, параллельную другой прямой. Найти расстояние от второй прямой до построенной плоскости (найти расстояние от любой точки второй прямой до ее ортогональной проекции на построенную плоскость). $$\rho = \frac{\left\| a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 \right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
 $a \dot{-} b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \parallel \beta$, $MN \perp \beta$; $\rho(a;b)=\rho(\alpha;\beta)=MN$	3. Через каждую из скрещивающихся прямых провести параллельные между собой плоскости и найти расстояние между ними (найти длину перпендикуляра, проведенного из произвольной точки одной плоскости к другой плоскости)

 $a \dot{-} b$, $\alpha \perp a$, $\alpha \cap a = M$, b' - проекция b на α, $MN \perp b'$; $\rho(a; b) = \rho(a; b') = MN$	4. Провести плоскость, перпендикулярную одной из двух данных скрещивающихся прямых, а затем найти расстояние от точки пересечения этой прямой с плоскостью до проекции другой прямой на ту же плоскость
$a \perp b \Rightarrow b' \equiv b$  $b \subset \alpha$, $\alpha \perp a$, $\alpha \cap a = M$, $MN \perp b$; $\rho(a;b) = MN$	4_1. Если скрещивающиеся прямые взаимно перпендикулярны, то через одну из этих прямых провести плоскость, перпендикулярную второй прямой, а затем найти расстояние от точки пересечения ее с плоскостью до первой прямой
 $a \dot{-} b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \perp \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, $a \perp m$, $a \cap m = M$, $MN \perp b$; $\rho(a;b) = \rho(M;b) = MN$	5. Если скрещивающиеся прямые принадлежат соответственно двум взаимно перпендикулярным плоскостям и одна из них перпендикулярна линии пересечения этих плоскостей, то провести через точку пересечения первой прямой с линией пересечения плоскостей перпендикуляр к другой прямой и найти длину соответствующего отрезка
 	6. Если на двух скрещивающихся прямых взяты точки A и B, C и D соответственно так, что объем пирамиды $ABCD$ равен V, $AB = a$, $CD = b$, $\varphi = \angle(AB;CD)$, то $\rho(AB;CD) = \dfrac{6V}{ab\sin\varphi}$

Применение на практике выделенных приемов требует от учащихся высокого уровня развития пространственного мышления, активности и гибкости мышления.

Рассмотрим одну из ***ключевых задач*** на вычисление расстояния между скрещивающимися прямыми. На ее примере покажем, как «работают» упомянутые приемы.

Задача 6. Найти расстояние между диагональю BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и ребром основания AD, если сторона куба равна a.

Решение. Так как $AD \subset (ABC)$, $BD_1 \cap (ABC) = B$ и $B \notin AD$, то по признаку скрещивающихся прямых AD и BD_1 – скрещивающиеся прямые ($AD \dot{-} BD_1$).

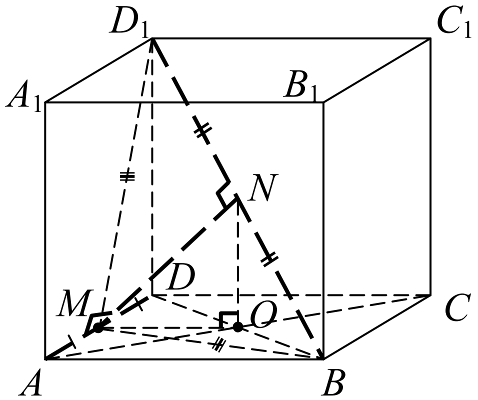


Рис. 49

I способ. Построим общий перпендикуляр к прямым AD и BD_1 (рис. 49) и найдем его длину (*прием* 1).

Пусть M – середина AD, N – середина BD_1. Докажем, что $MN \perp AD$ и $MN \perp BD_1$. $NO \perp (ABC)$, где $O = AC \cap BD$, MN – наклонная, MO – ее проекция на плоскость ABC и $MO \perp AD$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $MN \perp AD$.

В равнобедренном треугольнике BMD_1 медиана MN является высотой, т.е. $MN \perp BD_1$. Тогда $\rho = (AD; BD_1) = MN$.

Из прямоугольного треугольника MON $\left(MO = NO = \dfrac{a}{2}\right)$ находим, что $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

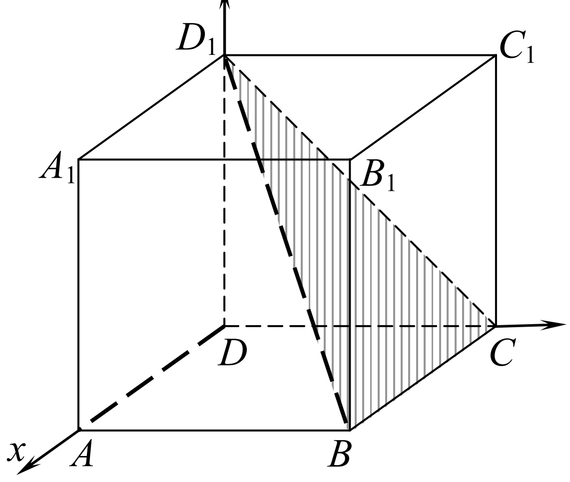


Рис. 50

II способ. Через одну из скрещивающихся прямых BD_1 и пересекающую ее прямую BC проведем плоскость α, параллельную второй прямой AD (рис. 50). $AD \parallel \alpha$, так как $AD \parallel BC$. В плоскости ABA_1 построен $AM \perp A_1B$, а в плоскости α – $MK \parallel BC$. MK – ортогональная проекция AD на плоскость α. Используя *прием 2*, имеем:

$$\rho(AD;BD_1)=\rho(AD;\alpha)=\rho(AD;MK)=AM.$$

Из прямоугольного треугольника A_1AB $\left(AA_1=AB=a\right)$ находим:

$$A_1B=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2} \text{ и } AM=\frac{1}{2}A_1B=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

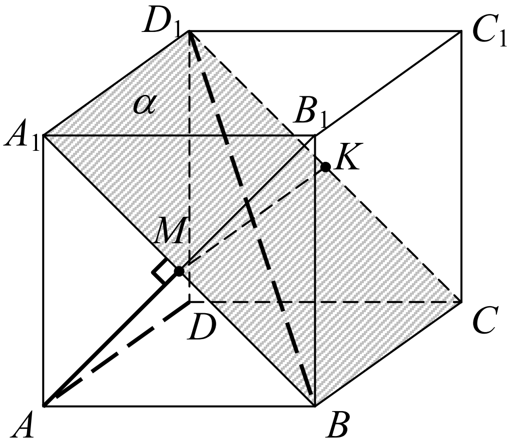


Рис. 51

III способ. Достаточно найти расстояние от любой точки прямой AD (возьмем точку D) до плоскости α $\left(BCD_1\right)$, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AD (*прием 2*), используя *координатный метод*.

Введем прямоугольную систему координат (рис. 51).

Составим уравнение плоскости BCD_1, проходящей через точки $D_1(0;0;a)$, $B(a;a;0)$ и $C(0;a;0)$.

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-a \\ a-0 & a-0 & 0-a \\ 0-0 & a-0 & 0-a \end{vmatrix}=0, \text{ откуда } a^2y+a^2z-a^3=0.$$

Далее по формуле $\rho=\dfrac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ найдем расстояние от точки $D(0;0;0)$ до плоскости $\left(BCD_1\right)$:

$$\rho=\frac{\left|0\cdot 0+a^2\cdot 0+a^2\cdot 0-a^3\right|}{\sqrt{0^2+a^4+a^4}}=\frac{a^3}{a^2\cdot\sqrt{2}}=\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}.$$

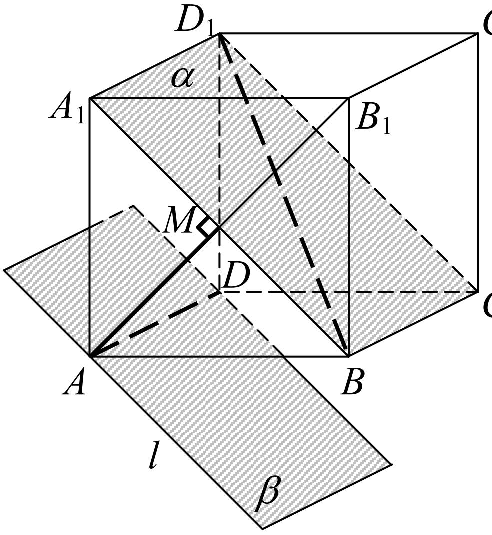


Рис. 52

IV способ. Пересекающиеся прямые A_1D_1 и A_1B определяют плоскость α, содержащую BD_1. В плоскости (ABA_1) через точку A проведем прямую l параллельно прямой A_1B (рис. 52). Пересекающиеся прямые l и AD определяют плоскость β. Так как $A_1D_1\|AD$ и $A_1B\|l$, то $\alpha\|\beta$ и $\rho(BD_1;AD)=\rho(\alpha;\beta)$ (*прием* 3).

Из точки A $\left(A\in\beta\right)$ в плоскости ABA_1 проведем $AM\perp A_1B$. Учитывая, что $\left(ABA_1\right)\perp\left(A_1BC\right)$, получаем: $AM\perp\alpha$.

Следовательно, $\rho(BD_1; AD) = \rho(\alpha; \beta) = AM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (см. способ II).

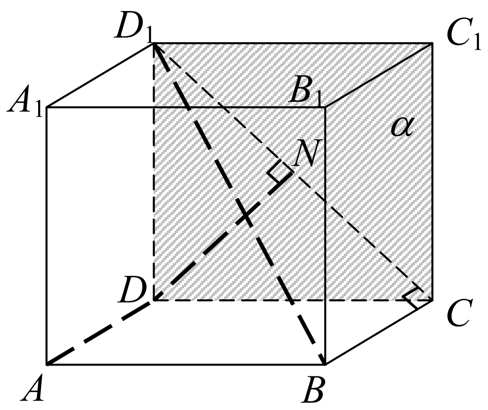


Рис. 53

V способ. Через точку D одной из скрещивающих прямых (AD) проведем плоскость α, перпендикулярную AD (рис. 53). На чертеже такая плоскость уже есть – α=(D_1DC). Так как в кубе $BC\perp\alpha$, а следовательно, $BC\perp CD_1$, то проекцией отрезка BD_1 на α является отрезок CD_1. Достаточно найти расстояние от точки D, точки пересечения прямой AD и плоскости α до проекции AD на α (*прием* 4):

$$\rho(BD_1; AD) = \rho(D; CD_1) = DN = \frac{1}{2}CD_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

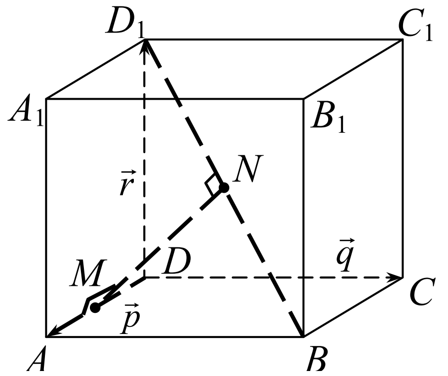


Рис. 54

VI способ (*векторный метод*). Пусть MN – искомый отрезок общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым AD и BD_1 (рис. 54). Для нахождения его длины (*прием* 1) запишем на «векторном языке» условия перпендикулярности прямых. Введем векторный базис.

Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{q}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{r}$, тогда $|\vec{p}| = |\vec{q}| = |\vec{r}| = a$.

