Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского»

Итоговая аттестация студентов педагогического факультета (по курсам «Математика» и «Методика преподавания математики»)

Методическое пособие

Ярославль
2011

УДК 510;371.32; 372.851; 51
ББК 74.262.21-7р30
И93

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Рецензент:
канд. псих. наук, доцент кафедры педагогики и психологии начального обучения ЯГПУ им. К. Д. Ушинского
Т. Г. Шкатова

И93 **Итоговая аттестация студентов педагогического факультета (по курсам «Математика» и «Методика преподавания математики»)** : методическое пособие / составители: И.В. Налимова, М.В. Лобашова. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2011. – 63 с.

Методическое пособие включает материалы к итоговой аттестации выпускников направления «Педагогика» и специальности «Педагогика и методика начального обучения»: программа экзамена, методические указания к изложению теоретических вопросов, примеры практических заданий.

Данное издание предназначено для студентов выпускных курсов дневного и заочного отделений педагогического факультета.

Составители:
канд. пед. наук, доцент кафедры методики преподавания естественно-математических дисциплин в начальной школе *И.В. Налимова;*
ст. преподаватель кафедры методики преподавания естественно-математических дисциплин в начальной школе *М.В. Лобашова.*

УДК 510;371.32; 372.851; 51
ББК 74.262.21-7р30

СОДЕРЖАНИЕ

ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО ТЕОРЕТИЧЕСКИМ ОСНОВАМ И ТЕХНОЛОГИИ НАЧАЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Особенности математики как учебной дисциплины, изучаемой в начальной школе. Цели и содержание математического образования младших школьников.

Понятие математической модели. Использование метода моделирования при решении учащимися начальных классов задач на движение.

Математические понятия и их определение. Виды определений в начальной школе.

Логические понятия в начальном курсе математики. Геометрические понятия начального курса математики. Ознакомление младших школьников с геометрическими фигурами.

Алгебраические понятия в начальном курсе математики. Ознакомление учащихся начальных классов с понятиями «выражение», «переменная», «уравнение».

Различные подходы к определению натурального числа: аксиоматический, теоретико-множественный, подход с точки зрения измерения величин. Особенности формирования понятий «натуральное число» и «ноль» в начальной школе.

Понятие бинарного отношения на множестве. Способы задания отношений. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка. Методика формирования понятий «больше», «меньше», «равно» в начальном курсе математики.

Различные подходы к определению операции сложения на множестве натуральных чисел. Особенности составления таблицы сложения в пределах десяти.

Различные подходы к определению операции умножения натуральных чисел. Особенности составления таблицы умножения однозначных чисел.

Различные подходы к определению операции вычитания натуральных чисел. Особенности изучения табличных случаев вычитания чисел в пределах 20 с переходом через разряд.

Различные подходы к определению операции деления натуральных чисел. Особенности изучения табличных случаев деления.

Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел и его свойства. Особенности изучения темы «Внетабличное деление».

Позиционные и непозиционные системы счисления и их применение. Особенности ознакомления младших школьников с многозначными числами.

Понятие дроби на основе расширения множества целых чисел до множества рациональных чисел.

Методика ознакомления с положительными и отрицательными числами по программе Л.В. Занкова на основе расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел.

Множества и операции над ними в курсе математики начальной школы.

Понятие развивающего обучения. Приемы познавательной деятельности и их формирование при обучении математике. Средства развивающего обучения – приемы активизации познавательной деятельности.

Понятие о геометрической величине и ее измерении в начальной школе.

Интуитивное понятие алгоритма. Способы записи алгоритмов. Использование алгоритмов в начальном курсе математики.

Понятие «текстовая задача», классификация задач. Процесс решения текстовых задач учениками начальных классов.

Решение текстовых задач с пропорциональными величинами на основе функциональной зависимости между величинами.

Понятие комбинаторной задачи. Правила суммы и произведения. Решение комбинаторных задач в курсе математики начальной школы методом перебора.

Пропедевтика информатики в начальном курсе математики. Использование компьютера в процессе обучения математики.

Понятие об аксиоматическом методе построения математической теории. Требования, предъявляемые к аксиоматике. Применение аксиоматического метода в арифметике или геометрии.

ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕТОДИКЕ ЕЕ ПРЕПОДАВАНИЯ

Особенности математики как учебной дисциплины, изучаемой в начальной школе.

Понятие об аксиоматическом методе построения математической теории. Применение аксиоматического метода в арифметике и геометрии. Методика изучения отрезка натурального ряда.

Различные подходы к определению натурального числа (теоретико-множественный, аксиоматический подходы и подход с точки зрения измерения величин). Методика формирования понятий «натуральное число» и «ноль» в начальной школе.

Операция сложения на множестве натуральных чисел, различные способы истолкования операции и ее свойств. Методика составления таблицы сложения в пределах десяти.

Операция умножения натуральных чисел, различные способы истолкования операции и ее свойств. Методика составления таблицы умножения однозначных чисел.

Операция вычитания натуральных чисел и различные способы ее истолкования. Методика изучения табличных случаев вычитания чисел в пределах 20 с переходом через десяток.

Позиционные и непозиционные системы счисления и их применение. Методика изучения нумерации многозначных чисел.

Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел и его свойства. Признаки делимости суммы, разности и произведения. Признаки делимости для десятичной системы счисления на 2, 3, 5, 10. Методика изучения темы «Внетабличное деление».

Понятие комбинаторной задачи. Правила суммы и произведения. Решение комбинаторных задач в курсе математики начальной школы методом перебора.

Методика ознакомления с положительными и отрицательными числами по программе Л.В. Занкова на основе расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел.

Использование практического метода обучения при изучении дробей в начальном курсе математики.

Элементы математической логики в курсе математики начальной школы (высказывания и высказывательные формы, логические операции и кванторы).

Алгебраические понятия начального курса математики и методика введения этих понятий.

Понятие положительной скалярной величины и ее измерения. Аддитивно-скалярные величины, изучаемые в курсе математики начальной школы.

Методика формирования понятия о геометрической величине в начальной школе и ее измерении.

Решение текстовых задач с пропорциональными величинами на основе понятия функциональной зависимости между величинами.

Использование приема моделирования при обучении решению задач на движение.

Геометрические фигуры, рассматриваемые в курсе математики начальной школы, их построение и свойства.

Элементы теории множеств в начальном курсе математики (множество и его элементы, способы задания множеств, отношения между множествами, операции над множествами). Понятие бинарного отношения. Способы задания отношений. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка. Методика формирования понятий «больше», «меньше», «равно» в начальном курсе математики на основе теории бинарных отношений на множестве.

Алгоритмы арифметических действий в десятичной системе счисления и теоретические положения, лежащие в их основе. Применение алгоритмов в процессе выполнения письменных вычислений сложения и вычитания.

Особенности содержания и организации внеучебной работы по математике в начальных классах.

Пропедевтика информатики в начальном курсе математики. Использование компьютера в процессе обучения математике.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ПРАКТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

1. Как познакомить учеников со свойством «деление суммы на число», используя методы: а) эвристической беседы; б) объяснения; в) самостоятельной работы по учебнику?

2. Что такое варьирование отличительных и несущественных признаков объектов, входящих в объем данного понятия? Подберите задания на варьирование отличительных и несущественных признаков объектов, входящих в объем понятий: «окружность», «уравнение», «отрезок», «ломаная», «трехзначное число».

3. Куча песка имеет коническую форму, радиус основания которой 3 дм, а образующая 4 дм. Найдите объем кучи песка. Какой способ измерения объема кучи песка могли бы предложить учащиеся начальной школы? Среди предметов классной обстановки укажите те, форму которых можно описать с помощью геометрической фигуры конус.

4. Три латунных куба с ребрами 3 см, 4 см, 5 см переплавили в один куб. Чему равна длина ребра у этого куба? Какие теоретические положения используются при решении задачи? Какую приближенную оценку должны бы указать учащиеся начальной школы, вычисляя длину ребра куба?

5. Постройте с помощью циркуля и линейки прямоугольник, у которого известны его стороны: *а* и *в*. Как будут решать эту задачу ученики начальной школы? Приведите рассуждения учеников.

6. С какой целью можно включить в урок следующее задание: вставьте вместо многоточия слова «нужно» либо «можно» так, чтобы высказывания были истинными; ответы обоснуйте: а) для того чтобы сумма натуральных чисел делилась на число 5, …, чтобы каждое слагаемое делилось на 5; б) для того чтобы фигура была квадратом, …, чтобы она была прямоугольником. Опишите методику работы с заданием по достижению поставленной Вами цели. (В начальном курсе математики синонимом слова «необходимо» является слово «нужно» («надо»), а синонимом слова «достаточно» – слово «можно»).

7. Покажите, что выполнение данного задания связано с понятиями: множество, соответствие, взаимно однозначное соответствие,

равномощные множества. Опишите возможную организацию включения их в урок с целью формирования представлений о соответствиях у младших школьников. Задача: Оля знает 5 сказок, а Таня на 2 сказки больше. Сколько сказок знает Таня?

8. Установите логическую структуру высказывания. Истинно оно или ложно? Постройте отрицание этого высказывания. Постройте разными способами отрицания высказываний (со словами *все, любой, каждый, некоторые, существует, с отношениями больше, меньше, равно* и т.п.): а) Все мыши серые; б) Число *а* не меньше числа *в*.

9. Покажите теоретико-множественный смысл записи 3 · 4. нужно ли раскрывать этот смысл детям? Для чего? Как? Опишите один из возможных вариантов соответствующей организации деятельности учащихся.

10. С какой целью можно предложить следующее задание учащимся начальной школы? Опишите методику работы с заданием по достижению цели. Задание: при измерении длины отрезка один ученик получил число 2, второй – 4, а третий – 5. Как это могло получиться?

11. Какое из приведенных ниже определений вы считаете правильными:

А) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые и противоположные стороны равны.

Б) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого все углы прямые.

В) Прямоугольником называется четырехугольник, у которого противоположные стороны равны.

Какое определение положено в основу формирования представлений о прямоугольнике у учащихся начальных классов? Какие методы и приемы обучения используются для этой цели?

12. На примере умножения числа 1547 на число 8 покажите, какие теоретические положения лежат в основе алгоритма умножения многозначного числа на однозначное.

13. Проанализируйте, какие действия и операции выполняются при умножении числа 384 на 753.

14. Какие виды мышления формируются у учащихся начальных классов в обучении математике? Приведите примеры использования учащимися начальных классов конкретного и абстрактного видов мышления в обучении математике.

15. Какой метод обучения целесообразно использовать при ознакомлении учащихся с порядком выполнения действий, при введении понятия произведения, деления с остатком? Почему?

16. Перечислите методы, используемые в начальной школе при изучении нового материала по математике. Проиллюстрируйте использование каждого метода на конкретных примерах.

17. Как познакомить учеников со свойством «деление суммы на число», используя методы: а) эвристической беседы; б) объяснения; в) самостоятельной работы по учебнику?

18. Приведите из начального курса математики примеры определений по схеме «вид» есть «род» и «видовое отличие».

19. Что такое варьирование отличительных и несущественных признаков объектов, входящих в объем данного понятия? Подберите задания на варьирование отличительных и несущественных признаков объектов, входящих в объем понятий: «окружность», «уравнение», «отрезок», «ломаная», «трехзначное число».

20. Какое различие имеется в понятиях «круг» и «окружность»? Какая связь существует между этими понятиями? Как разъяснить учащимся это различие?

21. Дети лучше усваивают способы деятельности, если их сообщают в форме алгоритмических предписаний. Приведите примеры таких формулировок по начальному курсу математики.

22. Проверьте решение задачи приемом «составление и решение обратной задачи». Сформулируйте несколько заданий для учащихся, выполнение которых способствовало бы формированию у них умения проверять решение задачи названным в задании приемом?