Выразим вектор $\overrightarrow{MN}$ через базисные:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1N} = -x\vec{p} + \vec{r} + y\overrightarrow{D_1B} = -x\vec{p} + \vec{r} + y(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}) =$$
$$= (y-x)\vec{p} + (1-y)\vec{r} + y\vec{q}.$$

Так как $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{BD_1}$, то их скалярные произведения равны нулю, то есть $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ и $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{D_1B} = 0$. Из этого условия находим x и y, учитывая при этом, что $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$, $\vec{p} \cdot \vec{r} = 0$ и $\vec{q} \cdot \vec{r} = 0$.

$$\begin{cases} \left((y-x)\vec{p} + (1-y)\vec{r} + y \cdot \vec{q}\right) \cdot \vec{p} = 0, \\ \left((y-x)\vec{p} + (1-y)\vec{r} + y \cdot \vec{q}\right) \cdot \left(\vec{p} + \vec{q} - \vec{r}\right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases}(y-x)\vec{p}^{\,2}=0,\\(y-x)\vec{p}^{\,2}+y\vec{q}^{\,2}+(y-1)\vec{r}^{\,2}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}(y-x)\vec{a}^{\,2}=0,\\(3y-x-1)\vec{a}^{\,2}=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=x,\\x=3y-1;\end{cases}\quad\begin{cases}y=\dfrac{1}{2},\\x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{q}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{r}=\frac{1}{2}\vec{q}+\frac{1}{2}\vec{r}.$$

$$\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}|\vec{q}|\right)^2+\left(\frac{1}{2}|\vec{r}|\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

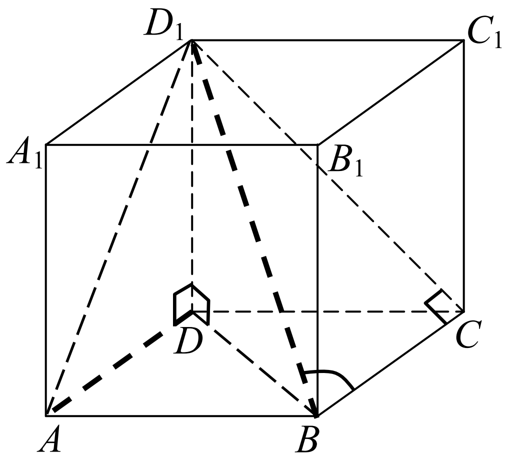


Рис. 55

VII способ. Рассмотрим пирамиду D_1ABD (рис. 55). Ребра AD и BD_1 лежат на скрещивающихся прямых. Применяя *прием 6*, расстояние между прямыми AD и BD_1 найдем по формуле: $\rho(AD;BD)=\dfrac{6\cdot V_{D_1ABD}}{AD\cdot BD_1\cdot\sin\varphi}$, где $\varphi=\angle\left(AD;BD_1\right)=\angle\left(BC;BD_1\right)$, так как $BC\parallel AD$.

$$BD_1=a\sqrt{3},\ V_{D_1ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot DD_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot a=\frac{a^3}{6}.$$

Угол между прямыми BC и BD_1 найдем из прямоугольного треугольника BCD_1: $\sin\varphi=\dfrac{CD_1}{BD_1}=\dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Тогда получаем: $\rho(AD;BD)=\dfrac{6\cdot\frac{1}{6}\cdot a^3}{a\cdot a\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Сравнивая различные способы решения задачи 6, можно отметить, что наиболее универсальным является векторно-координатный метод, а наиболее рациональным и алгоритмичным – метод, основанный на применении формулы с объемом пирамиды (к сожалению, с этим методом можно познакомить учащихся только после изучения темы «Объем пирамиды»). Показателем высокой математической культуры школьника будет классический способ решения задачи – нахождение длины общего перпендикуляра на основе чисто геометрических рассуждений.

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

10. Теорема Безу и количество корней многочлена

С точки зрения методики преподавания математики теорема Безу и связанный с нею материал интересны тем, что все утверждения могут быть получены школьниками практически самостоятельно путем ответов на вопросы учителя. Впрочем, эти вопросы должны быть правильно поставлены.

Теорема Безу основана на **теореме о делении с остатком:** для любого многочлена $f(x)$ и любого ненулевого многочлена $g(x)$ существуют и единственны многочлены $q(x)$ и $r(x)$, такие, что

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \tag{1}$$

где многочлен $r(x)$ либо равен нулю, либо имеет степень меньшую, чем $q(x)$.

Приведем систему вопросов учителя и ответов на них, отвлекаясь иногда на комментарии и математические определения. Мы надеемся, что читатель сочтет предполагаемые ответы учеников весьма вероятными.

Вопрос-1 (В-1). Какой вид примет теорема о делении с остатком, если делитель $g(x)$ является двучленом $x-\alpha$?

Ответ-1 (О-1). Существуют и единственны многочлен $q(x)$ и число r, такие, что

$$f(x) = (x-\alpha)q(x) + r. \tag{2}$$

В-2. Нельзя ли подобрать какое-либо *особое* значение переменного x, подстановка которого в равенство (2) *упростит* это равенство?

О-2. При $x=\alpha$ получим, что

$$f(\alpha) = r \tag{3}$$

В-3. Нельзя ли выразить равенство (3) в словесной форме, сведя к минимуму использование математических символов?

Мы предполагаем, что этот вопрос может вызвать затруднения. Действительно, на уроке математики учащиеся психологически ориентированы на то, что в своих рассуждениях они должны использовать математические объекты: определения, теоремы, формулы, правила, символы и т.п. Вопрос заставляет их «переключиться» на использование гуманитарных, лингвистических терминов, что неожиданно для них. Для облегчения предполагаемых трудностей можно использовать два дополнительных вопроса.

В-4. Что представляет собой символ $f(\alpha)$?

О-4. Значение многочлена в точке α.

В-5. Что представляет собой число r? Если затрудняетесь ответить, обратитесь к равенству (2).

О-5. Это остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x-\alpha$.

В-6. Изменим Вопрос 3: используя Ответы 4 и 5, выразите равенство (3) в словесной форме, сведя к минимуму использование математических символов.

О-6. Остаток от деления многочлена на двучлен $x-\alpha$ равен значению многочлена в точке α.

Ответ 6 является **теоремой Безу**! Для нас важно, что этот результат получен учащимися в значительной мере самостоятельно. Конечно, они пока не умеют ставить нужные вопросы, но уже умеют во многих случаях давать правильные ответы.

Здесь важно сопоставить традиции учебной деятельности школьников с практикой работы математиков. Как правило, школьникам сначала приводят формулировку теоремы, а затем доказывают ее. В работе математиков все происходит в обратном порядке: формулировка теоремы появляется в результате тех или иных действий, как правило, достаточно сложных, и лишь впоследствии подкрепляется доказательством. Приведенные выше вопросы представляют собой попытку сблизить учебную деятельность школьников с исследовательской деятельностью математиков.

Продолжим наши вопросы.

В-7. Нельзя ли уточнить равенство (2), используя Ответ 6?

О-7. Равенство (2) примет вид

$$f(x)=(x-\alpha)q(x)+f(\alpha). \tag{4}$$

Здесь начинается новый этап урока, связанный с понятием корня многочлена. Напомним его определение. ***Корнем многочлена*** называется число α, при подстановке которого вместо переменного x получается нуль: $f(\alpha)=0$.

В-8. Какой вид примет равенство (4), если число α является корнем многочлена?

О-8. Оно примет вид $f(x)=(x-\alpha)q(x)$.

В-9. Истолкуйте последнее равенство в терминах делимости многочленов.

О-9. Если α – корень многочлена $f(x)$, то многочлен делится на двучлен $x-\alpha$.

В-10. Пусть многочлен делится на двучлен $x-\alpha$. Какой смысл в этом случае приобретет равенство (4)?

О-10. Если многочлен делится на двучлен $x-\alpha$, то $f(\alpha)=0$, следовательно, число α является корнем многочлена.

В-11. Суммируйте Ответы 9 и 10 в виде теоремы.

О-11. Число α является корнем многочлена тогда и только тогда, когда многочлен делится на двучлен $x-\alpha$.

В этом месте урока должен прозвучать и быть понят важный факт: Ответ 9 и Ответ 10, которые суммированы в Ответе 11, представляют собой два взаимно обратных утверждения.

С чисто математической точки зрения Ответ 11 является ***теоремой о характеризации корня*** в терминах делимости. Вновь мы видим, что этот математический результат получен школьниками в значительной мере самостоятельно.

Здесь начинается еще один этап урока, связанный с выяснением вопроса о количестве корней многочлена. Перед постановкой вопросов уместно сделать обзор материала, касающегося квадратных трехчленов. Известно, что квадратный трехчлен может не иметь корней, может иметь один или два корня. В любом случае можно утверждать, что количество корней не более чем 2, то есть не более чем степень многочлена. В этом контексте следующий вопрос является вполне естественным.

В-12. Может ли количество различных корней многочлена быть больше, чем его степень? Поэкспериментируйте с квадратным трехчленом $f(x)$ и предположите, что он имеет три различных корня α_1, α_2 и α_3.

Если учащиеся затрудняются в проведении дальнейших рассуждений, то последующие вопросы можно детализировать, например, следующим образом.

В-13. Запишите в виде равенства тот факт, что число α_1 является корнем.

О-13. В силу Ответа 8 равенство таково: $f(x)=(x-\alpha_1)g(x)$.

В-14. Подставьте в это равенство значение переменного $x=\alpha_2$ и сделайте вывод.

О-14. Получается, что $0=f(\alpha_2)=(\alpha_2-\alpha_1)g(\alpha_2)$. Поскольку $\alpha_2-\alpha_1\neq 0$, получаем, что $g(\alpha_2)=0$. Это означает, что α_2 – корень многочлена $g(x)$.

В-15. Продолжите похожие рассуждения применительно к двум остальным корням многочлена $f(x)$.

О-15. Получим, что $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)h(x)$.

В-16. Нет ли противоречия в этом равенстве?

О-16. Есть. В левой части стоит многочлен второй степени, а в правой – третьей или более высокой степени.

В-17. По какой причине обычно возникает противоречие?

О-17. Оно возникает оттого, что было сделано какое-либо неверное предположение. В нашем случае это предположение о том, что квадратный трехчлен может иметь три корня.

В-18. Вернемся к Вопросу 12: может ли количество различных корней многочлена быть больше, чем его степень? Сильно ли зависят от степени многочлена те рассуждения, которые начинаются с Вопроса 12?

О-18. От степени многочлена практически ничего не зависит, так что можно сформулировать и доказать такую **теорему:** количество различных корней многочлена не превосходит степени многочлена.

Здесь начинается еще один этап урока, связанный с ***уточнением*** полученной теоремы. Дело в том, что несколько корней многочлена могут оказаться равными друг другу, подобно тому, как это иногда имеет место для квадратных трехчленов. Для описания этого факта используется понятие кратности корня. ***Кратностью корня*** многочлена называется натуральное число k, которое обладает двумя свойствами: 1) многочлен делится на $(x - \alpha)^k$; 2) многочлен не делится на $(x - \alpha)^{k+1}$.

Дальнейшая часть урока посвящена изучению следующей **теоремы:** количество корней многочлена не превосходит его степени, даже если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. Учитель может либо сконструировать вопросы, подобные предыдущим, либо сам объяснить эту теорему школьникам. По мнению авторов, оба способа действий являются вполне естественными.

11. Схема Горнера

В предыдущем разделе было установлено, что если многочлен $f(x)$ поделить на двучлен $x - a$, то теорема о делении с остатком примет вид $f(x) = (x - \alpha)q(x) + f(\alpha)$. Очевидно, что частное $q(x)$ и остаток $f(\alpha)$ можно найти путем деления в столбик. Сейчас мы решим другую **задачу:** найти частное $q(x)$ и остаток $f(\alpha)$, *не используя деление в столбик.*

Опишем систему вопросов и предполагаемых ответов на них, в результате которых можно получить решение задачи.

В-1. Рассмотрите частный случай, когда многочлен $f(x)$ имеет четвертую степень. Для этого случая запишите развернутый вид многочленов $f(x)$ и $q(x)$ и теорему о делении с остатком.

О-1. В этом случае частное $q(x)$ имеет третью степень, так что теорема о делении остатком примет вид

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x-\alpha)(b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3) + f(\alpha).$$

В-2. Выполните умножение в правой части этого равенства и запишите многочлен в правой части по убывающим степеням.

О-2. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим равенство

$$\begin{aligned} &a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = \\ &= b_0x^4 + (b_1 - \alpha b_0)x^3 + (b_2 - \alpha b_1)x^2 + (b_3 - \alpha b_2)x + (f(\alpha) - \alpha b_3). \end{aligned}$$

В-3. Здесь записано равенство двух многочленов. Каково соотношение между их коэффициентами?

О-3. Если два многочлена равны, то они имеют одинаковую степень, причем коэффициенты при одноименных степенях равны между собой. Получаем *систему* из пяти равенств:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - \alpha b_0 \\ a_2 = b_2 - \alpha b_1 \\ a_3 = b_3 - \alpha b_2 \\ a_4 = f(\alpha) - \alpha b_3 \end{cases}$$

В-4. В полученной системе известные коэффициенты a_i выражены через неизвестные коэффициенты b_i и неизвестную величину $f(\alpha)$. Нельзя ли выразить неизвестные величины через известные?

О-4. Просто поменяем местами правую и левую части равенства и перенесем вычитаемые (там, где они есть) в другую часть равенства.

Получим, что

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = \alpha b_0 + a_1 \\ b_2 = \alpha b_1 + a_2 \\ b_3 = \alpha b_2 + a_3 \\ f(\alpha) = \alpha b_3 + a_4 \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь следует обратить внимание учащихся на те «метаморфозы», которые происходят с коэффициентами частного и остатком по мере написания системы (1). Первое равенство в этой системе означает, что неизвестная ранее величина b_0 выражается через известную величину a_0, и поэтому *сама становится известной*. При написании второго равенства ранее неизвестная величина b_1 выражается через известные величины α, b_0 и a_1, и поэтому *сама становится известной*. Те же рассуждения справедливы относительно остальных равенств системы.

В-5. Заполните двухстрочечную таблицу, поместив в первую строку коэффициенты делимого, а во вторую – коэффициенты частного и остаток. При этом целесообразно сделать следующее: 1) слева от таблицы поместить свободный член делителя; 2) во второй строке написать формулы из системы (1).

Это задание не является сложным, однако может вызвать определенные трудности, поскольку является не вполне математическим. К тому же поначалу не вполне понятна его цель.

О-5. Таблица выглядит так:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
α	$b_0 =$ $= a_0$	$b_1 =$ $= \alpha b_0 + a_1$	$b_2 =$ $= \alpha b_1 + a_2$	$b_3 =$ $= \alpha b_2 + a_3$	$f(\alpha) =$ $= \alpha b_3 + a_4$

В-6. Сформулируйте *словесное правило* заполнения нижней строки таблицы. (Это правило уместно назвать алгоритмическим предписанием.)

Искомое правило легко возникает, если последовательно читать содержащиеся в таблице формулы, сводя к минимуму использование математических символов.

О-6. Правило звучит так: 1) в первую клетку нижней строки нужно поместить содержимое вышестоящей клетки; 2) для того чтобы заполнить вторую и последующие клетки нижней строки, нужно содержимое предшествующей клетки умножить на α и к произведению прибавить содержимое вышестоящей клетки.

Благодаря Вопросам 1–6 и Ответам на них мы получили то, что является нашей целью. Схема из Ответа 5 называется ***схемой Горнера,*** а правило из Ответа 6 показывает, как она заполняется.

Здесь уместно повторить ту ключевую мысль, которая уже была выражена в предыдущем разделе в двух абзацах, следующих за Ответом 6: 1) схема Горнера и правило ее заполнения получены учащимися в значительной мере самостоятельно в процессе ответов на серию вопросов; 2) в работе математиков формулировка фактов (теорем, алгоритмов и т.д.) появляется не в начале исследования, а как результат тех или иных действий, порой достаточно сложных; 3) приведенные выше вопросы представляют собой попытку сблизить учебную деятельность школьников с исследовательской деятельностью математиков.

После получения схемы Горнера важно закрепить ее содержательный смысл: в клетках нижней строки, за исключением последней, стоят коэффициенты частного, а в последней клетке – остаток.

Продолжим наши вопросы.

В-7. Изменятся ли наши рассуждения, если в качестве делимого вместо многочлена четвертой степени рассмотреть многочлен произвольной степени?

О-7. Фактически они не изменятся. Просто в записях многочленов будут использованы многоточия, а целью рассуждений станет получение общей формулы $b_k = \alpha b_{k-1} + a_k$, справедливой для всех k от 1 до $n-1$.

Здесь учитель имеет несколько возможностей для дальнейшей организации урока: ограничиться Ответом 7; сконструировать вопросы, подобные предыдущим, для совместного изучения общего случая; самому объяснить школьникам общий случай; отослать к литературе, в которой изложен общий случай. По мнению авторов, каждый из способов действий является вполне естественным, а выбор того или иного из них диктуется конкретной ситуацией. В качестве педагогического упражнения предоставляем читателю возможность сконструировать систему вопросов, которая приведет его учеников к использованию схемы Горнера для нахождения кратности корня.

Сформулируем некоторые типичные задачи, при решении которых схема Горнера является уместной и полезной.

Задача 1. Поделите многочлен $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ на $x + 3$.

Решение. Здесь важно «не пропустить» тот факт, что коэффициенты при четвертой и второй степени делимого, а также его свободный член равны нулю. Важно также, что $\alpha = -3$. С учетом сказанного, схема Горнера примет вид

	2	0	–5	0	–8	0
–3	2	–6	13	–39	109	–327

Она означает, что теорема о делении с остатком выражается равенством $f(x) = (x+3)(2x - 6x + 13x - 39x + 109) + (-327)$.

Задача 2. Для многочлена $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 8x + 9$ найдите его значение в точке 3,1.

Решение может быть основано на теореме Безу, поскольку число $f(3{,}1)$ равно остатку от деления многочлена на двучлен $x - 3{,}1$. Схема Горнера приобретает вид

	1	-3	5	-8	9
3,1	1	0,1	5,31	8,461	35,2291

Получаем, что $f(3{,}1) = 35{,}2291$.

Сравним количества тех арифметических операций, которые необходимо сделать при разных способах решения задачи, а также оценим их сложность. Очевидно, что для заполнения таблицы нужно выполнить 8 арифметических операций. При этом 6 из них выполняется устно, и только две требуют вычисления в столбик или, на худой конец, на калькуляторе: нахождение произведений $5{,}31 \cdot 3{,}1$ и $8{,}461 \cdot 3{,}1$. При делении в столбик, выполняемом на бумаге, производятся те же самые операции, что и при заполнении таблицы, однако решение получается более громоздким, поскольку требует большого количества служебных записей. При вычислении $f(3{,}1)$ по определению многочлена количество операций больше и они сложнее. Таким образом, схема Горнера не только красива эстетически, не только удобна, но и экономна.

Задача 3. Является ли число 2 корнем многочлена $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$? Если да, то какова его кратность?

Решение может быть выполнено по схеме Горнера:

	1	–5	7	–2	4	8	Математический смысл строки
2	1	–3	1	0	4	0	Да. $f(x) = (x-2)(x^4 - 3x^3 + x^2 + 4),\ \ k \ge 1$
2	1	–1	–1	–2	0		$f(x) = (x-2)^2(x^3 - x^2 - x - 2),\ \ k \ge 2$

2	1	1	1	0			$f(x)=(x-2)^3(x^2+x+1),\quad k\ge 3$
2	1	3	7≠0				$k=3$

Таким образом, число 2 является трехкратным корнем многочлена.

12. Теорема Виета

Изучение теоремы Виета во многом зависит от тех рамочных условий, в которых происходит изучение математики вообще, а также от целей учителя. Проще всего рассматривать ее тогда, когда комплексные числа уже изучены и учащиеся ознакомлены с теоремой о количестве корней многочлена с комплексными коэффициентами. В этом случае теорема применима ко всем многочленам, ее формулировка кратка, а красота формул Виета и изящество их доказательства проявляются в полной мере. Однако в школе ситуация отнюдь не такова, поскольку теорема рассматривается в восьмом классе, то есть задолго до того, как комплексные числа начнут изучаться даже в профильных школах. При этом изучение многочленов высоких степеней в определенном смысле неестественно, поскольку школьники только начинают накапливать опыт работы с многочленами первой и второй степени.

Сказанное определяет выбранный авторами уровень общности изучения теоремы Виета. Сначала мы рассмотрим приведенное квадратное уравнение $x^2+px+q=0$ и получим теорему Виета, используя формулу вычисления корней. Затем получим ее другим способом, исходя из разложения трехчлена на множители. Наконец, мы получим формулы Виета для многочленов третьей степени.

Как и в предыдущих разделах, приведем систему вопросов и предполагаемых ответов на них, в результате которых можно получить нужные формулы.

В-1. Запишите формулы для нахождения корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

О-2. Формулы таковы: $x_1=\dfrac{-p+\sqrt{D}}{2}$ и $x_2=\dfrac{-p-\sqrt{D}}{2}$, где $D=p^2-4q$.

В-2. Сравните между собой эти формулы.

Здесь целесообразно разъяснить смысл термина «сравнить». Он означает, что нужно: 1) выявить *сходные* свойства формул, то есть провести *сопоставление*; 2) выявить *отличия* между формулами, то есть провести *противопоставление*. По мнению авторов, время, потраченное на такое разъяснение, будет весьма продуктивным, поскольку умение сравнивать объекты является элементом общей культуры и используется весьма широко как в профессиональной деятельности, так и в житейских ситуациях.

О-2. Сходство формул состоит в том, что их правые части представляют собой дроби, что у дробей одинаковый знаменатель 2, что числители представляют собой *алгебраические суммы* двух одинаковых выражений: $-p$ и $\sqrt{D}$. Разница между формулами состоит в том, что в одной из них $\sqrt{D}$ *прибавляется* к первому слагаемому, а в другой *вычитается* из него.

В-3. Проделайте *эксперименты* с формулами корней, выполнив над ними какие-либо арифметические действия.

Задавая этот весьма неопределенный вопрос, мы руководствуемся следующими соображениями. Во-первых, учащиеся имеют некоторый опыт алгебраических преобразований. Они понимают или чувствуют, что при сложении взаимно обратные величины взаимно уничтожаются, так что для них естественно сложить формулы с целью избавиться от выражения $\sqrt{D}$. Кроме того, они знают и неоднократно применяли формулу разности квадратов, так что для них естественно перемножить формулы с целью заменить выражение $\sqrt{D}$ на более простое выражение D. Во-вторых, предлагаемый эксперимент не слишком широк, поскольку арифметических действий всего четыре. Даже если они выполняются «вслепую», то вычисление частного x_1/x_2 не приводит ни к какой сколько-нибудь естественной формуле, вычисление разности приводит к естественной, но бесполезной формуле $x_1 - x_2 = \sqrt{D}$, а вот вычисление суммы и произведения дают красивые формулы.

О-3. Получаем, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 x_2 = q$.

В-4. Нельзя ли выразить эти равенства в словесной форме, сведя к минимуму использование математических символов?

Мы вновь предлагаем учащимся задание из области русского языка, подобное Вопросу 3 раздела 10 (теорема Безу) и Вопросу 6 раздела 11 (схема Горнера).

О-4. Сумма корней противоположна второму коэффициенту, а их произведение равно свободному члену.

В-5. Ответ звучит как теорема, однако у нее не выделены условия. Ко всякому ли приведенному уравнению применимо это утверждение?

О-5. Нет, поскольку не у всякого уравнения есть корни.

В-6. Верно. Давайте условимся считать, что если уравнение имеет один корень, то будем считать его дважды, то есть считать, что $x_1 = x_2$. Дополните Ответ 4 таким образом, чтобы он имел структуру «**если** … **то**». Более подробно: «**Если** <выполняется некоторое условие>, **то** <справедливо следующее заключение>».

О-6. Если приведенное квадратное уравнение имеет корни, то их сумма противоположна второму коэффициенту, а их произведение равно свободному члену. При этом если уравнение имеет один корень, то он считается дважды, то есть считается, что $x_1 = x_2$.

Ответ 6 является **теоремой Виета.** Повторим ту ключевую мысль, которая уже звучала выше. Подобно теореме Безу, теореме о характеризации корня и схеме Горнера, теорема Виета получена учащимися в значительной мере самостоятельно в процессе ответов на серию вопросов. Благодаря этому учебная деятельность школьников становится похожей на исследовательскую деятельностью математиков.

Если говорить о теоретической части урока, то далее следуют два шага, предписанные программой: получить утверждение, обратное теореме Виета; получить обобщение теоремы Виета и обратной к ней для неприведенных квадратных уравнений. В качестве педагогического упражнения предоставляем читателю возможность сконструировать систему вопросов, которая приведет его учеников к искомым утверждениям.

Получим теорему Виета другим способом. Мы не будем использовать формулу для нахождения корней квадратного трехчлена, зато будем использовать теорему о разложении его на множители.

Пусть приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2.

В-7. Разложите трехчлен, стоящий в левой части уравнения, на линейные множители.

О-7. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

В-8. Раскройте скобки в левой части полученного равенства и расположите слагаемые по убывающим степеням переменного.

О-8. $x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$.

В-9. Что можно сказать о коэффициентах равных трехчленов? Какой вывод можно сделать?

О-9. Коэффициенты при одинаковых степенях равны между собой, следовательно, $-(x_1+x_2)=p$ и $x_1x_2=q$.

Таким образом, мы вновь получили терему Виета.

В-10. Итак, мы имеем два способа получения теоремы Виета для приведенного квадратного уравнения. Один из них основан на формулах корней уравнения, а другой – на теореме о разложении на множители. Который из них целесообразно применить, если мы хотим получить похожее утверждение для корней приведенного кубического уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$?