«Один мастер работал 5 часов, а второй – 7 часов. Вместе они сделали 420 деталей. Сколько деталей сделал каждый, если они работали с одинаковой производительностью?»

23. Представьте содержание задачи в виде рисунка, чертежа так, чтобы смысл описанного в ней отношения был понятен учащимся: а) с высоким уровнем математической подготовки; б) с низким уровнем математической подготовки. Как построить работу с данной задачей для достижения педагогической цели

учить детей выражать отношения «больше (меньше) в (на)» с помощью числовых равенств? Опишите фрагмент урока.

24. «Автобус ехал со скоростью 10 км / ч, а грузовая машина в 2 раза быстрее. С какой скоростью ехала грузовая машина?»

Проверьте решение приведенной задачи приемом «установление соответствия между результатом решения и условием задачи».

25. Сформулируйте несколько заданий для учащихся, выполнение которых способствовало бы формированию у них умения проверять решение задачи названным в задаче приемом.

«Две машинистки напечатали 400 страниц. Первая получила за работу 105 р., а вторая – 95 р. Сколько страниц напечатала каждая машинистка, если печатание одной страницы им оплачивается поровну?»

26. Составьте задачу по выражению и запишите ее решение в другой форме. Решите задачу другим способом. С какой целью можно включить данное задание в процесс обучения? Сформулируйте несколько других заданий для учащихся, выполнение которых способствовало бы реализации одной из названных вами целей.

$45 \cdot (57 + 17)$.

27. Покажите на предметах, рисунках или геометрических фигурах смысл предложения: «Восемь больше пяти на три». Опишите методику работы с заданием на уроке.

28. Подберите или составьте задания для обучения детей умению показывать смысл любой данной дроби с помощью геометрических фигур.

29. Найдите в учебниках математики для начальной школы или составьте задания, с помощью которых учащиеся овладевают названными ниже знаниями и умениями. Опишите методику работы с этими заданиями на уроке: «Смысл и содержание понятия «скорость».

30. Как показать учащимся необходимость одинаковой для всех единицы измерения массы?

31. О каких величинах речь идет в задаче? Какая существует между ними зависимость? Решите задачу несколькими способами: «12 кг варенья разложили в 6 банок поровну. Сколько надо банок, чтобы разложить 24 кг варенья?»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ОТВЕТАМ НА ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРОГРАММЫ ЭКЗАМЕНА

Решение текстовых задач с пропорциональными величинами на основе понятия функциональной зависимости между величинами.

В основе решения задач с пропорциональными величинами лежит функциональная зависимость между различными величинами. Понимание функции как математической модели реальных процессов определяет общекультурный аспект изучения математики. В связи с этим ученики должны уметь видеть функциональную зависимость не только в алгебраических формулах, но и в других школьных предметах и в жизни.

Дайте определение функциям: прямая пропорциональность и обратная пропорциональность. Сформулируйте свойство этих функций при том условии, что значениями переменных х и у служат положительные действительные числа. Покажите, как ими можно пользоваться при решении текстовых задач.

Множество задач, в которых имеется одинаковая зависимость между величинами, входящими в эти задачи, при возможном различии их числовых данных и содержания образуют определенный тип задач. Следовательно, все задачи данного типа решаются одним и тем же приемом. Из задач, решаемых учениками начальных классов, можно выделить следующие типы:

1. Задачи на нахождение четвертого пропорционального.
2. Задачи на пропорциональное деление.
3. Задачи на нахождение неизвестного по двум разностям.

В задачах на нахождение четвертого пропорционального входят три величины, связанные прямо или обратно пропорциональной зависимостью. При этом для одной величины даны два значения, для второй задано одно значение, а другое надо найти, значение третьей величины не дается, но указывается, что оно постоянно.

При решении задач на нахождение четвертого пропорционального существуют следующие способы: способ прямого приведения к единице, способ обратного приведения к единице, способ отношений.

Основным признаком задач на пропорциональное деление является содержащееся в них требование распределить одно числовое значение величины пропорционально данным числам. В такую задачу входят три пропорциональные величины, для одной величины дается два значения, для другой сумма значений, требуется найти каждое, а третья величина постоянна.

Если в задачах на пропорциональное деление заменить сумму двух значений величины их разностью, то можно получить новый тип задач, в которых одним из данных будет разность двух значений одной величины. Эти задачи получили название «задачи на нахождение неизвестного по двум разностям».

Привести пример задачи каждого типа и разобрать ее.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 7, 9, 14.

Понятие математической модели. Использование приема моделирования при обучении решению задач на движение

Математическая модель – это описание какого-либо реального процесса на математическом языке. Для успешного формирования умения учиться ученик должен уметь моделировать.

Примером применения метода моделирования может служить обучение решению текстовых задач. В процессе решения задачи четко выделяются три этапа математического моделирования:

1 этап – это перевод условий задачи на математический язык, при этом выделяются необходимые для решения данные и искомые. Математическими способами описываются связи между ними;

2 этап – внутримодельное решение (т.е. нахождение значения выражения, выполнение действий, решение уравнения);

3 этап – интерпретация, т.е. перевод полученного решения на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Наибольшую сложность в процессе решения текстовой задачи представляет перевод текста с естественного языка на математический, то есть 1 этап математического моделирования. Чтобы облегчить эту процедуру, строят вспомогательные модели – схемы, таблицы. Тогда процесс решения задачи можно рассматривать как переход от одной модели к другой: от словесной

модели реальной ситуации, представленной в задаче, к вспомогательной (схемы, таблицы, рисунки и так далее), от нее – к математической, на которой происходит решение задачи.

Прием моделирования заключается в том, что для исследования какого-либо объекта (в нашем случае текстовой задачи) выбирают (или строят) другой объект, в каком-то отношении подобный тому, который исследуют. Построенный новый объект изучают, с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результат переносят на первоначальный объект.

Модели бывают разные. Все модели можно разделить на схематизированные и знаковые по видам средств, используемых для их построения.

Схематизированные модели, в свою очередь, делятся на вещественные и графические, в зависимости от того, какое действие они обеспечивают. Вещественные (или предметные) модели текстовых задач обеспечивают физическое действие с предметами. Они могут строиться из каких-либо предметов (пуговиц, спичек, бумажных полосок и так далее), они могут быть представлены разного рода инсценировками сюжета задач. К этому виду моделей причисляют и мысленное воссоздание реальной ситуации, описываемой в задаче, в виде представлений.

Графические модели используются, как правило, для обобщенного схематического воссоздания ситуации задачи. К графическим следует отнести следующие виды моделей:

1) рисунок;
2) условный рисунок;
3) чертеж;
4) схематический чертеж (или просто схема).

Основная особенность задач на движение состоит в том, что они построены на основе функциональной зависимости между величинами: скорость, время, расстояние. При рассмотрении задач на движение в начальной школе всегда предполагается, что движение прямолинейное и равномерное на определенном участке, что позволяет использовать прямую и обратную пропорциональную зависимость между величинами: скорость, время, расстояние.

Среди задач на движение в начальных классах рассматривают задачи, в которых описывается движение одного тела, и задачи на одновременное движение двух тел, последние можно разделить на задачи на встречное движение и движение в противоположных направлениях. Прежде всего, ученикам следует разъяснить новое для них понятие «скорость». Затем знакомят детей со связью между величинами: скорость, время, расстояние. Для этого можно рассмотреть три взаимообратные задачи.

Особое место занимают задачи на одновременное движение двух тел: встречное и задачи на удаление. На уроке предусматривается разъяснить ученикам решение сразу трех задач, одну – на нахождение расстояния, другую – на нахождение скорости и третью – на нахождение времени. При решении этих задач вводится новое понятие «скорость сближения» или «скорость удаления». При решении задач на движение используются схемы, отражающие как отношения между величинами, так и процесс движения.

Привести примеры задач и построить модели условия.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 4, 7, 9, 16.

Операция деления натуральных чисел и различные способы ее истолкования. Методика изучения табличных случаев деления.

Операция деления на множестве натуральных чисел рассматривается как операция, обратная умножению.

При аксиоматическом построении теории натуральных чисел определение операции деления задается так: делением натуральных чисел *а* и *в* называется операция, удовлетворяющая условию: а : в = с тогда и только тогда, когда в · с = а. Число а – делимое, число в – делитель, число а : в – частное чисел а и в.

Алгебраической операцией деление на **N** не является. Есть только необходимое условие существования частного: для того чтобы существовало частное двух натуральных чисел *а* и *в*, необходимо, чтобы в ≤ а. Если частное натуральных чисел *а* и *в* существует, то оно единственно.

Теоретико-множественный смысл частного натуральных чисел: если а =n(А) и множество А разбито на попарно не пересекающиеся равночисленные подмножества и если в – число элементов в каждом подмножестве, то частное а : в – это число элементов в каждом подмножестве.

Смысл частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величины – переход в процессе измерения от одной единицы величины к другой, более крупной. Такая трактовка частного возможна только для деления по содержанию:

$$а : в = m_e (X) : m_e (e_1) = m_{e_1} (X)$$

Величина X измерена единицей величины е, затем ее же измерили единицей величины e_1, результат измерения стал во столько раз меньше, во сколько раз крупнее новая единица величины.

Действие деления в начальной школе рассматривается как обратное действию умножения.

В качестве подготовительной работы к введению нового арифметического действия могут быть рассмотрены практические задачи. *Привести примеры.*

При формировании смысла действия деления ученики должны уметь выполнять два вида деления. Для проверки сформированности умения делить можно предложить ученикам решить две задачи: одна на деление по содержанию, а другая – на деление на равные части. *Привести примеры.*

Таблица деления составляется, опираясь на взаимосвязь между умножением и делением. Для контроля можно предложить работу в парах: составить все возможные выражения на умножение и деление с числами 4, 6, 24.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 5, 15

Элементы теории множеств в курсе математики начальной школы (множество и его элементы, способы задания множеств, отношения между множествами, операции над множествами).

При изучении данной темы в программах «Школа 2000», «Школа 2100» рассматриваются вопросы: множество и его элементы, способы задания множества; отношения равенства множеств, включение множества А во множество В; диаграммы Венна; подмножества; разбиение множества на части; пересечение множества и его свойства; объединение множества и его свойства; сложение и вычитание множеств.

Теоретико-множественные операции и отношения вводятся на языке «принадлежности элемента множеству» и иллюстрируются примерами как математического содержания, так и иного.

Теоретико-множественные понятия призваны разъяснять смысл целого неотрицательного числа, отношений «равно», «меньше», «больше», «меньше на…», «больше на…», арифметических операций.

При этом теоретико-множественные модели системы целых неотрицательных чисел используются явно или неявно.

Уже в первом классе дети рассматривали свойства отдельных совокупностей предметов. В третьем классе эти знания обобщаются и вводится понятие «множество». Можно говорить о множестве книг в библиотеке, множестве зрителей в кинотеатре. Объекты, собранные во множество, называют элементами множества.

В отличие от «мешков» равные элементы во множествах не повторяются.

Определенную трудность при введении понятия множества представляет то, что этот термин ассоциируется у детей со словом «много».

Рассматривают множества, заданные общим свойством их элементов (ягоды, грибы и т.д.). Множество можно задать двумя способами: перечислением элементов и указанием общего свойства.

Равными называются множества, состоящие из одних и тех же элементов. Равные множества могут отличаться лишь порядком их элементов.

Ученикам показывают графическое обозначение множеств с помощью диаграмм Венна.

При помощи диаграмм ученики знакомятся с понятием подмножества, операциями пересечения и объединения. *Привести примеры.*

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 15.

Понятие об аксиоматическом методе построения математической теории. Требования, предъявляемые к аксиоматике. Применение аксиоматического метода в арифметике или геометрии.