О-10. Мы не знаем формул для корней кубического уравнения. Более того, у нас мало шансов получить их, поскольку кубическое уравнение существенно сложнее квадратного. Единственно, что можно сделать – это попытаться применить второй способ.

В-11. Пусть приведенное кубическое уравнение $x^3+px^2+qx+r=0$ имеет три корня x_1, x_2 и x_3 (среди которых, возможно, есть равные друг другу). Проделайте действия Ответов 7, 8 и 9 применительно к этому уравнению.

О-11. Разложение на множители имеет вид $x^3+px^2+qx+r=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Раскрыв скобки получим, что $x^3+px^2+qx+r=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим формулы Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-p \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=q \\ x_1x_2x_3=-r \end{cases}$$

Здесь важно объяснить школьникам, что формулы имеют место только для тех многочленов, которые имеют три вещественных корня, количество которых подсчитывается с учетом их кратности. Например, уравнение $x^3+x=0$ имеет точно один вещественный корень (докажите), следовательно, если мы будем оперировать только вещественными числами, то не сможем записать формулы Виета. По мнению авторов, попытка получить формулы Виета для многочленов третьей степени является фактором, мотивирующим как изучение многочленов высоких степеней, так и изучение комплексных чисел.

Составляя или подбирая задачи на теорему Виета, нужно всегда помнить, что с каждым приведенным уравнением ассоциируется упорядоченная пара (p, q) его коэффициентов и неупорядоченная пара $\{x_1, x_2\}$ его корней, которые связаны формулами Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$

Как правило, условие задачи содержит информацию о нескольких числах этой четверки и требование получить информацию об остальных числах. Часто задача осложняется запретом на некоторые операции с данными или же косвенным характером исходной информации. Приведем несколько примеров, не претендуя на полноту их подборки. Мы не будем приводить решения задач, однако снабдим их формулировки педагогико-математическими комментариями.

Задача 1. Докажите, что данные уравнения имеют корни одинаковых знаков, и определите знаки корней:

а) $x^2 + 3x + 2 = 0$; б) $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Задача 2. Докажите, что данные уравнения имеют корни разных знаков. Определите, какой из корней больше по модулю – положительный или отрицательный:

а) $x^2 + 5x - 6 = 0$; б) $x^2 - 5x - 6 = 0$.

Задача 3. Не применяя формулу корней, найдите второй корень уравнения $x^2 - 7x + 10 = 0$, если известен первый корень $x_1 = 2$.

Условия задач 1–3 содержат полную информацию о коэффициентах многочлена. Ответ можно было бы получить, вычислив корни многочлена, однако этого нельзя сделать в силу запрета, явного в задаче 3 и завуалированного в задачах 1 и 2. Невольно приходится обращаться к формулам Виета.

Задача 4. Один из корней уравнения $x^2 - 8x + q = 0$ равен -10. Найдите второй корень и коэффициент q.

Задача 5. В данном уравнении известен один из его корней. Найдите второй корень и неизвестный коэффициент уравнения:

а) $x^2 + px - 20 = 0$, $x_1 = -5$; б) $x^2 + px - 20 = 0$, $x_1 = 0$;

в) $x^2 + px = 0$, $x_1 = 0$.

На первый взгляд, задачи 4 и 5 весьма схожи, поскольку их условия содержат значения одного из коэффициентов уравнения и одного из его корней. Тем не менее, они сильно отличаются друг от друга. Действительно, задача 4 имеет единственное решение при любых значениях второго коэффициента p и любых значениях корня x_1. В отличие от этого, задача 5 может иметь единственное решение, может не иметь решений, может иметь бесконечно много решений, о чем говорят ее модификации (а), (б) и (в). Кстати, решение задачи 5 является прекрасным поводом для повторения решения уравнений вида $ax = b$.

Задача 6. Найдите все значения p, при которых уравнение $x^2 + px + 15 = 0$ имеет целые корни.

Задача 7. Найдите все положительные значения q, при которых уравнение $x^2 + 5x + q = 0$ имеет целые корни.

На первый взгляд, задачи 6 и 7 весьма похожи, поскольку их условия содержат значение одного из коэффициентов уравнения и *косвенную* информацию о корнях уравнения. Тем не менее, они отличаются друг от друга. Действительно, условия задачи 6 налагают достаточно сильные ограничения на изучаемую ситуацию и позволяют доказать, что количество решений конечно и невелико (четыре решения). Для того чтобы достичь в задаче 7 такой же определенности, требуется дополнительная информация о свободном члене, а именно его положительность.

Задача-исследование. Каждое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ можно изобразить в виде точки с координатами (p, q) на вспомогательной координатной плоскости pOq. Например, уравнение $x^2 + 2x - 5 = 0$ изображается в виде точки с координатами $(2, -5)$. Изобразите на координатной плоскости pOq множество приведенных квадратных уравнений, которые:

1. Имеют два различных вещественных корня:
   - 1.1. имеют два различных вещественных положительных корня;
   - 1.2. имеют два различных вещественных отрицательных корня;
   - 1.3. имеют два различных вещественных корня, один из которых положительный, а другой нулевой;
   - 1.4. имеют два различных вещественных корня, один из которых отрицательный, а другой нулевой;
   - 1.5. имеют два различных вещественных корня разных знаков:
     - 1.5.1. имеют два различных вещественных корня разных знаков, у которых модуль отрицательного корня больше, чем положительный корень;
     - 1.5.2. имеют два различных вещественных корня разных знаков, у которых модуль отрицательного корня меньше, чем положительный корень;

1.5.3. имеют два различных вещественных корня разных знаков с одинаковыми модулями.

2. Имеют один вещественный корень:
   2.1. имеют один вещественный положительный корень;
   2.2. имеют один вещественный отрицательный корень;
   2.3. имеют один нулевой корень.
3. Не имеют вещественных корней.

Раскрасьте в разные цвета все найденные области, линии, точки.

13. Рациональные корни уравнения с рациональными коэффициентами

Листая школьный учебник, можно сделать одно не вполне математическое наблюдение: абсолютное большинство квадратных уравнений имеет рациональные и даже целые коэффициенты, а вот корни многочленов имеют самую разнообразную природу и могут быть и целыми, и рациональными, и иррациональными. Данный раздел посвящен соотношению между рациональностью коэффициентов уравнения и рациональностью его корней.

Получим сначала одно утверждение, которое позволяет *упростить* ситуацию. Как и в предыдущих разделах, сделаем это с помощью системы вопросов.

В-1. Рассмотрим уравнение четвертой степени с *рациональными коэффициентами:*

$$d_0x^4 + d_1x^3 + d_2x^2 + d_3x + d_4 = 0 \qquad (1)$$

Какое число называется рациональным? Как более подробно можно записать коэффициенты многочлена с учетом этого определения?

О-1. Число называется рациональным, если оно представляет собой дробь, числитель которой – целое число, а знаменатель – натуральное число. Теперь коэффициенты можно записать в виде $d_i = \dfrac{u_i}{v_i}$, где $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

В-2. Можно ли привести эти пять дробей к общему знаменателю? Какой вид примут коэффициенты?

О-2. Можно. Если общий знаменатель обозначить через v, а новые числители через a_i, то коэффициенты примут вид $d_i = \dfrac{a_i}{v}$, где $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

В-3. Подставьте эти коэффициенты в уравнение (1) и запишите, какой вид оно примет.

О-3. Уравнение примет вид

$$\frac{a_0}{v}x^4 + \frac{a_1}{v}x^3 + \frac{a_2}{v}x^2 + \frac{a_3}{v}x + \frac{a_4}{v} = 0 \qquad (2)$$

В-4. Умножьте обе части уравнения (2) на общий знаменатель и запишите полученное уравнение. Каковы коэффициенты нового уравнения: натуральные, целые, рациональные, иррациональные?

О-4. Уравнение примет вид

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \qquad (3)$$

Согласно Ответу 2 его *коэффициенты являются целыми числами.*

В-5. Теперь зададим главный вопрос: равносильны ли уравнения (1) и (3)?

О-5. Да. При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы просто записали коэффициенты в другом виде, а при переходе от уравнения (2) к уравнению (3) умножили уравнение на число v, отличное от нуля. Оба преобразования являются равносильными.

В-6. Сопоставьте уравнения (1) из Вопроса 1, уравнение (3) из Ответа 4 и Ответ 5. Суммируйте ваши наблюдения в виде какого-либо утверждения.

О-6. Уравнение (1) имеет рациональные коэффициенты, уравнение (3) имеет целые коэффициенты, и эти уравнения равносильны. Следовательно, каждое уравнение с рациональными коэффициентами равносильно уравнению с целыми коэффициентами.

Полученное утверждение представляет собой **теорему,** упрощающую изучение уравнений с рациональными коэффициентами.

Вновь мы видим, что учебная работа школьников похожа на работу математиков в том смысле, что нужное утверждение не формулируется изначально, а представляет собой результат некоей деятельности, в нашем случае – ответов на вопросы.

Теперь мы сосредоточимся на уравнении (3) с целыми коэффициентами и постараемся решить следующую **задачу:** извлечь максимальное количество следствий из того факта, что *несократимая* дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения (3) с целыми коэффициентами.

Здесь учителю необходимо напомнить следующий факт, касающийся делимости целых чисел: если произведение двух чисел делится на третье число и оно взаимно просто с одним из сомножителей, то другой сомножитель делится на это число. Заметим, что необходимость использования этого факта невозможно или крайне трудно предугадать заранее. Кроме того, к моменту изучения уравнений данный факт давно ушел из оперативной памяти школьников, даже если и изучался когда-то.

Продолжим наши вопросы.

В-7. Подставьте несократимую дробь $\frac{p}{q}$ в уравнение (3), а затем избавьтесь от дробей. Какой вид примет равенство?

О-7. Сначала равенство примет вид

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^4 + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^3 + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_3\frac{p}{q} + a_4 = 0.$$

Чтобы избавиться от дробей, нужно умножить обе его части на q^4. При этом получим равенство

$$a_0p^4 + a_1p^3q + a_2p^2q^2 + a_3pq^3 + a_4q^4 = 0 \qquad (4)$$

Мы видим, что в равенстве (4) участвуют только *целые* числа. Постараемся использовать это обстоятельство, извлекая из равенства (4) различные следствия.

В-8. Уедините первое слагаемое в левой части равенства (4). Какой вид примет равенство? Появится ли у правой части полученного равенства какая-либо особенность?

О-8. Равенство примет вид

$$a_0p^4 = -a_1p^3q - a_2p^2q^2 - a_3pq^3 - a_4q^4 \qquad (5)$$

В его правой части имеется общий множитель q.

В-9. Выразите эту особенность в терминах делимости чисел.

О-9. Правая часть равенства (5) делится на q.

В-10. А левая часть?

О-10. Следовательно, левая часть тоже делится на q.

В-11. Однако дробь $\frac{p}{q}$ несократима, значит, числа p и q взаимно просты. Что можно сказать о первом сомножителе a_0?

О-11. Он тоже делится на q.

В-12. Итак, a_0 – это старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами, несократимая дробь $\frac{p}{q}$ – корень уравнения, q –

знаменатель дроби. Суммируйте полученные результаты в виде какого-либо утверждения.

О-12. Если несократимая дробь является корнем уравнения с целыми коэффициентами, то старший коэффициент уравнения делится на ее знаменатель.

Полученное утверждение является первой частью **теоремы,** которую мы пытаемся получить.

В-13. Уравнение (4) в определенном смысле «симметрично». Действительно, одночлены расположены так, что показатели степеней параметра p убывают, а показатели степеней параметра q возрастают. Задавая Вопрос 8, мы работали только с первым слагаемым. Было бы естественно проделать то же самое с последним слагаемым. Итак, уедините последнее слагаемое равенства (4) в левой части равенства. Какой вид примет равенство? Появится ли у правой части полученного равенства какая-либо особенность?

О-13. Равенство примет вид

$$a_4q^4 = -a_0p^4 - a_1p^3q - a_2p^2q^2 - a_3pq^3 \tag{6}$$

В его правой части имеется общий множитель p.

В-14. Выразите эту особенность в терминах делимости чисел.

О-14. Правая часть равенства (6) делится на p.

В-15. Продолжите ваши рассуждения по аналогии со сделанными ранее.

О-15. Можно рассуждать так же, как это сделано в Вопросах и Ответах 10–12. Левая часть равенства (6) делится на p, однако второй сомножитель q^4 взаимно прост с p, следовательно, a_4 делится на p. Получаем следующее: если несократимая дробь является корнем уравнения с целыми коэффициентами, то свободный член уравнения делится на ее числитель.

Полученное утверждение очень похоже на первую частью той **теоремы,** которую мы пытаемся получить (см. комментарий после Ответа 12).

В-16. Суммируйте Ответы 12 и 15 в виде единого утверждения.

О-16. Если несократимая дробь является корнем уравнения с целыми коэффициентами, то ее числитель является делителем свободного члена уравнения, а ее знаменатель – делителем старшего коэффициента.

Это утверждение представляет собой **теорему** о рациональных корнях многочлена.

В-17. Изменится ли характер наших рассуждений, если мы будем рассматривать уравнение не четвертой степени, а какой-либо другой, более высокой или более низкой?

О-17. Очевидно, что нет.

Здесь учитель имеет несколько возможностей для дальнейшей организации урока: ограничиться Ответом 17; сконструировать вопросы, подобные предыдущим, для совместного изучения уравнений произвольной степени; самому объяснить школьникам общий случай; отослать к имеющейся литературе. По мнению авторов, каждый из способов действий является вполне естественными, а выбор того или иного из них диктуется конкретной ситуацией.

После получения теоремы учителю важно добиться понимания того факта, что теорема является *необходимым следствием* свойства дроби $\frac{p}{q}$ «быть корнем». Она вовсе не является достаточным условием. Об этом говорят весьма простые примеры. Так, уравнение $x^2 - 2 = 0$ не имеет рациональных корней (хотя имеет два иррациональных корня $\pm\sqrt{2}$), а уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет даже действительных корней.

Сформулируем некоторые типичные задачи, при решении которых теорема о рациональных корнях уравнения является уместной и полезной.

Задача 1. Является ли число $\frac{1}{3}$ корнем уравнения $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 = 0$?

Решение. Коэффициенты уравнения являются целыми, а изучаемое число рационально. Знаменатель числа не является делителем старшего коэффициента, потому ответ отрицателен.

Как видим, нам не потребовалось сколько-нибудь сложных вычислений.

Задача 2. Найдите рациональные корни уравнения из задачи 1. Если получится, найдите все корни.

Решение. Возможные значения числителя – это делители свободного члена, то есть ± 1. Возможные значения знаменателя – это делители старшего коэффициента, то есть 1, 2 и 4 (знак считается присоединенным к числителю). В силу доказанной теоремы рациональный корень, если он существует, находится среди шести чисел:

$\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4}$. Для этих значений переменной вычислим значение многочлена $f(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$, используя схему Горнера.

	4	0	–7	–5	–1	
1	4	4	–3	–8	–9	Не корень
–1	4	–4	–3	–2	1	Не корень
$1/2$	4	2	–6	–8	–5	Не корень
$-1/2$	4	–2	–6	–2	0	$(x+1/2)(4x^3-2x^2-6x-2)$
$-1/2$	4	–4	–4	0		$4(x+1/2)^2(x^2-x-1)$

Последняя клетка таблицы показывает, что наше уравнение приобретает равносильный вид $4(x+1/2)^2(x^2-x-1)=0$. Легко видеть, что оно имеет двукратный рациональный корень $-\frac{1}{2}$ и два иррациональных корня $\frac{1\pm\sqrt{5}}{3}$.

Задача 3. Дано уравнение $x^6 - 6x^5 + 11x^4 - x^3 - 18x^2 + 20x - 8 = 0$. Найдите его рациональные корни, а также получите дополнительную информацию об остальных корнях.

Решение. Возможные значения числителя – это числа ±1, ±2, ±4, ±8. Для знаменателя возможно единственное положительное значение – число 1. Таким образом, рациональный корень, если он существует, находится среди названных восьми чисел. Для этих чисел вычислим значение многочлена, стоящего в левой части уравнения. Сделаем это с помощью схемы Горнера.

	1	–6	11	–1	–18	20	–8	
1	1	–5	6	5	–13	7	–1	Не корень
–1	1	–7	18	–19	1	19	–27	Не корень
2	1	–4	3	5	–8	4	0	$(x-2)(x^5-4x^4+3x^3+5x^2-8x+$ $+4)=0$
2	1	–2	–1	3	–2	0		$(x-2)^2(x^4-2x^3-x^2+3x-2=0)$
2	1	0	–1	1	0			$(x-2)^3(x^3-x+1=0)$

Последняя заполненная клетка таблицы показывает, что наше уравнение приобретает равносильный вид $(x-2)^3(x^3-x+1=0)$. Следовательно, целое число 2 является трехкратным корнем. Остальные числа можно не проверять, т.к. рациональными корнями уравнения $x^3-x+1=0$ могут быть только числа 1 и –1, а они уже проверены.

Для учителя важно, что получение *дополнительной* информации о корнях уравнения связано с привлечением *другой* математической техники. Благодаря этому проделанная ранее рутинная часть решения включается в широкий математический контекст. Кратко остановимся на этом контексте.

Рассмотрим уравнение $x^3 - x + 1 = 0$ и связанный с ним многочлен $f(x) = x^3 - x + 1$. Как всякий многочлен третьей степени, он имеет вещественный корень. Покажем, что этот корень является единственным. С этой целью найдем промежутки монотонности и точки экстремума. Производная многочлена вычисляется по формуле $f'(x) = 3x^2 - 1$. Она отрицательна на интервале $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и положительна на каждом из лучей $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Следовательно, монотонность многочлена описывается так. 1) Многочлен возрастает на промежутке $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и достигает своего локального максимума в концевой точке: $f_{\max} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$. 2) Многочлен убывает на промежутке $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и достигает своего локального минимума в концевой точке: $f_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$. 3) Многочлен возрастает на промежутке $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Поскольку локальный максимум и локальный минимум являются положительными, а многочлен непрерывен, он не имеет корней на промежутке $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Следовательно, он имеет единственный вещественный корень на бесконечном промежутке $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Для сужения этого промежутка вычислим значения многочлена в двух «удобных» точках: $f(-2) = -5 < 0$ и $f(-1) = 1 > 0$. Поскольку многочлен принимает значения разных знаков на концах отрезка $[-2,-1]$, его корень находится на этом отрезке. В случае необходимости он может быть вычислен с любой наперед заданной точностью, например, методом деления отрезка пополам.

Отметим, что корни уравнения $x^3 - x + 1 = 0$ могут быть найдены по формулам Кардана. Впрочем, это выходит далеко за рамки школьной программы.

В заключение приведем задачу теоретического характера.

Задача 4. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами. Докажите, что: 1) разность $p-q$ является делителем числа $f(1)$; 2) сумма $p+q$ является делителем числа $f(-1)$.

НАЧАЛА АНАЛИЗА

14. О математике, математическом анализе и его связи с физикой

Нетрудно перечислить составные части процесса обучения математике – это математика как наука, учащийся, преподаватель и канал передачи информации. Гораздо сложнее дать определения этим элементам. Между тем точные определения необходимы по той простой причине, что от наших взглядов на сущность этих элементов будет зависеть весь проектируемый и реально организуемый педагогический процесс. Покажем, что даже в случае первого и «простейшего» элемента – математики – наблюдается широкий спектр точек зрения.

Наиболее полное академическое издание «Математическая энциклопедия» трактует понятие математики традиционно, то есть как науку о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. При этом появление новых разделов математики рассматривается как выявление новых типов количественных отношений и пространственных форм. «Энциклопедический словарь юного математика» дает несколько более широкую трактовку: «Возможно, нужно сказать, что математика имеет своим объектом изучения пространственные формы, количественные отношения и логические конструкции». При этом необходимость расширения традиционного определения обосновывается появлением областей математики, не связанных ни с количественными отношениями, ни с пространственными формами: математической логики и дисциплин, связанных с программированием для ЭВМ.

Конкурирующая точка зрения выражена в статье Н. Бурбаки «Архитектура математики». Согласно ей математику следует определить как науку о математических структурах, основными типами которых являются алгебраические, топологические и порядковые. Однако такая точка зрения содержит внутренний конфликт, который мы изложим в трактовке И. Р. Шафаревича: «Когда на вопрос – что изучает математика? – отвечают: «множества с заданными в них отношениями» или «структуры», то это вряд ли можно признать ответом. Ведь среди континуума мыслимых множеств с заданными в них отношениями или структур реально привлекает математиков очень редкое, дискретное множество, и смысл вопроса как раз и заключается в том, чтобы понять, чем же особенно ценна эта исчезающе малая часть, вкрапленная в аморфную массу».

Одна из категоричных точек зрения на объект математики принадлежит В. И. Арнольду: «Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук». Более сбалансированная точка зрения выражена Дж. фон Нейманом в знаменитой статье «Математик». Его основная мысль состоит в том, что существует два типа движущих идей современной математики: идеи естественнонаучного, эмпирического происхождения и теоретические идеи, появившиеся внутри математики. Ученый выражает это следующим образом: «Некоторые из наиболее ярких идей современной математики (я убежден, что это – ее лучшие идеи) отчетливо прослеживаются до своих истоков в естественных науках». И далее: «Двоякий лик – подлинное лицо математики, и я не верю, что природу математического мышления можно было бы рассматривать с какой-нибудь единой упрощенной точки зрения, не принося при этом в жертву самую сущность».

Упомянутая двойственность математики особенно ярко проявляется при изучении математического анализа. Дело в том, что свои первоначальные шаги математический анализ делал как физико-геометрическая наука, его первоначальные результаты описывали свойства физически наблюдаемых величин и/или свойства геометрических фигур. Вот что писал по этому поводу известный российский математик А. Н. Крылов: «Ньютон открыл и дал основы исчисления бесконечно малых, исходя из понятий механических и геометрических». Исторически сложилось так, что создатели математического анализа – Ньютон, Лейбниц, Эйлер, братья Бернулли и другие – не были «чистыми» математиками, а имели серьезные труды в области механики, физики, астрономии и других наук. Естественно, что в их сознании не было «перегородки», отделяющей математику от физики. Изучение движений тел давало материал для введения математических понятий, а математические теоремы позволяли описывать движения тел и находить физические законы. Преподаватель, приступающий к изложению математического анализа, может попытаться так организовать его изучение, чтобы студенты получили и усвоили информацию примерно тем же путем, каким усвоили ее создатели математического анализа.

Обращаясь к опыту детей, следует сказать, что они наблюдают движения тел с самого раннего возраста. Им хорошо знакомы такие понятия, как «быстро» и «медленно», так что они могут сравнить скорости движения разных тел, например, автомобиля и пешехода.

Они легко могут сравнить скорость движения качелей в верхней и нижней точке, достаточно хорошо описывают движение поезда в момент смены направления движения и т.п.

Все сказанное означает, что преподаватель, приступающий к изложению математического анализа, имеет перед собой двойственную задачу. Во-первых, он должен актуализировать в сознании учащихся те знания из курса физики, которые будут способствовать пониманию теорем математического анализа. Во-вторых, он должен совместно с учащимися применить эти физические знания для получения и понимания математических теорем.

Приведем те сведения из школьного курса физики, которые известны учащимся к моменту начала изучения математического анализа.

Предположим, что мы изучаем движение материальной точки P вдоль прямой l (рис. 56а). Зададим на этой прямой две базисные точки O и E и включим часы (рис. 56б). Благодаря этому нашим физико-геометрическим понятиям – прямая, движение, материальная точка – будут поставлены в соответствие понятия математического анализа. Прежде всего, мы можем рассматривать точку O в качестве начала отсчета и поставить в соответствие ей число 0. Кроме того, отрезок OE можно рассматривать в качестве единицы измерения длины и поставить в соответствие точке E число 1. В этом случае прямая l превратится в числовую ось, которую мы будем обозначать через Os. Наконец, каждому моменту времени t соответствует координата $s(t)$ той точки оси Os, в которой находится в данный момент движущаяся материальная точка P (рис. 56в). Окончательно мы получаем соответствие $t \mapsto s(t)$, которое выступает одновременно в двух качествах: в физике оно называется законом движения материальной точки, а в математике – вещественной функцией вещественного аргумента.

Скоростью прямолинейного равномерного движения тела называется путь, пройденный телом в единицу времени: $v = s/t$. Принято считать, что скорость тела положительна (отрицательна) тогда и только тогда, когда тело движется в положительном (отрицательном) направлении оси Os (рис. ??). Средней скоростью тела за промежуток времени $[a,b]$ называется отношение перемещения движущегося тела к длине промежутка времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{s(b) - s(a)}{b - a}$.