Исторически первым опытом аксиоматического построения математической теории является античная геометрия – стройная система геометрических знаний. В ее основу положены простейшие геометрические свойства, подсказанные опытом. Остальные свойства выводились из простейших с помощью рассуждений. Эта система около III века до н.э. получила завершенный вид в «Началах» Евклида, где изложены также основы теоретической арифметики.

Общая тенденция к повышению строгости построения математических теорий во второй половине XIX века сказалась и в геометрии. С появлением неевклидовых геометрий возникла проблема строгого логического обоснования самой евклидовой геометрии. Она выразилась в стремлении дополнить систему аксиом евклидовой геометрии, включив в нее все предложения, которые неявно использовались при доказательстве теорем. Итог всем исследованиям в этой области подведен Д. Гильбертом в книге «Основания геометрии», где дан полный список аксиом евклидовой геометрии и доказана непротиворечивость этой аксиоматики. Сформулированные аксиомы относятся к точкам, прямым, плоскостям и отношениям между ними, которые выражаются словами «принадлежит», «лежать между», «конгруэнтен». Это основные (неопределяемые) понятия и отношения. Все, что предполагается известным о них, выражено в аксиомах. Аксиомы (а их порядка двух десятков) разбиты на пять групп:

1) аксиомы принадлежности, где устанавливаются отношения между точками, прямыми и плоскостями;
2) аксиомы порядка. Они определяют понятие «лежать между» и выражают свойства взаимного расположения точек на прямой и плоскости;
3) аксиомы равенства (конгруэнтности). Они определяют равенство отрезков и углов;
4) аксиома непрерывности (прямая не имеет проколов, она непрерывна);
5) аксиома параллельности.

Совокупность всех теорем, выводимых из пяти групп аксиом, составляет евклидову геометрию.

Чертежи при таком построении геометрии играют вспомогательную роль.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 15.

Геометрические фигуры, рассматриваемые в курсе математики начальной школы, их построение и свойства.

В математическом образовании геометрия является не менее важным разделом, чем другие, так как математика – наука не только о количественных отношениях, но и о пространственных формах.

Познание действительного мира происходит не только с количественной стороны, но и через познание пространственных форм и пространственных отношений. Изучение элементов геометрии в начальных классах открывает широкие возможности для установления связи обучения с жизнью, с практической деятельностью детей.

Определим основные задачи изучения геометрического материала в начальной школе:

– познакомить учеников с различными геометрическими фигурами и телами (кругом, прямоугольником, квадратом, треугольником, многоугольником, призмой, пирамидой, шаром, конусом, цилиндром);

– сформировать умения измерять, изображать, строить, экспериментальным путем устанавливать некоторые свойства геометрических фигур;

– познакомить со способами нахождения площади прямоугольника, квадрата, треугольника.

Каковы же особенности усвоения детьми младшего школьного возраста сведений по геометрии? Психологи и педагоги пытались более глубоко проникнуть в процесс развития геометрического мышления, раскрыть и выяснить его специфику.

С этой целью А. М. Пышкало определил несколько уровней развития в области геометрии, которые условно назвал «уровнями геометрического развития». Каждому уровню соответствует свой язык, содержащий геометрическую и логическую терминологию, свою символику, свою глубину логической обработки

изучаемого материала. Переход от одного уровня к другому протекает под влиянием целенаправленного обучения. Для младших школьников характерны два уровня геометрического развития. Первый, исходный уровень, характеризуется тем, что геометрическая фигура рассматривается как «целое». На этом уровне при восприятии фигуры ученики еще не выделяют ее элементов, фигуры различают лишь по внешнему виду. Ученик, мыслящий на первом уровне, может легко научиться узнавать такие фигуры, как прямоугольник, квадрат, ромб, параллелограмм, хорошо запоминает их названия, но не видит общих признаков в этих фигурах. При правильном обучении первого уровня могут достигнуть дети 6–7 лет.

Учащиеся, достигшие второго уровня, умеют устанавливать отношения между фигурами или между элементами фигур. Они выполняют анализ воспринимаемых фигур. Свойства фигур устанавливаются только экспериментальным путем. Усвоение свойств фигур происходит в результате наблюдений, вычерчивания, моделирования, измерений. Эти свойства используются при узнавании фигур. Правильно организованное обучение позволяет достигнуть этого уровня всем учащимся к концу обучения в начальных классах. Геометрические понятия, с которыми ученики знакомятся в:

– первом классе: точка, линия – кривая и прямая, отрезок, ломаная, многоугольники;

– втором классе: угол, прямой угол, непрямой угол, прямоугольник, квадрат;

– третьем классе: круг, окружность;

– четвертом классе: диагонали прямоугольника, свойство диагоналей прямоугольника.

Дать определение всех перечисленных понятий, определить свойства фигур, изучаемых в начальной школе.

Геометрический материал должен обеспечить формирование пространственных представлений и пространственного воображения.

При определении содержания геометрического материала необходимо учитывать потребности смежных дисциплин, изучаемых в начальных классах.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 4, 6, 12, 17.

Алгоритмы арифметических действий в десятичной системе счисления и теоретические положения, лежащие в их основе. Применение алгоритмов в процессе формирования умений выполнять письменные вычисления умножения и деления многозначных чисел.

В литературе у разных авторов встречаются различные определения алгоритмов. Приведем один из них. Алгоритм – это система точных и понятных предписаний о содержании и последовательности выполнения конечного числа действий, необходимых для решения любой задачи данного типа. К числу алгоритмов школьного курса математики относятся, например, правила выполнения арифметических действий, правила решения определенных видов уравнений, алгоритмы выполнения письменных вычислений умножения, деления и др. Слово «алгоритм» появилось в результате искажения (после перевода на европейские языки) имени арабского математика IX века аль-Хорезми, которым были описаны правила выполнения основных арифметических действий в десятичной системе счисления.

Способы задания алгоритмов: формулы, таблицы, схемы, словесная запись.

Виды алгоритмов: линейные, ветвящиеся, или разветвленные, алгоритмы, циклические алгоритмы.

Приведем пример формирования умения выполнять письменные вычисления умножения и деления многозначных чисел.

При изучении темы выделяют три этапа:

1. Умножение и деление на однозначное число.
2. Умножение и деление на числа, оканчивающиеся нулями.
3. Умножение и деление на двузначные и трехзначные числа.

На каждом из этапов сначала рассматривают умножение, а затем деление.

В умножении и делении многозначных чисел, кроме того, выделяют частные случаи. К частным случаям умножения относят случаи с нулями в множителях. К частным случаям деления – случаи деления с нулями в частном. Частные случаи вводятся постепенно, вслед за соответствующими общими.

Раскрыть теоретические основы и методику работы на каждом этапе умножения и деления, привести алгоритм умножения и деления на конкретном примере.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 8, 10, 15.

Реализация развивающих задач обучения в различных программах обучения математике («Школа 2100», «Школа 2000», «Начальная школа XXI век», программа Л. В. Занкова)

В системе Л.В. Занкова развитие достигается на основе реализации всего комплекса составляющих ее компонентов, определяющих и образующих процесс обучения – целей и задач обучения, принципов, содержания, особенностей методов обучения.

Развивающие задачи в этой системе понимаются не в узком смысле, не как развитие отдельных сторон – памяти, внимания, воображения и т.д., а как общее развитие личности. Под общим развитием личности понимается развитие ума, воли, чувств, т.е. фундаментальных сторон психики, составляющих ее основу.

Основные принципы:

1) Обучение должно вестись на высоком уровне трудности. Степень трудности регулируется соблюдением меры трудности. Это обусловлено тем, что школьникам предлагается учебный материал, который может быть ими осмыслен. Мера трудности конкретизирована в программах, учебниках, приемах обучения.

2) Ведущая роль теоретических знаний.

3) Принцип прохождения материала более быстрым темпом. Данный принцип имеет не столько количественную, но главным образом качественную характеристику. Изучение нового переслаивается с повторением пройденного. При этом повторение ведется так, что ранее изученное выступает в иной связи с прохождением нового и сопровождается открытием в нем неизученных сторон и новых граней, т.е. такое повторение направлено на углубление знаний. Быстрое продвижение вперед в изучении программы не имеет ничего общего с «опережающим обучением».

4) Принцип осознания школьниками процесса учения. Данный принцип направлен на осознание самим учеником протекания у него процесса познания: что он до этого знал и что нового ему открылось в изучаемом предмете. Например, при решении

уравнения $x + (16 - 9) = 8 + 6$ детям не дается готовый образец решения, а предлагается сравнивать это уравнение с теми, которые решали раньше. На основе результатов сравнения ученики сами находят путь решения предложенного уравнения.

5) Принцип работы над развитием всех учащихся. Сильные и слабые ученики должны учиться вместе.

Программа по математике разработана Л.В. Занковым и И.И. Аргинской. Курс математики призван выполнять следующие задачи: способствовать продвижению учащихся в общем развитии, дать представление о математике как науке, не вредить здоровью ребенка, сформировать знания и умения, необходимые для обучения детей в среднем звене школы. Главной особенностью программы является то, что ее содержание распределяется по трем уровням. К первому относится материал, подлежащий прочному усвоению в пределах начального обучения. Он совпадает со стандартом начального образования. Материал второго и третьего уровней позволяет глубже осознать материал первого уровня (например, знакомство с положительными и отрицательными числами). Объем и глубина материала этих уровней сугубо индивидуальны как для каждого ученика, так и для класса. Слабое владение материалом этих двух уровней не может являться причиной неудовлетворительной оценки успехов школьников.

Можно также показать реализацию развивающих задач по другим программам.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 2, 4, 5.

Понятие положительной скалярной величины и ее измерения. Аддитивно-скалярные величины, изучаемые в курсе математики начальной школы.

Термин «величина» впервые появился в философской литературе и был связан с действительными числами. Исторически числа возникли в процессе счета предметов и измерения величин. Именно на это обстоятельство указывал Аристотель, когда писал: «То или иное количество есть множество, если его можно счесть; есть величина, если его можно измерить».

До конца XIX века как в философской, так и в математической литературе все определения понятия величины носили лишь описательный характер. Так, Герон Александрийский писал: «Величина есть все то, что может быть увеличено или разделено безгранично». Л. Эйлер называл величиной «все то, что способно увеличиваться или уменьшаться».

В процессе длительной эволюции понятие величины уточнялось, развивалось и обобщалось, что привело в дальнейшем к понятиям скалярной, векторной и тензорной величин. Мы ограничиваемся рассмотрением скалярных величин, т.е. величин, характеризуемых только числовым значением. Еще Евклид в книге «Начала», не используя термин «величина», перечислил аксиомы, описывающие общие свойства положительных скалярных величин:

- равные одному и тому же равны между собой;
- если к равным прибавить равные, то целые будут равны между собой;
- целое больше своей части и т.д.

В дальнейшем, при практическом использовании конкретных скалярных величин были установлены и другие общие свойства. Однако строгое определение сложилось лишь после построения теории действительного числа.

Определение. Множество М, рассматриваемое вместе с определениями на нем отношений сравнения «$\leq$» и операцией «+» (М, $\leq$, +), называется системой однородных положительных скалярных величин, а его элементы – однородными и положительными скалярными величинами, если выполняются следующие условия (аксиомы положительной скалярной величины):

1. Отношение «=» есть отношение эквивалентности.
2. Отношение «<» есть отношение строгого линейного порядка.
3. Операция «+» существует и однозначно определена на М, при этом она коммутативна, ассоциативна, монотонна.
4. Операция вычитания возможна в том и только том случае, когда из большей величины вычитают меньшую.
5. Возможность деления (дробление) величины на любое число равных частей.

6. Возможность исчерпания величины *а* с помощью величины *в* (аксиома Евдопса или аксиома Архимеда).