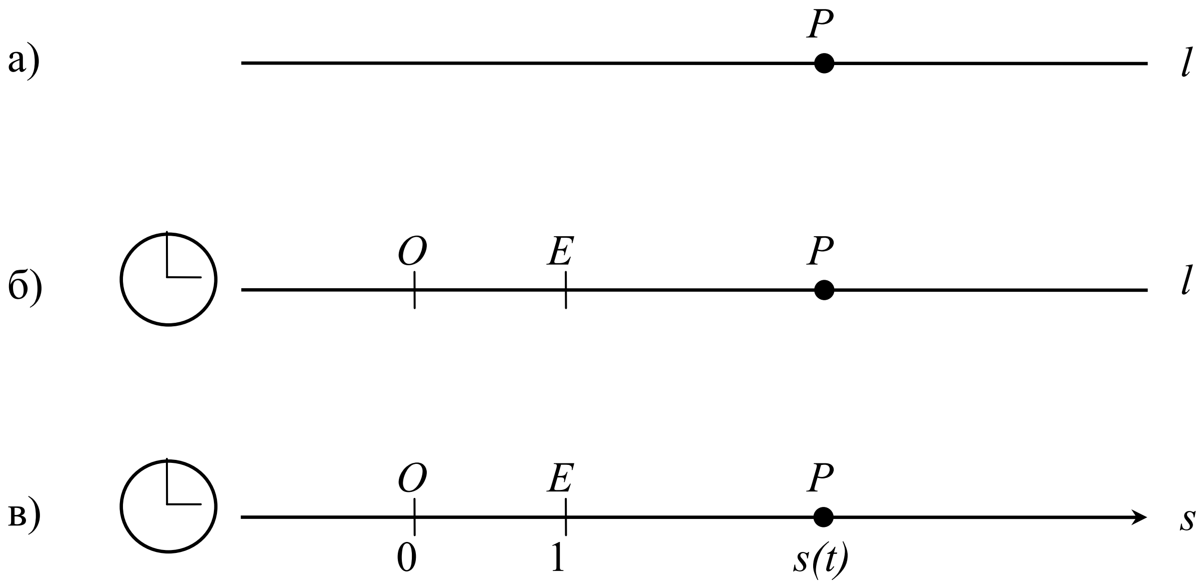


Рис. 56

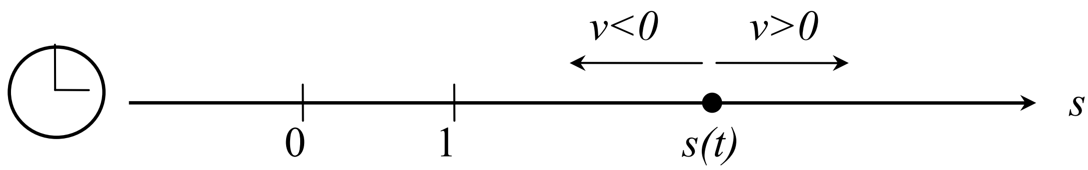


Рис. 57

15. Логика доказательств и физическое происхождение условий некоторых математических теорем

Выведем из физических соображений некоторые ограничения на функцию, которая может служить законом движения макроскопического тела, а затем сравним их с условиями основных теорем дифференциального исчисления.

(А) Начнем с простого соображения о том, что реальный физический эксперимент имеет свое начало и конец, то есть протекает за конечный отрезок времени. В силу этого можно считать, что закон движения тела представляет собой функцию, определенную на отрезке $[a,b]$.

(Б) Рассмотрим более глубокий вопрос о том, всякая ли числовая функция числового аргумента может служить законом движения для некоторого физического тела. Наивный, но любопытный студент может задать такой вопрос в отношении многих хорошо известных ему функций: $s(t) = t^2$, $s(t) = \sin t$, $s(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $s(t) = \operatorname{sgn} t$, $s(t) = \sqrt{t}$, $s(t) = \arcsin t$ и т.д. При этом в некоторых случаях ответ хорошо известен (равноускоренное и колебательное движение в первом и втором случае соответственно), а в других – отнюдь не очевиден.

Приведем наглядные соображения[1] в пользу следующего утверждения: закон движения макроскопического тела является непрерывной функцией. Допустим, что функция, выражающая закон движения, имеет бесконечный разрыв. Такова, например, функция $s(t) = \dfrac{1}{1-t}$. Анализируя эту формулу на языке физики, мы получим, что в течение *ограниченного* промежутка времени $[0, 1)$ тело уйдет из точки с координатой $s(0) = 1$ на *бесконечность*. Очевидно, что это противоречит естественным физическим представлениям.

Допустим, что функция, выражающая закон движения тела, имеет разрыв типа «скачок», как это показано на рис. 58. Анализируя этот чертеж на языке физики, мы получим следующее: тело равномерно движется от начала отсчета до точки с координатой p, затем *мгновенно* оказывается *дальше* от начала отсчета, чем точка q, *не занимая при этом промежуточных положений*, а затем продолжает равномерное движение. Очевидно, что это противоречит естественным физическим представлениям.

(В) Приведем наглядные соображения[2] в пользу следующего утверждения: среди функций, описывающих движения макроскопического тела, всегда можно выбрать дифференцируемую функцию.

Пусть легкий упругий шарик падает на массивную плиту и отскакивает от нее. Для изучения движения шарика можно построить две модели. Первая из них основана на следующих простых допущениях: 1) шарик представляет собой материальную точку; 2) отскок происходит мгновенно. Вторая модель базируется на двух других допущениях: 1) шарик представляет собой тело конечного объема, а закон движения описывает положение центра тяжести шарика; 2) от-

---

[1] Более строгие рассуждения содержатся в следующей статье: Ястребов А.В. Физика как источник теорем дифференциального исчисления // Ярославский педагогический вестник. – 2002. – № 4. – С. 64-70.

[2] См. сноску 1 к пункту (Б).

скок происходит за конечное время за счет деформации шарика. Нетрудно видеть, что первая модель представляет собой функцию, не-

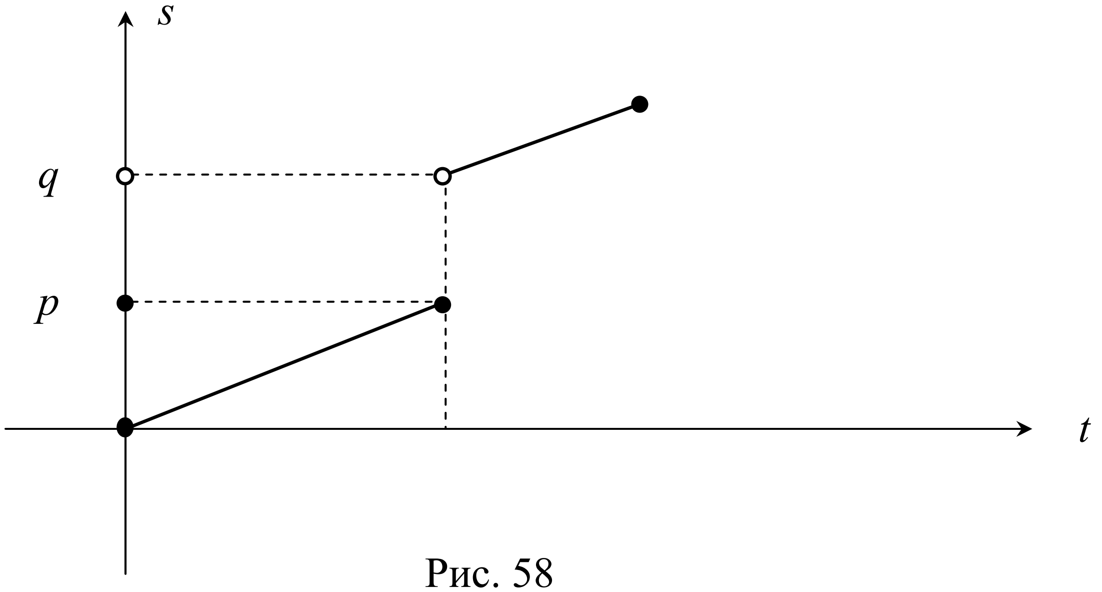


Рис. 58

дифференцируемую в те моменты времени, которые соответствуют моментам отскока. В то же время вторая модель является функцией, дифференцируемой при любых значениях аргумента.

Мы оставляем в стороне вопросы об адекватности данных моделей физическому явлению, об удобстве использования каждой из них, о целесообразности выбора той или иной модели при исследовании движения шарика в разные моменты времени. Здесь мы хотим лишь подчеркнуть, что каждая пара допущений является вполне естественной.

Теперь нетрудно показать, что далеко не всякая функция может служить законом движения реального физического тела. Рассмотрим, например, три последние функции из того списка, который приведен в пункте (Б), и будем считать, что они определены на отрезке $[0,1]$. Функция $\mathrm{s}(t) = \mathrm{sgn}\, t$ разрывна на указанном отрезке, поэтому она не может служить законом движения реального физического тела. Функция $s(t) = \arcsin t$ также не может служить законом движения тела, поскольку в противном случае тело достигло бы *бесконечно большой скорости* в момент окончания движения[3]. Если предположить, что функция $\mathrm{s}(t) = \sqrt{t}$ является законом движения тела, то мы

[3] $v(t) = s'(t) = (1-t^2)^{-1}$, так что $v(t) \to \infty$ при $t \to 1$.

придем к еще более парадоксальному результату: тело начинает свое движение с бесконечно большой скорости[4].

Обратимся теперь к основным теоремам дифференциального исчисления. Теорема Лагранжа и многочисленные следствия из нее справедливы для функций, которые удовлетворяют ряду условий: функции определены на замкнутом отрезке, непрерывны на нем и дифференцируемы внутри него. Очевидно, что эти условия полностью совпадают с теми свойствами законов движения тел, которые выведены в пунктах (А)–(В) из чисто физических соображений. Тем самым выявляется двойственная природа условий теорем дифференциального исчисления. С одной стороны, введение этих условий вызвано потребностями логики, поскольку каждое из них используется при доказательстве теорем, а невыполнение любого из них приводит к тому, что теоремы перестают быть справедливыми. С другой стороны, мы обнаружили, что эти чисто логические ограничения на функции оказались детерминированы свойствами окружающего нас физического мира.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующим рабочим ***определением:*** будем говорить, что функция $f(x)$ *подобна закону движения тела*, если она определена на отрезке $[a,b]$, непрерывна на нем и дифференцируема на интервале (a,b).

Рассуждения, приведенные в пунктах (А)–(В), означают, что между множеством функций, *являющихся* законами движения, и множеством функций, *подобных* закону движения, существует отношение включения: первое множество включается во второе.

16. Ознакомление с основными теоремами, или Физика как источник теорем дифференциального исчисления

Идея предлагаемой методики проста и естественна. Она состоит в том, чтобы побудить учащихся к *обоснованному переносу* свойств функций из класса законов движения тела на более широкое множество – класс функций, подобных закону движения тела. Для реализации этой идеи можно поступить следующим образом: актуализировать знания учащихся из курса физики, а затем поставить такие физические вопросы, перевод которых на язык математики приведет к формулировкам основных теорем.

---

[4] $v(t) = s'(t) = 1/2\sqrt{t}$, так что $v(t) \to \infty$ при $t \to 0$.

Предложим учащимся четыре вопроса, первые два из которых являются вспомогательными, а вторые два – основными.

Вопрос 1. Тело движется по прямой в течение некоторого отрезка времени. Сравните минимальную скорость $v_{\min}$, максимальную скорость $v_{\max}$ и среднюю скорость $v_{\text{ср}}$.

Практика показывает, что примерно 2/3 учащихся дает правильный ответ на этот вопрос: $v_{\min} \le v_{\text{ср}} \le v_{\max}$. При этом еще более 10% школьников дают «почти правильный» ответ $v_{\min} < v_{cp} < v_{\max}$. Этот последний, формально неверный, ответ мы называем «почти правильным», т.к. он не учитывает всего лишь один частный случай – случай равномерного движения[5].

Вопрос 2. Тело движется по прямой в течение некоторого отрезка времени. Сравните минимальную скорость $v_{\min}$, максимальную скорость $v_{\max}$ и мгновенную скорость $v(t)$ в произвольный момент времени t.

Практика показывает, что 30-40% учащихся дают правильный ответ $v_{\min} \le v(t) \le v_{\max}$, и еще примерно столько же дают «почти правильный» ответ $v_{\min} < v(t) < v_{\max}$. Вновь мы называем ответ «почти правильным», т.к. он не учитывает только один частный случай – случай совпадения момента времени t с моментом экстремальной скорости.

Два сформулированных вопроса выполняют функцию актуализации знаний. Они воссоздают на уроке *математики* атмосферу урока *физики*, заставляют учащихся мыслить в уже освоенных категориях: движение, скорость, мгновенная скорость и т.д. Значительное количество правильных ответов показывает, что знания физики представляют собой педагогически значимую величину.

На два нижеследующих вопроса ложится основная смысловая нагрузка, т.к. именно они приводят учащихся к самостоятельной или полусамостоятельной формулировке основных теорем математического анализа.

Вопрос 3. Тело движется по прямой в течение некоторого отрезка времени. Справедливо ли следующее утверждение: существует

[5] Точные данные содержатся в следующей статье: Ястребов А.В. Физика как источник теорем дифференциального исчисления // Ярославский педагогический вестник. – 2002. – № 4. – С. 64-70.

момент времени, такой, что скорость тела в этот момент равна средней скорости тела?

Очевидно, что существует только три априорных ответа на этот вопрос: 1) да; 2) нет; 3) не знаю. Один из этих ответов и предлагается выбрать учащимся.

Разъясним математическую и физическую сущности вопроса 3. Пусть $[a,b]$ – промежуток времени, в течение которого движется тело, $\mathrm{s}(t)$ – закон движения тела, а $v(t)$ – его мгновенная скорость. Утвердительный (и верный) ответ на вопрос 3 означает, что существует момент времени t_0, такой, что

$$v(t_0) = v_{cp} \qquad (1)$$

Скорость является производной от пути по времени: $v(t_0) = \mathrm{s}'(t_0)$. Средняя скорость по определению равна $v_{cp} = \dfrac{\mathrm{s}(b) - \mathrm{s}(a)}{b - a}$. Подставляя эти выражения в равенство (1), получим формулу

$$\mathrm{s}'(t_0) = \frac{\mathrm{s}(b) - \mathrm{s}(a)}{b - a}, \qquad (2)$$

которая представляет собой формулу Лагранжа.

Практика показывает, что примерно 70% учащихся дают правильный ответ. Кроме того, в случае необходимости учитель может сделать дополнительные пояснения, помогающие выбрать правильный ответ. Действительно, в процессе движения скорость варьируется между своим минимальным и максимальным значением. Естественно предположить, что в какой-то момент времени ее значение совпадет со средней скоростью тела.

Вопрос 4. Тело движется по прямой в течение некоторого отрезка времени, причем в конечный момент времени оно возвращается в исходное положение. Какова скорость тела в момент наибольшего удаления?

Очевидно, что существует четыре априорных ответа на этот вопрос: 1) больше нуля; 2) меньше нуля; 3) равна нулю; 4) не знаю. Один из этих ответов и предлагается выбрать учащимся.

Для выяснения сущности вопроса 4 воспользуемся предыдущими обозначениями. Верный ответ состоит в том, что скорость тела в момент наибольшего удаления равна нулю. Если t_0 – момент наибольшего удаления, то $v(t_0) = 0$, или $\mathrm{s}'(t_0) = 0$. Получается, что если $\mathrm{s}(b) = \mathrm{s}(a)$ (тело возвращается в исходное положение), то существует момент времени t_0, такой, что $s'(t_0) = 0$. Это утверждение является теоремой Ролля.

Для облегчения выбора правильного ответа на вопрос 4 учитель может провести следующие дополнительные рассуждения. Для определенности будем считать, что в момент наибольшего удаления t_0 тело имеет положительную координату. Допустим, что скорость тела в момент t_0 положительна. Тогда *по инерции* тело продвинется еще «чуть-чуть» дальше, так что момент t_0 не может быть моментом наибольшего удаления. Допустим, что скорость тела в момент времени t_0 отрицательна, то есть тело движется по направлению к началу отсчета. Тогда, опять-таки в силу инерции тела, в «близкий предшествующий» момент времени тело также двигалось по направлению к началу отсчета, то есть находилось от начала отсчета дальше, чем в момент времени t_0. Вновь мы видим, что момент t_0 не является моментом наибольшего удаления. Остается одна возможность – нулевая скорость. Впрочем, дополнительные рассуждения могут и не понадобиться, т.к. на практике процент правильных ответов на вопрос 4 столь же велик, как и на вопрос 3.

Покажем теперь, как подвести школьников к самостоятельной формулировке гипотез, доказательство истинности которых превратит эти гипотезы в теоремы математического анализа.

1) Ответ на вопрос 3 показывает, что для *закона движения тела* $s(t)$ существует момент времени t_0, для которого справедлива формула (2). Если мы распространим это утверждение на более широкое множество – на множество функций, *подобных закону движения тела* – то придем к следующей гипотезе.

Гипотеза 1 (Лагранж). Если функция $f(x)$ подобна закону движения тела, то существует такое значение аргумента x_0, что $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2) Ответ на вопрос 4 показывает следующее: если в конечный момент времени тело возвращается в исходное положение, то существует момент времени t_0, такой, что для *закона движения тела* справедливо равенство $s'(t_0) = 0$. Если мы распространим это утверждение на более широкое множество – на множество функций, *подобных закону движения тела* – то придем к следующей гипотезе.

Гипотеза 2 (Ролль). Если функция $f(x)$ подобна закону движения тела на отрезке $[a,b]$ и $f(a)=f(b)$, то существует такое значение аргумента x_0, что $f'(x_0)=0$.

3) Выведем из физических соображений критерий постоянства функции. Тот факт, что тело покоится в течение некоторого промежутка времени, можно выразить в одной из двух равносильных форм. Во-первых, можно сказать, что координата тела является константой, а во-вторых, что скорость тела тождественно равна нулю:

$$\mathrm{s}(t) \equiv const \Leftrightarrow \text{Тело покоится} \Leftrightarrow \mathrm{s}'(t) \equiv 0.$$

Удалив из рассуждения промежуточные звенья, мы получим, что для любого *закона движения тела* справедливо утверждение

$$\mathrm{s}(t) \equiv const \Leftrightarrow \mathrm{s}'(t) \equiv 0.$$

Если распространить полученную эквиваленцию на более широкий класс функций, а именно, на множество функций, *подобных закону движения тела*, то мы придем к следующей гипотезе.

Гипотеза 3 (критерий постоянства функции). Функция, подобная закону движения тела, постоянна тогда и только тогда, когда ее производная тождественно равна нулю:

$$f(x) \equiv const \Leftrightarrow f'(x) \equiv 0.$$

4) Выведем из физических соображений достаточное условие монотонности функции. Если скорость тела положительна, то это означает, что оно движется *вперед* без остановок и, следовательно, его координата возрастает. Другими словами, получаем, что для любого *закона движения тела* справедливо утверждение

$$\mathrm{s}'(t) = v(t) > 0 \Rightarrow \mathrm{s}(t) \text{ возрастает}.$$

Если распространить полученную импликацию на более широкий класс функций, а именно на множество функций, *подобных закону движения тела*, то мы придем к следующей гипотезе.

Гипотеза 4 (достаточное условие монотонности). Если функция подобна закону движения тела и ее производная положительна, то функция возрастает:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ возрастает.}$$

Подобные рассуждения можно было бы провести в отношении других теорем дифференциального исчисления. Многократные проверки показали, что учащиеся справляются с задачей распространения свойств движений на более широкий класс функций и самостоятельно получают в виде гипотез все основные теоремы дифференциального исчисления.

В заключение отметим, что возникновение математических утверждений в виде гипотез отнюдь не заменяет их строгого логического доказательства, даже если в процессе самостоятельного получения этих утверждений студенты продемонстрировали способность к математическому творчеству. В то же время нельзя недооценивать этот творческий акт. Прежде всего, весь массив изучаемых теорем появляется в короткое время, погружая учащихся в самую сердцевину математического анализа. Это обстоятельство дает преподавателю большую свободу в отношении дальнейших действий. Так, проверку гипотез можно сделать немедленной или отсроченной, выполнить эту проверку самому или отослать школьников к учебнику, заняться применением этих гипотез в физике или математике и проч. Выбор педагогом того или иного способа действий зависит от конкретной ситуации.

В качестве упражнения предлагаем читателю самостоятельно решить следующую задачу.

Задача. 1) Ответьте на следующий вопрос из области физики: «Тело движется по прямой в течение некоторого отрезка времени и в конечный момент времени возвращается в исходное положение. При этом оно меняет направление движения только один раз. Какова скорость тела в момент наибольшего удаления?» 2) Выведите из вашего ответа утверждение, касающееся функций и точек их локального экстремума.

Указание. Сравните это задание с вопросом 4 и гипотезой 2 данного раздела.

17. Логический анализ теорем

Один из методов логического анализа той или иной теоремы состоит в том, чтобы выявить существенность *каждого* из ее условий. Для этого нужно показать, что при отбрасывании одного из условий заключение теоремы перестает быть справедливым.

Докажем, что каждое из условий теоремы Ролля является существенным, то есть не может быть отброшено. Сначала выпишем их:

1) Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$.

2) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$.

3) Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b).

4) $f(a)=f(b)$.

1*. Прежде всего, мы не можем отбросить первое из условий, потому что в этом случае мы не сможем даже сформулировать несколько из оставшихся условий теоремы, так что сама формулировка теоремы потеряет смысл. Действительно, пусть функция определена на полусегменте $[a, b)$. В этом случае невозможно сформулировать ни условие 2, ни условие 4. Если из отрезка $[a, b]$ выколоть одну промежуточную точку c и рассмотреть функцию, определенную на множестве $[a, c) \cup (c, b]$, то в этом случае невозможно сформулировать ни условие 2, ни условие 3.

2*. Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1, 3 и 4 теоремы Ролля и не удовлетворяет условию 2, то есть является разрывной хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$. В качестве примера можно рассмотреть функцию $f(x) = \left[\begin{array}{l} x, \text{ если } 0 \le x < 1 \\ 0, \text{ если } x = 1 \end{array}\right.$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Прямым вычислением получаем, что ее производная находится по формуле $f'(x) = 1 \ne 0$ при $0 < x < 1$. Отсюда следует, что для функции $f(x)$ не выполняется заключение теоремы Ролля и, следовательно, условие 2 теоремы является существенным.

3*. Допустим, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 4 теоремы Ролля и не удовлетворяет условию 3, то есть не имеет производной хотя бы в одной точке интервала (a, b). В качестве примера можно рассмотреть функцию $g(x) = |x|$, определенную на отрезке $[-1, 1]$. Прямым вычислением получаем, что ее производная находится по формуле $f'(x) = \left[\begin{array}{l} -1, \text{ если } -1 < x < 0 \\ 1, \text{ если } 0 < x < 1 \end{array}\right. \ne 0$. Отсюда следует, что для функции $f(x)$ не выполняется заключение теоремы Ролля и, следовательно, условие 3 теоремы является существенным.

4*. Допустим, наконец, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 3 теоремы Ролля и не удовлетворяет условию 4, то есть ее значения на концах отрезка различны. В качестве примера можно рассмотреть функцию $h(x) = x$, определенную на отрезке $[0, 1]$. Прямым вычислением получаем, что ее производная находится по формуле $h'(x) = 1 \ne 0$. Отсюда следует, что для функции $h(x)$ не выполняется заключение теоремы Ролля и, следовательно, условие 4 теоремы является существенным.

Приведенный выше логический анализ использует весьма простые функции – линейную функцию и модуль. Тем не менее, анализ такого рода психологически труден для учащихся. Одна из причин состоит в том, что такой анализ противоречит многолетнему математическому опыту детей. Действительно, в течение многих лет школьник был ориентирован на то, чтобы *доказывать* различные утверждения, проводя при этом *общие рассуждения*. Цель логического анализа прямо противоположна, поскольку требует *опровергнуть* заключение утверждения, приводя при этом *контрпример*. Другая причина состоит в том, что при поиске или построении контрпримера учащийся имеет чрезвычайно большую свободу и весьма мало ориентиров, указывающих на то, в каком направлении нужно мыслить. Наконец, данная теорема имеет одну особенность, связанную с соотношением между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Обратимся к пункту 2* нашего анализа, в котором мы отказываемся от условия непрерывности на *отрезке* $[a, b]$ и сохраняем остальные условия. Как правило, от учащихся ускользает тот факт, что мы сохраняем требование дифференцируемости на *интервале* (a, b), вследствие чего искомая функция должна быть *непрерывна на интервале* (a, b). Тем самым оказывается, что искомая разрывная функция должна иметь разрыв в *граничной* точке отрезка $[a, b]$. Именно такой пример и был предъявлен нами в пункте 2*.