7. Свойство непрерывности: пусть последовательность $\{a_i\}$, а $\in$ M ($i = 1, 2, \dots n, \dots$) обладает свойством $a_1 < a_2 < \dots a_n < \dots$, а последовательность $\{в_j\}$, ($j = 1, 2, \dots m, \dots$) свойством $\dots < b_m < \dots < b_2 < b_1$, причем $a_1 < в_j$ для любых $i, j \in N$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует номер *к*, такой, что для всех $n > k$ выполняется условие $b_n - a_n < \varepsilon$. Тогда существует единственный элемент $c \in M$, удовлетворяющий условиям $a_n < c < b_m$, для любых $n, m \in N$.

Свойства 1–7 полностью определяют понятие системы положительных скалярных величин, однако, в школьном преподавании этот подход неприемлем из-за высокого уровня абстракции некоторых аксиом скалярной величины.

Величины в начальном курсе математики трактуются как свойства реальных объектов или явлений. Однородные величины выражают одно и то же свойство объектов некоторого множества, а разнородные величины выражают различные свойства объектов.

Назвать величины, изучаемые в школьном курсе математики.

Величины обладают следующими свойствами:

1. Величины одного рода сравнимы. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемой величины.
2. Величины одного рода можно складывать, в результате получаем величину того же рода (свойство аддитивности). Каждый род величины требует своего способа сложения.
3. Величину умножают на действительное число, получают величину того же рода.
4. Величины одного рода вычитают.
5. Величины одного рода делят. Частное (неотрицательное действительное число) называют также отношением величин.

Сравнение величин приводит к понятию измерения величин (сравнению данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу). В результате измерения величины получают определенные численные значения при выбранной единице.

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называют скалярными величинами.

Свойство объекта (фигуры) занимать место на плоскости приводит к понятию площади геометрической фигуры.

Разобрать, как площади фигур сравниваются и складываются. Ввести понятия равносильности и равносоставленности геометрических фигур, что используется при выведении формул для вычисления площадей геометрических фигур (многоугольников).

Конкретизируйте план изучения величины, приведенный методикой изучения площади:

1. Знакомство с объектом. Формирование представлений об отношениях равенства и неравенства объектов, о «сумме» объектов.
2. Знакомство со свойством (величиной), которое проявляется лишь в сравнении объектов, через непосредственное сравнение объектов: введение термина – названия величины.
3. Создание ситуации, в которой непосредственное сравнение объектов невозможно или значительно затруднено. Введение произвольной единицы измерения, знакомство с процессом измерения величины. *(Использование проблемного метода).*
4. Знакомство с общепринятой единицей измерения изучаемой величины:

   а) непосредственное измерение объектов с помощью этой единицы измерения;

   б) ознакомление с измерением величины во введенных единицах с помощью измерительных инструментов.
5. Знакомство с косвенными способами измерения величины. Выработка измерительных умений.
6. Создание ситуации, в которой измерение величины с помощью известной единицы измерения невозможно. Знакомство с различными способами измерения в новых единицах.
7. Обучение арифметическим действиям со значениями величин, перевод значений величин из одних единиц измерения в другие.
8. Применение знаний о величинах и действиях со значениями величин к решению различных математических и практических задач.

Конкретизируйте приведенный план заданиями для учеников.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 13, 15.

Понятие дроби. Использование практического метода обучения при изучении дробей в начальном курсе математики.

Ученики начальных классов знакомятся с долями величин, их обозначением и сравнением, решением текстовых задач на нахождение доли числа и числа по его доле, с образованием дробей, их чтением, записью.

Одной из основных особенностей изучения темы является то, что обучение происходит на наглядно-практической основе.

Обучая детей работе с дробными числами, следует учесть такие последовательные ступени изучения дробей, как:

– деление предметов на части без называния результата;
– отражение процесса деления в представлениях и речи;
– решение задач с помощью отвлеченных дробных чисел.

Формирование понятия о дробных числах начинается еще в дошкольный период, когда дети учатся делить круг, квадрат на 2 и 4 равные части, сравнивать целое и часть, понимать, что целое больше части, а часть меньше целого.

В первом и втором классах ученикам предлагают задачи на деление фигур на части, что является исходным для формирования важнейших представлений о долях единицы, на основе которых формируется понятие «дробь».

В третьем классе ученики знакомятся с долей. Работа проводится по плану:

– образование и обозначение доли;
– сравнение долей;
– решение текстовых задач на нахождение доли числа и числа по его доле.

Описать методику работы на каждом этапе.

В четвертом классе вводится понятие «дробь». Изучение темы «Дроби» представляет некоторые трудности для детей, т.к. дробь – это число более сложное, чем целое. Чтобы понять дроби и изучить действия над ними, нужно овладеть механизмом совместных действий не над одним числом, а над двумя.

По данным возрастной психологии, развернутое усвоение дробей превышает «максимум» интеллектуальных возможностей детей 7–10 лет. На что же следует опираться при рассмотрении темы? Прежде всего, на происхождение дроби. Дроби по происхождению и материальному содержанию имеют только один источник – измерение величин. Поэтому ведущим методом обучения будет практический, когда ученики выполняют задания на деление моделей предметов на равные части, тем самым показывают, как же получаются дроби.

Различают три вида дробей:

1) дроби единичные, или доли;
2) дроби систематические, знаменателями которых являются не всякие числа, а только числа из определенного множества, например, степени 10;
3) дроби общего вида, у которых и числители, и знаменатели могут быть любыми целыми числами.

При работе над темой можно придерживаться таких этапов работы:

– получение и обозначение дробей;
– сравнение дробей;
– решение текстовых задач.

Опишите методику работы на каждом этапе. Перечислите виды средств наглядности, используемых при знакомстве с долями и дробями.

Приведите примеры заданий, готовящих учащихся к решению задач на нахождение числа по его доле.

Методика ознакомления учеников начальной школы с дробями опирается на идею расширения множества целых чисел Z до множества рациональных чисел Q как необходимости выполнения операции деления (на ненулевое число), обратной к операции умножения. При этом множество целых чисел становится подмножеством нового множества рациональных чисел. Важнейшие операции и соотношения на множестве Q определяются так, чтобы для рациональных чисел, являющихся в то же время целыми числами, совпадают с одноименными операциями и соотношениями, определенными на множестве целых чисел Z до его расширения.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 8, 10, 15.

Различные подходы к определению натурального числа (теоретико-множественный, аксиоматический подходы и подход с точки измерения величины). Методика формирования понятий «натуральное число» и «ноль» в начальной школе.

Аксиоматический подход раскрывает «сущность» натурального числа, которая соответствует историческому процессу развития понятия числа. Усвоение натурального числа ребенком с самого раннего детства соответствует именно этому подходу, так как отражает процесс счета предметов.

В настоящее время в более или менее явной форме выражен теоретико-множественный подход к понятию натурального числа. Такой подход формируется в учебнике 1 класса с помощью разнообразных картинок – 3 круга, 4 яблока и т.п., а также на уроках при использовании конкретных предметов: палочек, счетного материала.

Н.Я. Виленкин предложил некоторый адаптированный теоретико-множественный подход, близкий к практике ребенка и к его учебной деятельности и в определенном смысле отражающий природу числа как количества элементов множества и как результата измерения непрерывной скалярной величины. Этот подход реализован в учебниках для начальной школы Н.Я. Виленкиным и Л.Г. Петерсон (программа «Школа 2000»).

Программа Д.Б. Эльконина и В.В. Давыдова полностью подчинена идее построения теории числа на основе понятия величины.

В курсе математики «Школа России» нашли отражение все три подхода к понятию натурального числа.

Числа в начальной школе вводятся постепенно, по концентрам. Дети изучают пять концентров: «Десяток», «Числа 11–20», «Числа 21–100», «Тысяча» и «Многозначные числа». Нумерация в каждом разделе, кроме чисел первого десятка, изучается по одному и тому же плану:

– подготовительная работа;
– устная нумерация;
– письменная нумерация.

В теме «Десяток» ученики должны понять принцип образования чисел в натуральном ряду путем присчитывания числа один к предыдущему числу или путем отсчитывания числа один от последующего за ним числа, научиться записывать и сравнивать числа первого десятка, выучить состав чисел от 2 до 10.

Понятие о числе ноль ученики получают, выполняя задание в отсчитывании чисел по одному, пока не останется ни одного.

В теме «Числа 11–20» вводится новая счетная единица десяток, дети считают десятками, складывают и вычитают десятки, знакомятся с образованием чисел второго десятка из десятка и отдельных единиц, учатся записывать двузначные числа.

В концентре «Числа 21–100» продолжается работа по образованию, записи и сравнению двузначных чисел.

В каждом из перечисленных разделов вводятся новые понятия и термины, так в теме «Числа 11–20» – это «однозначное» и «двузначное число», в теме «Числа 21–100» – «разряд» и «разрядное число».

В концентре «Тысяча» заканчивается построение первого класса чисел – класса единиц, и в дальнейшем числа вводятся не по разрядам, а по классам.

В теме «Многозначные числа» ученики знакомятся с понятием «класс», учатся читать и записывать числа в пределах 1 миллиарда.

При изучении чисел можно давать задания, связанные с самостоятельным поиском связи числового материала с жизнью. Например, составление текстовых задач, опирающихся на числовой материал из жизни города, семьи и т.п. или подбор исторических сведений.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 8, 9, 10, 15.

Операция сложения на множестве натуральных чисел, различные способы истолкования операции и ее свойств. Методика составления таблицы сложения чисел в пределах десяти.

Операцию сложения натуральных чисел можно определить:

а) с теоретико-множественных позиций как определение численности множества, полученного в результате объединения двух непересекающихся конечных множеств;

б) с аксиоматических позиций:

$(\forall a \in N)\ a + 1 = a' \wedge (\forall a,b \in N) \Rightarrow a + b' = (a+b)'$

(Используется аксиоматика Д. Пеано);

в) с точки зрения измерения величин: мера суммы однородных величин есть сумма мер этих величин при фиксированной единице величины.

Свойства операции сложения*:* существование и единственность операции, ассоциативность, коммутативность, монотонность.

Сформулировать перечисленные свойства и записать их с помощью буквенной символики.

Формирование понятий об арифметических действиях начинается с первых уроков математики и проводится на основе практических действий с различными множествами предметов. Сложение рассматривают как объединение множеств, не имеющих общих элементов.

Предметные действия, которые выполняют ученики, носят различный характер. При сложении это: увеличение данной совокупности предметов на несколько; увеличение не данной, а другой совокупности предметов на несколько и составление одной совокупности предметов из двух данных.

Основой для изучения вычислительных приемов в пределах первого десятка служат знания первоклассников, что данное число больше всех предшествующих и меньше всех последующих в натуральном ряду чисел, умение сравнивать и уравнивать числа, знания состава чисел первого десятка.

Таблица сложения в курсе математики по программе «Школа России» в пределах десяти составляется последовательно, при этом можно выделить такие этапы:

– составление таблицы прибавления числа 1 на основе свойства натурального ряда чисел – при прибавлении числа 1 получим следующее за ним число;
– составление таблиц сложения чисел 2, 3, 4 на основе приема прибавления по частям;
– составление таблицы сложения чисел 5, 6, 7, 8, 9 на основе умения применять переместительное свойство сложения.

Раскрыть методику работы на каждом из этапов.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 4, 5, 8,10.

Операция умножения натуральных чисел, различные способы истолкования операции и ее свойств. Методика составления таблицы умножения однозначных чисел.

Операцию умножения натуральных чисел можно определить:

а) с теоретико-множественных позиций как определение численности множества, полученного в результате объединения попарно не пересекающихся равномощных конечных множеств. Другой вариант – как нахождение численности декартова произведения двух или нескольких конечных множеств;

б) с аксиоматических позиций:

$(\forall a \in N)\ a \cdot 1 = a \wedge (\forall a,b \in N) \Rightarrow a \cdot b' = a \cdot b + a$

(Используется аксиоматика Д. Пеано);

в) с точки зрения измерения величин, где умножение натуральных чисел связано с переходом в процессе измерения к новой единице величины.

Свойства операции умножения: существование и единственность, ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность умножения относительно сложения, монотонность.

Сформулировать каждое свойство и записать при помощи буквенной символики.

В начальной школе рассматривается умножение через сумму, но вводится это определение по частям: сначала появляется определение «сложение одинаковых слагаемых называют умножением», а затем определения: $a \cdot 1 = a$ и $a \cdot 0 = 0$. Главным же средством наглядности при изучении умножения является таблица, иллюстрирующая декартово произведение двух множеств.

Изучение табличного умножения проводится по плану:

– подготовительная работа;

– изучение конкретного смысла действий умножения, переместительного свойства умножения;

– составление таблицы умножения.

Подготовка к рассмотрению действия умножения заключается в выполнении учениками заданий в счете двойками, тройками, четверками и т.д. В ходе таких упражнений дети осознают роль группового счета, усваивают его технику и решают примеры на нахождение сумм одинаковых слагаемых. *Привести конкретные задания.*

При объяснении конкретного смысла умножения делают акцент на целесообразности замены сложения одинаковых слагаемых новым арифметическим действием – умножением. *Привести конкретное задание.*

Опираясь на знание конкретного смысла действия умножения, составляется таблица умножения по постоянному первому множителю.

Для составления таблицы умножения по постоянному второму множителю учеников знакомят с переместительным свойством умножения.

В зависимости от подготовленности класса учитель может использовать различные сочетания методов, приемов и средств обучения, избрав в качестве ведущего либо метод самостоятельной работы, либо метод беседы, либо наглядный и практический метод, составной частью которых будут прием наблюдения, аналогии, сравнения и обобщения. *Привести конкретные задания для ознакомления учеников со свойством.*

Особые случаи умножения единицы и нуля на число, а также числа на единицу и ноль рассматриваются отдельно.

С умножением единицы на число ученики могут справиться самостоятельно, заменив произведение суммой.

Умножение числа на 1 вводится как определение.

Умножение числа 0 вводится, опираясь на конкретный смысл действия умножения.

Умножение на 0 рассматривают как определение.

Таблица умножения составляется последовательно. Методика составления каждой таблицы аналогична, работа ведется примерно по одному и тому же плану с постепенным усилением доли самостоятельного участия детей в этой работе.

Привести пример составления таблицы умножения с любым числом.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 4, 8, 10, 14, 15.

Особенности математики как учебной дисциплины, изучаемой в начальной школе. Цели и содержание математического образования младших школьников.

Математика – слово греческого происхождения (mathema – ‘познание, наука’). Математика, наряду с астрономией, медициной, архитектурой, стоит у истоков современной науки.

Отметим два подхода к определению предмета математики. Одно определение дано Ф. Энгельсом, другое – коллективом французских математиков под общим псевдонимом Н. Бурбаше.

Согласно Ф. Энгельсу, математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

По Н. Бурбаше, математика есть скопление математических структур, т.е. множество, с определенными на них операциями и отношениями. Построить их аксиоматическую теорию структуры – значит вывести логическое следствие из аксиом структуры.

Значимость математического образования в развитии современной цивилизации обуславливает государственный подход к его организации. Система государственного математического образования возникла в России в 1701 году благодаря Указу Петра I о создании Навигационной школы, существенное значение в которой занимало обучение математике. В ее становление и развитие внесли свой вклад ученые и педагоги Л.Ф. Магницкий, Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев и др.

В современной России математическое образование является частью системы непрерывного образования. В связи с этим в ней проявляются черты общей системы, но имеются и свои, присущие только ей, черты. Современное школьное образование включает начальную школу, основную школу и старшую школу; выделяют начальное и среднее профессиональное образование.

Кроме того, имеется ступень послевузовского образования (аспирантура, докторантура, переподготовка специалистов).

Одной из основных задач школьного курса математики является раскрытие перед учениками трех этапов формирования математического знания:

– этап математизации, т.е. построение математической модели некоторого фрагмента реальной действительности;

– этап изучения математической модели, т.е. построение математической теории, описывающей свойства построенной модели;

– этап приложения полученных результатов к реальному миру.

Задачи обучения определяют содержание начального курса математики, которое находит отражение в программе. В настоящее время существуют такие курсы математики в начальной школе: «Школа России», Л.В. Занкова, В.В. Давыдова, «Школа 2000», «Школа 2100», «XXI век» и др. Все перечисленные курсы характеризуются базисными понятиями: число – величина – геометрическая фигура. Во всех курсах условно можно выделить арифметический, геометрический, алгебраический материал и материал, связанный с изучением величин.

Дать краткую характеристику основного программного материала.

Основное место в содержании занимает арифметический материал. При включении алгебраического, геометрического материала и величин исходят из того, что он должен быть тесно связан с арифметикой.

Начальный курс математики изучается концентрически.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 5, 11.

Элементы математической логики в курсе математики начальной школы.

Проблема введения элементов логики в обучение математике состоит не в том, чтобы изучить специально и обособленно логику, а в том, чтобы необходимые элементы логики стали неотъемлемой частью самого преподавания математики, важным

вспомогательным инструментом, повышающим его эффективность и влияние на логическое развитие учащихся.

Проблема введения и использования элементов логики в обучении математике включает три основных вопроса:

1) ЧТО (какие элементы логики необходимо изучать в школьном курсе математики и в частности в начальном курсе)?

2) ГДЕ (в каком месте курса математики, в связи с каким математическим материалом необходимо изучать элементы логики)?

3) КАК (в каком аспекте, на каком уровне можно изучать их в школе и в начальной в частности)?

Минимальная программа, обеспечивающая потребности глубокого усвоения школьной математики и логического развития учащихся, включает разъяснение смысла логических операций (отрицания, конъюнкции, дизъюнкции и импликации), отношений следования и эквивалентности между высказываниями, связывания кванторами, а тем самым – выявление структуры предложения и рассмотрение простейших правил вывода и анализа рассуждений.

Важно не усвоение учащимися терминов или применение знаков ^, v, а достижение понимания смысла логических связок «и», «или», которое не проявляется без специального разъяснения. Целесообразно всегда одновременно разъяснять и сопоставлять смысл союзов *и* и *или*. Например, квадрат является и прямоугольником, а четырехугольник, у которого все углы прямые, является прямоугольником или квадратом.

В начальных классах имеют место и суждения. В суждениях отражается либо истина, либо ложь. Например, суждение, что число 365 – трехзначное, истинное, а суждение, что число 365 – четное, ложное.

Суждения бывают единичными: в них что-то утверждается или отрицается относительно одного предмета. Например, число 12 – четное, квадрат - не имеет острых углов.

Кроме единичных суждений, различают частные и общие. В частных что-то утверждается или отрицается относительно некоторой совокупности предметов из данного класса предметов. Например, уравнение $x - 7 = 10$ решается на основе взаимосвязи между уменьшаемым, вычитаемым и разностью. В этом суждении идет речь об уравнениях частного вида, представляющих собой подмножество множества всех уравнений, изучаемых в начальных классах.

В общих суждениях что-то утверждается или отрицается относительно всех предметов данной совокупности. Например, в прямоугольнике противоположные стороны равны. Здесь идет речь о любых, т.е. о всех прямоугольниках.

Умозаключение – логическое действие, в результате которого из одного или нескольких суждений получается новое суждение, содержащее новое знание о предмете. Выделяют несколько видов умозаключений.

От единичных к общему: на основе рассмотрения единичных суждений делается общий вывод, т.е. высказывается общее суждение о чем-либо. Такой вид умозаключений называется неполной индукцией. Сущность ее в том, что из рассмотрения лишь нескольких частных случаев делается общий вывод. Например, рассматривая несколько выражений типа 4 + 5 = 9 и 5 + 4 = 9; 3 + 2 = 5 и 2 + 3 = 5, делаем вывод: от перестановки слагаемых сумма не изменяется.

Говоря о логической составляющей в обучении учащихся, вспомним утверждение М.В. Ломоносова, что логика приводит мысли в порядок. Установить порядок на некотором множестве объектов – значит пронумеровать их. Анализ начального курса математики позволяет выявить те логические действия, которые выполняются учащимися. Учащиеся должны уметь:

– приводить примеры понятий, подводить объекты под определения;

– понимать смысл терминов «следует», «следовательно», «если... то»;

– понимать свойства конкретных отношений – рефлексивность, симметричность, транзитивность – без употребления соответствующей терминологии;

– проводить классификацию;

– понимать смысл терминов «хотя бы один», «все», «некоторые».

Для решения задач развития логического мышления не требуется включения в курс дополнительного математического материала. Задачи развития логического мышления можно ставить и решать на обычном учебном материале.

Привести пример заданий.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 5, 9, 11, 15.

Алгебраические понятия начального курса математики и методика введения этих понятий.

Введение алгебраического материала в начальный курс математики позволяет подготовить учеников к изучению основных понятий математики.

Основные понятия темы: «выражение», «равенство», «неравенство», «уравнение».

В методике ознакомления младших школьников с понятием числового выражения можно выделить три этапа, предусматривающие ознакомление с выражениями, содержащими:

– одно арифметическое действие (I этап);

– два и более арифметических действий одной ступени (II этап);

– два и более арифметических действия разных ступеней (III этап).

С простейшими выражениями – суммой и разностью – ученики знакомятся в первом классе (при изучении сложения и вычитания в пределах 10); с произведением и частным двух чисел – в третьем классе.

Сначала ученики знакомятся с термином «сумма» в значении числа, являющегося результатом действия сложения, а затем в значении выражения.

С выражениями, содержащими два и более арифметических действий, дети знакомятся на первом году обучения при усвоении вычислительных приемов сложения и вычитания по частям. Они решают примеры вида: 3+1+1, 7 – 1 – 2 и т.п.

Во втором классе ученики знакомятся со скобками и правилами выполнения действий в выражениях со скобками.

В третьем классе обобщаются знания учащихся о правилах порядка выполнения действий и вводится еще одно правило о выполнении действий в выражениях, не имеющих скобок и содержащих арифметические действия разных ступеней: сложение, вычитание, умножение и деление.

Ученики начальных классов фактически знакомятся с тождественными преобразованиями выражений. С преобразованием выражений ученики впервые встречаются во втором классе в связи с изучением группировки слагаемых.

С буквенными выражениями ученики знакомятся в третьем классе, учатся находить значение буквенного выражения. Но, в первом и во втором классах, с целью подготовительной работы по раскрытию смысла переменной, в учебники математики включаются упражнения, в которых переменная обозначается «окошком».

Ознакомление учеников начальных классов с равенствами и неравенствами связано с решением следующих задач:

– научить устанавливать отношения «больше», «меньше» или «равно» между выражениями и записывать результаты сравнения с помощью знака;

– научить читать равенства и неравенства.

Методика формирования у младших школьников представлений о числовых равенствах и неравенствах предусматривает следующую этапность работы:

1 этап – ученики выполняют упражнения на сравнение совокупностей предметов;

2 этап – ученики выполняют сравнение чисел, сначала опираясь на предметную наглядность, а затем на свойство чисел натурального ряда;

3 этап – сравнение выражений вида $6 < 6 + 1$.

При сравнении выражений ученики могут опираться на знания: а) взаимосвязи между компонентами и результатами арифметического действия; б) отношений между результатами и компонентами арифметических действий; в) смысла действия умножения; г) свойств арифметических действий.

Для записи неравенств с переменной в начальных классах используется «окошко».

Уравнение в начальных классах трактуется как равенство, содержащее букву.

На подготовительном этапе выполняются два вида упражнений: 1) решаются способом подбора примеры с «окошком»; 2) раскрывается связь между компонентами и результатами арифметических действий.

Уравнения решаются двумя способами: способом подбора и на основе взаимосвязи между компонентами и результатами действий.