Отдельного разговора заслуживает вопрос о том, какое умственное действие совершает учащийся при работе с контрпримерами – поиск или построение. Поиск – это *выбор* нужного объекта из списка объектов, известных учащемуся. Построение – это *изобретение* нужного объекта, не существовавшего ранее или не служившего объектом рассмотрения. На первый взгляд, учащиеся должны осуществить поиск, поскольку в наших контрпримерах используются хорошо известные функции: линейная функция и модуль. Тем не менее, более подробное рассмотрение говорит о том, что мы изобретаем контрпример. Для примера рассмотрим функцию $h(x) = x$, где $[0, 1]$, из пункта 4* и сравним ее со стандартной функцией $\varphi(x) = x$. Как правило, от учащихся ускользает тот факт, что это совершенно разные функции! У них разные области определения, разные множества значений и разные графики. Одна из них ограничена, а другая неограничена. Одна из них является нечетной, а другая – функцией общего вида. Таким образом, переходя от хорошо известной функции $\varphi(x) = x$ к новой функции $h(x) = x$, где $[0, 1]$, учащийся делает маленькое изобретение, а это всегда трудно. Еще более трудным является изобретение функции $f(x)$ из пункта 2*, поскольку для этого учащемуся придется проделать несколько *неформализуемых* действий, причины каждого из которых трудноуловимы: рассмотреть линейную функцию, сузить ее на отрезок $[0, 1]$, изменить значение функции в точке 1.

Частный пример с функциями $\varphi(x) = x$ и $h(x) = x$, где $[0, 1]$, иллюстрирует одно общее обстоятельство: при сужении функции на некоторое подмножество ее области определения новая функция может потерять многие свойства своего прототипа и приобрести новые свойства. Именно это обстоятельство можно использовать при определении обратных тригонометрических функций. Действительно, функция $\varphi(x) = \sin x$ необратима, поскольку является периодической. В отличие от нее, функция $\psi(x) = \sin x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, обратима, поскольку монотонно возрастает на области определения. Это дает возможность дать определение арктангенса как функции, обратной к функции $\psi(x)$.

В качестве упражнения рекомендуем читателю самостоятельно провести логический анализ теорем, сформулированных в предыдущем разделе в виде гипотез 1, 3, 4.

Разумеется, приведенный выше метод логического анализа теоремы не является единственно возможным. Простым, но эффективным приемом логического анализа является выявление в тексте доказательства тех его фрагментов, в которых использовано то или иное условие теоремы. Другой прием относится к теоремам, имеющим вид импликации $A \Rightarrow B$. Для таких теорем целесообразно систематически задавать два взаимосвязанных вопроса: 1) Является ли необходимое следствие посылки A, то есть утверждение B, условием, достаточным для выполнения утверждения A? 2) Является ли условие A, достаточное для выполнения утверждения B, необходимым следствием утверждения B? Оба эти вопроса можно объединить в один: справедлива ли обратная теорема $B \Rightarrow A$? Например, применительно к достаточному условию монотонности вопросы могут звучать так: 1) Достаточно ли возрастания функции на отрезке $[a, b]$ для положительности ее производной? 2) Является ли положительность производной на отрезке $[a, b]$ необходимым следствием возрастания функции? 3) Справедливо ли утверждение, обратное достаточному условию монотонности? Ответы на эти вопросы являются отрицательными, что следует из рассмотрения канонического примера – функции $f(x) = x^3$, рассматриваемой на отрезке $[-1, 1]$.

Еще одним приемом логического анализа теорем может считаться решение задач, в которых требуется выяснить применимость изучаемой теоремы к тому или иному конкретному объекту. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Применима ли теорема Лагранжа к данной функции на данном отрезке?

1) $f(x) = \sin x + \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [0, 2]$; 2) $f(x) = \sin x + \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

3) $g(x) = |x| - |\sin x|$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $g(x) = |x| - |\sin x|$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. 1) В формуле, задающей функцию $f(x)$, оба слагаемых непрерывны во всех точках вещественной оси. Производная имеет вид $f'(x) = \cos x + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ и существует во всех точках интервала $(0, 2)$. Отсюда следует, что теорема Лагранжа применима к функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2]$.

2) Решая задание 2, мы получим ту же самую формулу для производной и можем повторить наши аргументы о непрерывности функции. Однако производная не существует в точке 0 из интервала $(-1, 1)$. Отсюда следует, что теорема Лагранжа не применима к функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$.

Итак, применимость или неприменимость теоремы Лагранжа существенным образом зависит не только от аналитического задания функции, но и отрезка, на котором она рассматривается.

3) В формуле, задающей функцию $g(x)$, уменьшаемое и вычитаемое непрерывны во всех точках вещественной оси. Кроме того, уменьшаемое и вычитаемое дифференцируемы во всех точках интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ за исключением точки 0. В точке 0 *оба они* не дифференцируемы. Покажем, что функция $g(x)$ дифференцируема также и в точке 0. Воспользуемся определением производной:
$$g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(0+t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t| - |\sin t|}{t} = \lim_{t \to 0} \left(\frac{|t|}{t} - \frac{|\sin t|}{t}\right) =$$
$= \lim_{t \to 0} \left(\pm 1 - \frac{|\sin t|}{t}\right) = \pm 1 - (\pm 1) = 0$. Знаки плюс или минус на последних шагах наших вычислений соответствуют знаку переменной t и, следовательно, друг другу.

Окончательно получаем, что функция $g(x)$ дифференцируема во всех точках интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда следует, что теорема Лагранжа применима к функции $g(x)$ на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решая задание 3, мы встретились с ситуацией, часто ускользающей от внимания учащихся: сумма двух недифференцируемых функций может быть дифференцируемой.

4) В формуле, задающей функцию $g(x)$, уменьшаемое и вычитаемое непрерывны во всех точках вещественной оси. Кроме того, уменьшаемое дифференцируемо во всех точках интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{2}\right)$. Однако в точке π имеется существенная особенность: *уменьшаемое дифференцируемо, а вычитаемое – нет.* Следовательно, функция $g(x)$ недифференцируема в одной из точек изучаемого интервала, а значит, теорема Лагранжа не применима к функции $g(x)$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Завершая обсуждение задачи, отметим следующее. В процессе решения мы не просто проверили применимость теоремы Лагранжа, тренируясь тем самым в ее логическом анализе. Попутно мы совершили повторение некоторой части ранее изученного материала, обнаружив при этом ряд тонких моментов.

18. Применения теорем дифференциального исчисления

Применение основных теорем дифференциального исчисления и их ***взаимосвязи*** с другим математическом материалом раскрываются как в теоретической части курса путем выведения следствий, так и в процессе решения задач. Приведем несколько примеров, которые, с нашей точки зрения, достаточно выразительны.

Задача 1. Функция $f(x) = e^x$ обладает тем свойством, что она равна своей производной: $(e^x)' = e^x$. Существуют ли еще какие-нибудь функции, обладающие этим свойством?

Решение. Пусть функция $f(x)$ такова, что $f'(x) = f(x)$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ и вычислим ее производную: $\varphi'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0$. Поскольку это равенство выполняется при всех x, получаем, что $\varphi(x) = C = \text{const}$. Из определения функции $\varphi(x)$ получаем, что $f(x) = Ce^x$. Прямой проверкой получаем, что функции из полученного семейства действительно обладают требуемым свойством. Этим исчерпываются все решения уравнения $f'(x) = f(x)$.

Уравнение $f'(x) = f(x)$ – это новый для учащихся тип уравнений, в котором неизвестным является *функция* (а не число, как это бывает обычно) и которое содержит неизвестную функцию и ее производную. Таким образом, педагогико-математическая суть задачи 1 состоит в том, что в процессе решения мы выявляем для учащихся связь теоремы Лагранжа с дифференциальными уравнениями, осуществляя тем самым *пропедевтику* понятия «дифференциальное уравнение».

Задача 2. Докажите, что уравнение $x^3 + 3x - 6 = 0$ имеет только один корень.

Решение. Рассмотрим многочлен $f(x) = x^3 + 3x - 6$. Его степень нечетна, поэтому он имеет корень. Остается доказать единственность корня. Дальнейшее решение задачи может зависеть от того, на каком этапе изучения она предлагается учащимся. Приведем решение задачи для того момента учебного процесса, когда терема Ролля уже известна, а достаточное условие монотонности еще не изучено. Допустим, уравнение имеет два корня p и q, первый из которых меньше второго. К многочлену $f(x)$ и отрезку $[p, q]$ применима теорема Ролля, поскольку $f(p) = f(q) = 0$. Следовательно, должно существовать число c из интервала (p, q), такое, что $f'(c) = 0$. Однако это невозможно, поскольку $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$.

Итак, задача 2 выявляет для учащихся связь теоремы Ролля с алгебраическими уравнениями.

Задача 3. Докажите, что при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ выполняется неравенство $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

Решение. На промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x - x - x^3/3$. Ее производная $f'(x) = (\operatorname{tg} x - x)(\operatorname{tg} x + x)$ положительна на интервале $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, т.к. на этом интервале $x > 0$, $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x > x$. На основании теоремы о монотонности функции можно утверждать, что $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Поскольку в начальной точке промежутка $f(0) = 0$, в остальных точках промежутка $f(x) > 0$, то есть $\operatorname{tg} x - x - x^3/3 > 0$, или $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$.

Итак, задача 3 выявляет для учащихся связь теоремы о монотонности функции с неравенствами. Кроме того, доказанное неравенство усиливает ранее изученное неравенство $\operatorname{tg} x > x$. Наконец, осуществляется пропедевтика (правда, выраженная достаточно слабо) представлений о разложении функции в степенной ряд: выражение $x + \dfrac{x^3}{3}$ – это два первых ненулевых члена ряда Тейлора для тангенса.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ

1. Виды теорем и логические основы доказательства.
2. Активизация познавательной деятельности учащихся при работе с теоремой.
3. Теорема Пифагора.
4. Теорема Вариньона.
5. Теорема косинусов.
6. Применение тригонометрии в исследовании зависимостей между элементами треугольника. Теорема Морлея.
7. Ознакомление с теоремами по изучению векторов в пространстве.
8. Основные теоремы по изучению свойств движений.
9. Иррациональные уравнения.
10. Применение теорем интегрального исчисления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра и начала математического анализа 10 (11) класс [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильн. уровни / С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин. – М.: Просвещение, 2009.
2. Геометрия [Текст]: учеб. для 7–9 кл. ср. школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов и др. – М.: Просвещение, 2009.
3. Готман, Е. Г., Скопец, З. А. Задача одна – решения разные : Геометрические задачи [Текст]: книга для учащихся. – М.: Просвещение, 2000.
4. Гусев, В. А. Психолого-педагогические основы обучения математике [Текст]. – М.: «Вербум-М»; «Академия», 2003.
5. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся доказательству математических предложений [Текст]: книга для учителя. – М.: Просвещение, 2006.
6. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода [Текст]: книга для учителя. – М.: Просвещение, 2003.
7. Иванова, Т. А. и др. Теоретические вопросы обучения математике в средней школе [Текст] / под ред. Т.А. Ивановой. – Н. Новгород, НГПУ, 2003.
8. Иванова, Т. А. и др. Теория и технология обучения математике в средней школе [Текст]. – Н. Новогород: НГПУ, 2009.
9. Иванова, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика [Текст]: книга для учителя. – Н. Новгород: НГПУ, 2010.
10. Колягин, Ю. М. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст]: учебное пособие. – Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 2009.
11. Корикова, Т. М., Суслова, И. В. Элементарная математика. Стереометрия [Текст]: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006.
12. Корикова, Т. М., Ястребов, А. В. Справочные материалы по общей методике преподавания математики [Текст]. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009.
13. Маркова, А. К. и др. Формирование мотивации учения [Текст]. – М.: Просвещение, 1990.
14. Пойа, Д. Математическое открытие [Текст]. – М.: Наука, 1970.
15. Потоскуев, Е. В. Геометрический компонент профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе [Текст]: учебно-методическое пособие. – Тольятти: ТГУ, 2009.
16. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе [Текст]. – М.: Просвещение, 2002.
17. Стефанова, Н. Л. и др. Методика и технология обучения математике [Текст]: курс лекций / под ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.
18. Ястребов, А. В. Задачи по общей методике преподавания математики [Текст]. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009.

Учебное издание

Тамара Михайловна Корикова
Ирина Васильевна Суслова
Александр Васильевич Ястребов

ИЗБРАННЫЕ ТЕОРЕМЫ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ В ДЕТАЛЯХ И НЮАНСАХ

Учебное пособие

Редактор О. П. Новикова
Компьютерная верстка – И. В. Тимашев

Подписано в печать 25.11.2010. Формат 60x92/16
Объем 7 п.л.; 4,3 уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Заказ № 365.

Издательство Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 32-98-69, 72-64-05