Привести конкретные задания и описать методику работы на каждом этапе изучения алгебраического материала.

В обучении математике широко используются основные методы: анализ и синтез; сравнение; обобщение; абстрагирование; классификация.

Анализ главным образом встречается при выполнении операций сравнения, выделения главного, классификации, выявления закономерностей, абстрагирования, конкретизации. Таким образом, умение анализировать используется при осуществлении весьма широкого круга действий. Основные составляющие анализа на разных предметах:

– установление причинно-следственных связей;

– выделение сторон объекта;

– деление объекта на части.

Составляющая анализа – деление объекта на части. При изучении любого материала важным становится умение выделять его основные единицы. Решая «сложное» уравнение, полезно выделять составные части.

Рассмотрим действие: выделение сторон объекта. Часто важным требованием при решении той или иной задачи становится рациональный способ ее решения. На помощь может прийти такая составляющая умения анализировать, как выделение сторон объекта.

Например, найдите значение выражения $12 \cdot a + 18 \cdot a$, если $a = 13, 17$.

Прежде чем выполнить данное задание, ученик анализирует данное выражение, его можно преобразовать: $(12 + 18) \cdot a$ или $20 \cdot a$.

Таким образом, используя задания алгебраического характера, можно развивать интеллектуальные умения младших школьников.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 4, 9, 10, 11, 15.

Понятие бинарного отношения на множестве. Способы задания отношений. Свойства отношений. Отношения эквивалентности и порядка. Методика формирования понятий «больше», «меньше», «равно» в начальном курсе математики.

В математике изучают как связи между элементами двух множеств (т.е. соответствия), так и связи между элементами одного множества. Называют их отношениями. Если отношения рассматривают между двумя элементами, то их называют бинарными. Например, между понятиями – отношения рода и вида; между предложениями – отношения следования и равносильности, между множествами – включения и равенства, между числами – «больше», «меньше», «следует» и др.

Определение. Бинарным отношением на множестве X называется всякое подмножество декартова произведения $X \times X$. $R \subset X \times X$.

Способы задания отношений: перечислением элементов (упорядоченных пар), принадлежащих графику; заданием характеристического свойства; заданием с помощью графов и графиков.

Среди свойств бинарных отношений можно выделить:

– рефлексивность;

– симметричность;

– антисимметричность;

– транзитивность и др.

Сформулировать определения и привести примеры отношений эквивалентности и порядка.

Отношение эквивалентности, заданное на множестве X, порождает разбиение этого множества на классы, т.е. позволяет проводить классификацию. Множество X называется упорядоченным, если на нем задано отношение порядка.

Привести примеры упорядоченных множеств, рассматриваемых в курсе математики начальной школы.

С понятиями «больше», «меньше» и «равно» впервые ученики встречаются в подготовительный период при сравнении количества двух множеств, при этом используют прием установления взаимно однозначного соответствия между множествами.

Прежде всего, следует обратить внимание детей на те случаи однозначного соответствия между элементами двух множеств, с которыми они часто встречаются в жизни.

Привести примеры конкретных заданий.

Существуют различные приемы установления взаимно однозначного соответствия. К ним относятся:

– расположение пар предметов определенным образом (метод наложения);

– изымание по одному предмету из каждого множества и откладывание получаемых пар;

– сравнение двух множеств, элементы которых нельзя изымать, например, изображенных на рисунке. При этом предметы, образующие пару, соединяются стрелкой.

Предлагая ученикам упражнения на сравнение численности множеств, целесообразно начинать с множеств, каждое из которых составлено из однородных предметов. Далее сравнивают множества разнородных предметов.

На этом этапе начинают формировать понятие о свойствах отношений: симметричности и транзитивности, используя работу с наглядным материалом.

Например, свойства отношения «равно». Семья белочек делала запасы на зиму, собирала грибы и орехи. Каждая белочка нашла по одну ореху. Учитель на наборное полотно выставляет 4 «белочки» и 4 «ореха». Делается вывод, что белочек столько же, сколько орехов, а орехов столько же, сколько белочек. Кроме орехов, каждая белочка нашла по одному грибу. Грибов столько же, сколько орехов, а орехов столько же, сколько белочек, значит, грибов столько же, сколько белочек.

Также можно продемонстрировать транзитивность отношений «больше», «меньше».

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 8, 10, 15.

Математические понятия и их определения. Виды определений в начальной школе.

В процессе мышления можно выделить различные формы: понятие, суждение, умозаключение. Понятие – одна из важнейших форм мышления. Понятие – это такая форма мышления, в которой выделены существенные свойства объектов, отделенные и абстрагированные от несущественных свойств.

Знание об объекте на понятийном уровне – это знание разнокачественных свойств (существенных и несущественных), знание закономерностей возникновения и связей с другими объектами. В математике, как ни в одном другом предмете, учащиеся сталкиваются с необходимостью конструировать, формулировать и применять определения, осознавать закономерности их построения, приводить понятия в систему, проводить классификацию понятий.

Существенные свойства составляют содержание понятия. Существенными свойствами называются такие, каждое из которых необходимо, а все вместе достаточны, чтобы выделить определенный класс объектов, чтобы некоторый объект отнести к определенному понятию. Например, существенными свойствами понятия умножение являются следующие: 1) это сумма; 2) все слагаемые суммы – одинаковые. Несущественное свойство – принадлежность числа различным числовым множествам.

Определить понятие – значит раскрыть его содержание.

Объем понятия – это совокупность всех предметов, обладающих данными существенными признаками. Например, объемом понятия «квадрат» будет множество всевозможных квадратов, какие можно нарисовать, представить.

Между содержанием и его объемом существует следующая зависимость: если увеличивается содержания понятия, то объем уменьшается. Например, если к существенным свойствам прямоугольника присоединить требование равенства всех сторон, то объем понятия прямоугольник уменьшится до понятия квадрат.

Если объем одного понятия входит в объем другого, то первое понятие называется видовым, а второе – родовым по отношению к первому. Родовое и видовое понятия относительны. Понятие квадрат является видовым по отношению к понятию прямоугольник.

Понятия выделяют и классифицируют по различным признакам.

1. Понятия делятся на единичные и общие в зависимости от числа предметов в их объеме.

Единичные понятия. Их объем состоит из одного предмета. Например: «число нуль», «число тысяча» и др.

Общие понятия. Объемы таких понятий включают в себя более одного предмета. Здесь выделяют два случая: а) объем понятия «конечное множество», например, натуральные однозначные или двузначные числа; б) понятия объемом, представляющим собой бесконечное множество, например, натуральные числа, квадрат, прямоугольник.

2. Все понятия делятся на сравнимые и несравнимые.

Сравнимые имеют некоторые общие признаки. *Несравнимые* таких общих признаков не имеют. Например, квадрат и прямоугольник – сравнимые понятия, так как у них общий признак – четырехугольник. Понятия «четное число» и «треугольник» – несравнимые, у них нет общего признака. Сравнимые понятия делятся на совместимые и несовместимые.

Совместимые – это такие понятия, объемы которых имеют хотя бы один общий элемент.

Несовместимые – это такие понятия, объемы которых не имеют ни одного общего элемента, например, четные и нечетные числа.

Определение необходимо для того, чтобы разные люди понимали друг друга, вкладывая в определенные термины один и тот же смысл. Определения можно получить по-разному:

1. Вербальное определение. В них одно понятие определяется через другое понятие, введенное ранее. В качестве родового понятия берется ближайший род. При использовании данной схемы необходимо позаботиться о доказательстве существования предметов, входящих в объем определяемого понятия, например, путем показа или построения рисунка, записи и т.п. В противном случае можно допустить ошибку. В начальных классах такой способ определения используется редко.

2. Содержание понятия раскрывается путем указания ближайшего рода и способа получения предметов, входящих в объем определяемого понятия (вместо видового отличия). Такие определения называют *конструктивными* (генетическими). Например, четное число – это число, которое делится на два. Здесь «число» – ближайшее родовое понятие, «делится на два» – способ проверки соответствующего свойства.

3. Содержание некоторых понятий раскрывается *путем соглашения* о том, что следует понимать под данной записью или

обозначающим ее термином, когда такая запись не укладывается в привычные представления. Например, принято считать, что $2 \cdot 0 = 0$.

4. В начальных классах для раскрытия содержания вводимых понятий широко используется прием показа конкретных предметов, входящих в объемы этих понятий. Например, запись 17 + 3 называется математическим выражением. Такое определение называется остенсивным.

5. Иногда содержание понятия раскрывается путем перечисления множеств объектов, входящих в объем понятия. Например, единицы десятки и сотни образуют класс единиц.

6. *Дескриптивные (описательные)* определения – в них лишь перечисляются свойства нового понятия. Но из определения еще не следует, что такие объекты существуют.

При определении понятий необходимо выполнять ряд требований. В определении через род и видовое отличие должен включаться ближайший род, что обеспечивает краткость определения. Определяемое (то, которое определяем) и определяющее (то, через которое определяем) понятия должны быть соразмерны, т.е. равны по объему.

Следующее требование к определению – независимость существенных свойств друг от друга. Другими словами, одни свойства, включенные в определение, не должны быть логическим следствием других. Это требование краткости вводимого определения. В школьном курсе, к сожалению, это требование, не выдерживается. Например, определение ромба и прямоугольника.

Еще одно требование – определение не должно содержать порочного круга. Порочный круг заключается в том, что одно понятие определяется через второе, а второе через первое. Например, вычитание – нахождение разности чисел, а разность – результат вычитания.

Желательно, чтобы определение не было отрицательным, т.е таким, в котором отрицается наличие некоторого свойства. Например, прямые на плоскости можно разделить на пары прямых, имеющих общую точку и не имеющих таковую.

И наконец, определение не должно содержать метафор. Определение «архитектура – застывшая музыка» мало что проясняет в этом понятии.

Различают дологический и логический уровни изучения понятий.

Логический уровень начинается с вербального определения понятия, обычно через указание рода и видового отличия. Дологический характеризуется тем, что понятие усваивается на базе представлений объектов (предметов) и оперирования с ними, часто с применением наглядности, т.е. при выполнении с ними определенных действий, что выдвигает некоторые методические требования к изучению этого понятия.

Для того чтобы ученики правильно усваивали существенные признаки изучаемых предметов, необходимо варьирование (видоизменение) как существенных, так и несущественных признаков этих предметов, т.е. нужно предлагать такие объекты, у которых изменяются как существенные, так и несущественные признаки.

В каком же случае можно считать, что ученики усвоили изучаемое понятие? Это возможно лишь тогда, когда они могут правильно назвать существенные признаки предметов из объема изучаемого понятия, отделить их от несущественных признаков, правильно распознавать предметы из объема данного понятия, уметь в несложных случаях в плане разных понятий рассматривать один и тот же предмет.

Процесс формирования понятия включает следующие этапы: перцепт (образ восприятия); представление (вторичный образ создается в отсутствие наглядной основы); предпонятие (образный концепт, обобщенное представление, концепт, образ-понятие, «система» представлений); понятие, система понятий (теория).

Каждый из этих этапов подчиняется определенным психологическим закономерностям.

Предпонятие называют также эмпирическим понятием. Именно на уровне предпонятия оперирует большинство учеников с понятиями.

Методика работы с понятиями включает четыре этапа:

– профессиональный (выполнение логико-математического анализа, который позволит на уроке дать определение в алгоритмизированном виде и отобрать знания, которые необходимо актуализировать);

– подготовительный (актуализация необходимых знаний, связь с субъектным опытом ребенка, мотивация);
– основной (обучающий);
– этап закрепления.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 5, 9, 11, 15, 16.

Отношение делимости на множестве целых неотрицательных чисел и его свойства. Признаки делимости суммы, разности и произведения. Признаки делимости на 2, 3, 5, 9 и 10. Методика изучения темы «Внетабличное деление».

К внетабличным случаям деления относятся: деление двузначного числа на однозначное, деление двузначного числа на двузначное и деление с остатком.

Для успешного освоения приемов внетабличного деления ученики должны хорошо знать таблицу деления и уметь пользоваться разрядным составом двузначных чисел.

Изучение темы начинается с рассмотрения деления круглых десятков: 60 : 2. В этом случае деление сводится к табличному делению.

В основе приемов деления двузначного числа на двузначное лежит свойство «деление суммы на число». При ознакомлении учеников со свойством можно предложить им решить текстовую задачу двумя способами. *Привести конкретную задачу. Объяснить, как рассуждают ученики при выполнении деления двузначного числа на двузначное на конкретном примере.*

Прием деления двузначного числа на двузначное состоит в подборе частного путем его умножения на делитель. *Привести образец рассуждения детей при выполнении данного приема вычислений.*

При выполнении действий сложения и вычитания, умножения и деления ученики по двум данным числам находят третье число. Деление с остатком имеет свой особый смысл: по двум данным числам находят два числа – частное и остаток.

Основная задача учителя при работе над этой темой – расширить знания детей о делении, научить выполнять деление с остатком, выражать делимое через частное, делитель и остаток.

Важность изучения этой темы заключается в том, что она готовит учеников к изучению деления многозначных чисел.

При изучении темы можно выделить три основных этапа:
– раскрытие конкретного смысла деления с остатком;
– знакомство с правилом, что остаток при делении меньше делителя;
– введение алгоритма деления с остатком.

Описать методику работы на каждом этапе.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 4, 8, 10, 15.

Понятие комбинаторной задачи. Правила суммы и произведения. Формирование умения решать комбинаторные задачи в курсе математики начальной школы методом перебора.

Задачи, связанные с выбором из некоторого множества подмножеств, обладающих определенными свойствами, можно определить как комбинаторные.

Сформулировать правила суммы и произведения, лежащие в основе решения комбинаторных задач.

При решении задач в начальном курсе математики можно выделить этапы: подготовительный этап (образование объектов из отдельных элементов) и хаотичный перебор возможных вариантов; второй этап – нахождение всех возможных вариантов при организации систематического перебора вариантов; третий этап – систематический перебор вариантов с использованием таблиц и графов (например, дерева возможных вариантов).

Детям не следует разъяснять сам термин «комбинаторные задачи».

В обучении необходимо соблюдать этапность.

Первый этап – подготовительный. На этом этапе ученики приобретают опыт образования объектов из отдельных элементов. Новые объекты ученики составляют, осуществляя пока хаотичный перебор, и от них не требуется найти все возможные варианты в данной задаче. Важно только, чтобы все варианты были различными.

Например, построй различные башенки из кубиков.

И на основе этого опыта в дальнейшем можно будет обучать детей организации *систематического* перебора. Также подготовкой к проведению систематического перебора служат задания на распределение объектов на группы по различным основаниям (классификация).

Например, разбей кораблики на 3 группы. Объясни, почему так сделал.

На подготовительном этапе идет работа по развитию мыслительных операций (анализ, синтез, сравнение, классификация), которые входят в состав деятельности при решении комбинаторных задач.

Второй этап – обучение решению комбинаторных задач с использованием систематического перебора всех возможных вариантов.

Задача учителя на этом этапе состоит в том, чтобы показать ученикам преимущества осуществления рационально организованного перебора, а также научить их при решении каждой конкретной задачи самостоятельно находить «умный» способ перебора.

Например: Маша, Катя и Ульяна едут в электричке на дачу. Они сидят на одной скамейке. Девочкам нужно проехать 8 остановок. Чтобы было не скучно ехать, они придумали на каждой остановке меняться местами. Смогут ли они каждый раз меняться местами так, чтобы новое расположение отличалось от предыдущих?

Запиши полученные варианты еще раз, разделив их на три группы.

Кто сидел сначала у окна?	Кто потом сидел у окна?	Кто еще должен сидеть у окна?

Если одна девочка будет сидеть у окна, то сколько вариантов расположения двух других можно составить?

Объясни, какой хитрый способ пересаживания могли выбрать девочки, чтобы быстро составить варианты и быть уверенным, что все они были найдены.

По характеру получаемых соединений решают три вида комбинаторных задач:

1. Если соединения отличаются друг от друга лишь порядком входящих в них элементов, то это перестановки.

Например, на каждом флажке должно быть 3 горизонтальные полоски: красного, синего и белого цвета. Нарисуй все флажки, которые можно получить, если менять порядок расположения цветов. Скажи, сколько вариантов флажков получится, если на каждом флажке будет:

а) 3 полоски: зеленая, желтая, коричневая;

б) 2 полоски: розовая и голубая;

в) 3 полоски: 2 красные и 1 белая.

2. Если соединения отличаются друг от друга хотя бы одним способом, элементом либо состоят из одних и тех же, но расположенных в разном порядке элементов, то это размещения.

Например, запишите все двузначные числа, которые можно составить, используя цифры 9, 7, 5. Сколько таких чисел получилось?

3. Если соединения отличаются составом, но не порядком элементов, то это сочетания.

Например, Иванушка попал в избушку к волшебнику, у которого есть чудесные вещи: меч-кладенец, шапка-невидимка, ковер-самолет, сапоги-скороходы и скатерть-самобранка. Волшебник говорит Иванушке: «Можешь взять любые 2 вещи, но вернуть их нужно через 1 день. И так ты можешь брать только две вещи, но главное, чтобы каждый раз набор чудесных вещей отличался от предыдущих. Какие наборы вещей ему надо брать? Сколько раз Иванушка сможет приходить к волшебнику за вещами?

Учеников необходимо последовательно познакомить с каждой из перечисленных групп. Сначала вводят задачи на нахождение перестановок, затем – размещений и последними – задачи на нахождение сочетаний. При этом в новую группу задач включаются и задачи из предыдущих групп.

На третьем этапе решаются более сложные задачи, и для их решения дети учатся использовать такие средства организации перебора, как таблицы и графы.

Приведите пример задачи.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 3, 15.

Методика формирования понятия о геометрической величине в начальной школе и ее измерении.

Величины в начальном курсе математики трактуются как свойства реальных объектов или явлений. Однородные величины выражают одно и то же свойство объектов некоторого множества, а разнородные величины выражают различные свойства объектов.

Назвать геометрические величины, изучаемые в школьном курсе математики.

Величины обладают следующими свойствами:

Величины одного рода сравнимы. Процесс сравнения зависит от рода рассматриваемой величины.

1. Величины одного рода можно складывать, в результате получаем величину того же рода (свойство аддитивности).
2. Каждый род величины требует своего способа сложения.
3. Величину умножают на действительное число, получают величину того же рода.
4. Величины одного рода вычитают.
5. Величины одного рода делят. Частное (неотрицательное-действительное число) называют также отношением величин.

Сравнение величин приводит к понятию измерения величин (сравнению данной величины с некоторой величиной того же рода, принятой за единицу). В результате измерения величины получают определенные численные значения при выбранной единице.

Величины, которые вполне определяются одним численным значением, называют скалярными величинами.

Свойство протяженности объектов приводит к понятию длины.

Разобрать, как длины отрезков сравниваются и складываются.

На основе интуитивного понимания величины строится план изучения некоторой произвольной величины в начальной школе.

Так как величина – это свойство элементов некоторого множества, то, прежде всего, необходимо познакомить учеников с носителями свойства – объектами, элементами множества. Особенностью любой величины является то, что это свойство объектов проявляется при сравнении между собой. Следовательно, следующим этапом должно быть знакомство со свойством путем сравнения объектов соответствующим способом. Способ сравнения зависит от конкретной величины, с которой нужно познакомить учащихся.

Для каждой величины существуют несколько способов сравнения объектов.

Для измерения величин изобретены различные измерительные приборы и необходимо научить школьников пользоваться наиболее распространенными из них. Таким образом, можно определить план изучения величины:

1. Знакомство с объектом. Формирование представлений об отношениях равенства и неравенства объектов, о «сумме» объектов.
2. Знакомство со свойством (величиной), которое проявляется лишь в сравнении объектов, через непосредственное сравнение объектов: введение термина – названия величины.
3. Создание ситуации, в которой непосредственное сравнение объектов невозможно или значительно затруднено. Введение произвольной единицы измерения, знакомство с процессом измерения величины.
4. Знакомство с общепринятой единицей измерения изучаемой величины (непосредственное измерение объектов с помощью этой единицы измерения; ознакомление с измерением величины во введенных единицах с помощью измерительных инструментов).
5. Знакомство с косвенными способами измерения величины. Выработка измерительных умений.
6. Создание ситуации, в которой измерение величины с помощью известной единицы измерения невозможно, знакомство с различными способами измерения в новых единицах.
7. Обучение арифметическим действиям со значениями величин, перевод значений величин из одних единиц измерения в другие.

8. Применение знаний о величинах и действиях со значениями величин к решению различных математических и практических задач.

Конкретизируйте приведенный план методикой изучения длины или площади.

Приведите примеры записи операций над именованными числами, выраженными мерами длины.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 2, 4, 10, 13.

Методика ознакомления с положительными и отрицательными числами по программе Л.В. Занкова на основе расширения множества натуральных чисел до множества целых чисел.

В общем виде принцип расширения числового запаса можно сформулировать следующим образом: пусть нам нужно расширить числовое множество А до числового множества В, т.е. А – исходное, расширяемое множество, а В – его расширение. Тогда:

1) множество А должно быть подмножеством множества чисел В;

2) важнейшие операции и отношения на множестве В должны быть определены так, чтобы для элементов множества В, являющихся в то же время элементами множества А, они совпадали с одноименными операциями и отношениями, определенными на множестве А до его расширения (согласованность операций и отношений);

3) в множестве В должна стать выполнимой та операция, которая было выполнимой в множестве А лишь с ограничением (или вообще не была выполнима) – целевое требование к расширению;

4) расширение числового множества А должно быть минимальным, т.е. не должно существовать промежуточного множества С такого, что $A \subset C \subset B$ и С удовлетворяет перечисленным выше условиям 1–3.

В математике имеется ряд задач, неразрешимых во множестве N. Так, искомое натуральное число х не может быть решением уравнения $в + x = a$ ($a, в \in N$), если $a < в$.

Вторая проблема, неразрешимая во множестве N, возникает при описании процесса измерения величин. Если величина х имела значение $a \in N$ и в результате некоторого процесса уменьшилась на в единиц, то новое ее значение $y = a - в$ оказывается неопределенным в N, если $a < в$.

Неразрешимость этих задач приводит к необходимости расширения множества натуральных чисел. Это расширение достигается путем введения сначала нуля, а потом отрицательных целых чисел, которые в объединении с множеством N образует множество целых чисел Z.

Цель введения новых чисел – расширение кругозора учащихся. На начальном этапе доводят до сознания детей необходимость появления новых чисел, вытекающую из жизненных ситуаций. Например, при измерении температуры.

Числа со знаком «+» называют положительными, а со знаком «-» – отрицательными.

Далее рассматривают отношение «новых» чисел к ранее изученным, это делают с помощью числового луча. Справа от нуля расположены положительные числа, слева – отрицательные.

Объем изучаемого материала может быть расширен (за счет рассмотрения дробных чисел), также можно познакомить учеников с простыми случаями выполнения действий с рациональными числами. Для этой цели целесообразно использовать числовую прямую.

Методика изучения этого материала опирается на идею расширения множества натуральных чисел до множества целых. Это связано с необходимостью выполнения операции вычитания, обратной к операции сложения. При этом множество натуральных чисел становится подмножеством нового множества целых чисел. Важнейшие операции и соотношения на множестве целых чисел Z определяются так, чтобы для целых чисел, являющихся в то же время натуральными числами, они совпадают с одноименными операциями и соотношениями, определенными на множестве натуральных чисел N до его расширения.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 2, 4, 9.

Позиционные и непозиционные системы счисления и их применение. Методика изучения нумерации многозначных чисел.

Язык для наименования, записи чисел и выполнения действий над ними называется системой счисления. *Ввести понятие позиционной и непозиционной системы счисления и привести примеры: римская система, славянская, система Древнего Вавилона, современная десятичная система счисления, система счисления с произвольным основанием и ее использование в современной ЭВМ.*

В концентре «Многозначные числа» заканчивается изучение нумерации целых неотрицательных чисел.

В результате изучения темы ученики должны:

1) усвоить названия и последовательность чисел натурального ряда в пределах 1 млрд.;
2) знать названия классов и разрядов внутри каждого класса;
3) научиться читать и записывать любое число в пределах класса миллионов, представлять число в виде суммы разрядных слагаемых;
4) уметь сравнивать многозначные числа, получать последующее и предыдущее число.

Успешность работы по этой теме зависит от усвоения нумерации чисел в пределах 1000.

В чем же заключается сущность нумерации многозначных чисел?

Если к наибольшему трехзначному числу прибавим 1, то получим 1000.

1 тыс. – счетная единица чисел второго класса и в то же время единица первого разряда второго класса. Между счетными единицами существуют соотношения: 10 ед. = 1 дес., 10 дес. = 1 сот., 10 сот.= 1 тыс., 10 тыс.= 1 дес. тыс., 10 дес. тыс. = 1 сот. тыс., 10 сот. тыс. = 1 млн. и т.д.

Единицы, десятки и сотни составляют класс. Ученики начальных классов знакомятся с тремя классами: классом единиц, классом тысяч и классом миллионов.

Названия чисел каждого класса образуются из тех же простых и сложных числительных и по тем же правилам, что и числа первого класса, но с добавлением для названия чисел второго класса слова «тысяча», третьего класса – «миллион».

При изучении темы применяют классные счеты и нумерационную таблицу. Тема изучается в два этапа, разделенные по времени изучения: знакомство с числами второго класса и изучение нумерации чисел третьего класса. Но возможно и совместное изучение чисел второго и третьего классов.

На каждом этапе нумерация чисел изучается по плану:

– подготовительная работа;

– образование новой классной единицы (тысячи, миллиона) и соотношение их с другими счетными единицами;

– ознакомление учеников с понятием класса, его структурой, названием разрядов в каждом классе;

– обучение чтению и записи чисел;

– знакомство с разрядным и десятичным составом числа и составом числа по классам.

Описать методику работы на каждом из перечисленных выше этапов.

Заканчивая изучение темы, ученики должны уметь дать характеристику любому многозначному числу в пределах 1 миллиарда. Можно использовать такую схему разбора числа: 1) прочитайте число; 2) назовите число единиц каждого класса и каждого разряда в числе; 3) назовите десятичный состав числа (общее количество единиц каждого разряда); 4) назовите предшествующее и последующее числа; 5) укажите, сколько всего цифр понадобилось для записи числа и сколько из них различных; 6) используя все цифры данного числа, запишите наибольшее и наименьшее.

Используя этот план разбора, дать характеристику любому числу.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 3, 4, 8, 10, 15.

Особенности содержания и организации внеурочной работы по математике в начальных классах.

Внеурочная работа по математике составляет неразрывную часть учебно-воспитательного процесса обучения математике. Она существенно отличается от классно-урочной формы организации учебного процесса и в начальной школе имеет свои особенности:

1. По содержанию материал не регламентирован программой, но материал, предъявляемый ученикам, должен соответствовать их знаниям, умениям и навыкам.

2. Разнообразие форм и видов работы с учащимися.

3. Особый занимательный материал, широкое использование игровых форм и элементов соревнования.

4. Занятия не регламентированы по времени.

При проведении внеклассных занятий по математике необходимо соблюдать основные дидактические принципы: научности, сознательности, активности учащихся, наглядности. При подборе содержания работы следует учитывать возрастные и индивидуальные особенности учащихся.

К основным формам внеклассной работы относятся: групповые занятия после уроков; кружковые занятия; вечера; математические олимпиады; добровольные зачеты; математические игры; написание математических сказок и сочинений; математические уголки и стенгазеты; выставки; экскурсии.

Кратко охарактеризуйте каждую форму внеклассной работы.

Внеучебные математические задачи бывают двух видов: одни для тех, кто увлекается математикой, другие же для тех учеников, которым требуется помощь в развитии сообразительности, творческой активности. Первую группу задач можно отнести к курсу математики, но повышенной трудности, вторая же группа – математические развлечения. К математическим развлечениям следует относить задачи-смекалки, эвристические и логические задачи, математические игры, математические фокусы и другие. Среди математических развлечений имеются и такие задачи, которые допускают очень большое, а иногда бесконечное множество решений. Смысл таких задач в поиске оригинальных, красочных приемов и решений.

Задания для внеклассной работы должны быть конкретными и доступными, делать процесс решения интересным, иметь занимательную форму.

Привести пример заданий для внеучебной работы.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 5, 10, 11.

Понятие «текстовая задача», классификация задач. Процесс решения текстовых задач учениками начальных классов.

Курс математики раскрывается в системе целесообразно подобранных задач. Термин «задача» используется в жизни и науке очень часто. Этим термином обозначаются многие и весьма различные понятия. Разные авторы по-своему трактуют это понятие.

По мнению М.И. Моро, А.М. Пышкало, задача – это сформулированный словами вопрос, ответ на который может быть получен с помощью арифметических действий.

М.А. Бантова: задача – это жизненная ситуация, которая связана с числами и требует выполнения арифметических действий.

Известный педагог-математик С.О. Шатуновский в 1940 году дал такое определение задачи: «Задача есть изложение требования «найти» по «данным» вещам другие «искомые» вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях».

Общее во всех трактовках понятия задачи – структура задачи, и за родовое понятие при определении берется понятие, относящееся к структуре задачи. Различие выражается главным образом в том, что в одних определениях в качестве родового понятия берется структура задачи в целом, в других конечная ее цель – требование найти искомое. Поэтому есть смысл структуру считать исходным положением при определении понятия «задача».

Любая задача состоит из следующих элементов:

1. Данные и их свойства.
2. Отношения между данными.
3. Искомые и их свойства.
4. Отношения между данными и искомыми.
5. Указание на необходимость найти искомое.

Если данные и искомые, а также отношения между ними в некоторой задаче можно выразить математическим языком, то такую задачу называют математической.

Задачи, содержащиеся в различных курсах математики и используемые в качестве средства изучения математической теории, называются учебными. Все задачи (учебные математические) по характеру требования делятся на 4 группы: задачи на нахождение объекта, на доказательство, на исследование, на преобразование. Большинство задач в начальной школе относится к задачам на нахождение объекта.

Зависимость между данными и искомыми числами может быть выражена в четырех основных формах: аналитически, таблично, графически и текстом. Поэтому все задачи можно разделить на четыре группы: аналитические, табличные, графические и текстовые.

Кроме того, задачи делятся на простые и составные.

Привести примеры каждой группы задач.

Общее умение работы над задачей включает в себя:

– умение прочитать задачу;
– умение отделить известное от неизвестного;
– умение установить связь между данными;
– умение выбрать арифметическое действие;
– умение выполнить арифметическое действие;
– умение сформулировать ответ на вопрос задачи;
– умение проверить решение задачи.

При работе над задачей учитель может опираться на такой план:

1. Подготовительный этап.
2. Разъяснение текста задачи.
3. Анализ (разбор) задачи. Поиск пути ее решения.
4. Составление плана решения.
5. Выполнение решения задачи. Получение ответа на вопрос задачи.
6. Проверка полученного ответа. Формулировка ответа.
7. Решение после решения задачи.

Остановимся на каждом из этапов процесса решения задачи.

1. Подготовительная работа проводится, как правило, при решении составных задач. Эта работа заключается в решении простых задач, входящих в составную, и повторении вычислительных приемов, которые встретятся при решении основной задачи.

2. На этом этапе ученики знакомятся с текстом и учитель разъясняет незнакомые детям слова.

3. В процессе анализа текста ученик должен выделить условие и требование задачи. В условии необходимо выделить все

данные, которые можно перевести на язык математики. Чтобы помочь детям установить зависимость между величинами, входящими в задачу, выполняют наглядную интерпретацию условия задачи. К наглядной интерпретации относят: краткую запись условия задачи (с помощью опорных слов, таблицы, чертежа), иллюстрацию, предметное воссоздание условия задачи. Поиск пути решения задачи состоит в выборе арифметического действия, с помощью которого решается задача. Поиск пути решения составных задач осуществляется аналитическим или синтетическим методом.

4. План решения – это перечень арифметических действий, с помощью которых решается задача.

5. Решение задачи – это выполнение арифметических действий, выбранных при составлении плана решения. При письменном решении используют такие формы записи: составление по задаче выражения и нахождение его значения; запись в виде отдельных действий с пояснениями и без них; запись в виде отдельных действий по вопросам.

6. Виды проверки правильности решения задачи: составление и решение обратной задачи, установление соответствия между числами, полученными в результате решения, и данными числами, решение задачи другим способом, прикидка ответа.

7. После решения задачи можно предложить ученикам дополнительную работу с текстом задачи, используя различные методические приемы.

Приведите методику работы над конкретной задачей, опираясь на изложенный выше план.

Для подготовки используйте следующие источники библиографического списка: 1, 4, 5, 10, 11.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

1. Алексеева, А.В., Бокуть, Е.Л. Преподавание математики в начальных классах [Текст]. – М.: ЦГЛ, 2003.

2. Аргинская, И.И. Математика. 1, 2, 3, 4 класс [Текст]. – М.: Просвещение, 2009.

3. Аматова, Г.М., Аматов, М.А. Математика [Текст]: в 2 кн. – М.: Академия, 2009.

4. Белошистая, А.В. Методика обучения математике в начальной школе [Текст]: курс лекций. – М., 2005.

5. Виноградова, Л.В. Методика преподавания математики в средней школе [Текст]. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2005.

6. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии [Текст]. – М.: ACADEMIA, 2004.

7. Зайцева, С.А., Румянцева, И.Б., Целищева, И.И. Методика обучения математике в начальной школе [Текст]. – М.: Владос, 2008.

8. Истомина, Н.Б. Методика обучения математике в начальных классах [Текст]. – М.: Просвещение, 1996.

9. Колягин, Ю.М. Основные понятия школьного курса математики [Текст]. – М.: Просвещение, 1985.

10. Математика [Текст]: учебник для начальной школы / под ред. Колягина Ю.М. – М.: Просвещение, 2009.

11. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.

12. Налимова, И.В. Преподавание геометрического материала в начальных классах [Текст]: учебно-методическое пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002.

13. Налимова, И.В. Методика изучения геометрических величин в начальной школе [Текст]: учебно-методическое пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003.

14. Программы общеобразовательной школы. Начальные классы [Текст].

15. Стойлова, Л.П. Математика [Текст]: учеб. пособие для студ. сред. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2001.

16. Теоретические основы методики обучения математике в начальных классах [Текст] / под ред. Истоминой Н.Б. – М.: Изд-во «Институт практической психологии», 1996.

17. Якиманская, И.С. Психологические основы математического образования [Текст]. – М.: ACADEMIA, 2004.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

Итоговая аттестация студентов специальности «Педагогика и методика начального образования» (математика и методика ее преподавания)

Методическое пособие

Составители:
Ирина Владимировна Налимова
Маргарита Викторовна Лобашова

Редактор О. П. Новикова
Компьютерная верстка – И. В. Тимашев

Подписано в печать 25.03.2011. Формат 60×92/16
Объем 4 п.л.; 2,7 уч.-изд. л. Тираж 100 экз. Заказ № 111.

Издательство Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 32-98-69, 72-64-05