Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

**Кафедра общей физики**
**Лаборатория механики**

# Лабораторная работа № 10
# Определение модуля Юнга

Ярославль
2006

# Оглавление

# Лабораторная работа № 10.
## Определение модуля Юнга

**Цель работы:** экспериментальное определение модуля Юнга из растяжения проволоки на приборе Лермантова.

**Приборы и принадлежности:** прибор Лермантова (смонтирован на стене), зрительная труба, шкала, рулетка.

## 1. Краткая теория

Твердые тела под действием внешних сил деформируются, т.е. изменяют форму или объем. Тела, которые после прекращения действия внешних сил полностью восстанавливают свои первоначальные размеры и форму, называются **упругими**, а такие деформации — упругими. Упругие деформации происходят в том случае, если сила, вызвавшая деформацию, не превосходит некоторой, определенной для каждого конкретного тела (материала), величины.

Если тело после устранения внешней силы остается полностью деформированным, оно является абсолютна **неупругим** (пластичным).

При деформации тел в них возникают **внутренние силы**. В упругих телах они определяются величиной и видом деформации и после прекращения действия внешних сил возвращают телу его первоначальные размеры и форму.

Существует множество видов упругих деформаций: одностороннее растяжение (и сжатие), всестороннее растяжение (и сжатие), изгиб, сдвиг, кручение н др. Любую упругую деформацию можно свести к двум основным: растяжению (или сжатию) и сдвигу.

Основные закономерности упругих деформаций были сформулированы английским физиком Робертом **Гуком** в 1675 году. Закон, носящий его имя, заключается в следующем:

1. при любой малой деформации сила упругости пропорциональна деформации,
2. малые деформации пропорциональны приложенным силам.

Получим математическое выражение для этого закона применительно к деформации однородного растяжения, которая изучается в данной работе.

Пусть к тонкому стержню (проволоке) длиной $\ell$, один конец которого закреплен, приложена внешняя растягивающая сила $\vec{F}$. Стержень получил некоторое абсолютное удлинение $\Delta\ell$. Количественной характеристикой деформации может служить $\Delta\ell$ или относительное удлинение $\frac{\Delta\ell}{\ell}$, называемое также в общем случае относительной деформацией.

**Относительное удлинение** — отвлеченное число, указывающее, на какую часть увеличилась первоначальная длина стержня. Существует понятие **однородной деформации**, при которой каждый элемент стержня произвольной длины $\ell_1$ имеет такое же относительное удлинение, как и весь стержень:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\Delta\ell_1}{\ell_1} \,.$$

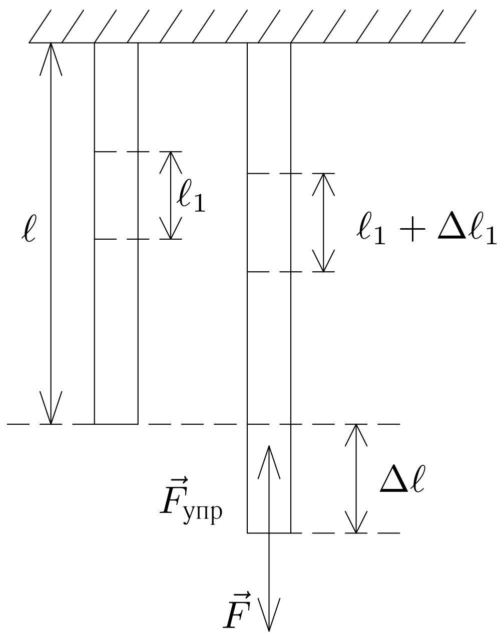

Рис. 1.1

Таким образом, $\varepsilon$ — количественная характеристика деформации как всего стержня, так и любой его части, т.е. исчерпывающая характеристика однородной упругой деформации.

Сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, возникающая в растянутом стержне, оценивается по внешней растягивающей силе $\vec{F}$. Из условия равновесия стержня имеем:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F} \,. \qquad (1.1)$$

Силы упругости действуют в любом сечения стержня и при однородной статической деформации повсюду одинаковы и равны по модулю внешней растягивающей силе.

Деформации, независящие от времени, называются стационарными. При этом стационарные деформации покоящегося или равномерно движущегося тела называются **статическими**.

Р. Гук на опыте установил, что абсолютное удлинение в случае малых деформаций прямо пропорционально первоначальной длине стержня и растягивающей силе и обратно пропорционально его площади поперечного сечения $S$:

$$\Delta\ell = \alpha_{\text{упр}} \frac{\ell F}{S} \,. \qquad (1.2)$$

Коэффициент пропорциональности $\alpha_{\text{упр}}$ зависит от рода материала и является характеристикой его упругих свойств. Это коэффициент **упругости**, определяемый на опыте, а для некоторых тел рассчитываемый теоретически из молекулярных представлений.

Величина, обратная коэффициенту упругости, называется **модулем Юнга**:

$$\frac{1}{\alpha_{\text{упр}}} = E\,. \tag{1.3}$$

Для относительной деформации из выражения (1.2) имеем:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \alpha\frac{F}{S}\,. \tag{1.4}$$

Отношение $\frac{F}{S}$ называется упругим напряжением $\sigma$. Смысл выражения (1.4) — относительная деформация прямо пропорциональна упругому напряжению:

$$\varepsilon = \alpha_{\text{упр}}\sigma\,. \tag{1.5}$$

С помощью модуля Юнга можно иначе сформулировать и записать математически закон Гука:

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\alpha_{\text{упр}}} = E\varepsilon \tag{1.6}$$

**— при малых деформациях упругое напряжение прямо пропорционально относительной деформации.**

Тогда физический смысл модуля Юнга заключается в следующем: он равен напряжению, соответствующему увеличению длины стержня вдвое, если бы при такой нагрузке тело оставалось упругим и подчинялось бы закону Гука. Действительно, $\sigma$ численно равно $E$ при $\varepsilon = 1$, т.е. при $\Delta\ell = \ell$.

На самом деле подавляющее большинство материалов разрывается раньше, чем они будут растянуты вдвое, поэтому фактически к стальному стержню нельзя приложить напряжение, равное модулю Юнга. Но это совсем не означает, что его вообще нельзя определить на опыте. В данной работе используется один из косвенных методов определения этой одной из важных характеристик упругих свойств тел. В частности, от величины этого модуля зависит энергия и плотность энергии упруго деформированных тел иди сред. Величины модуля Юнга приводятся для разных материалов в справочных таблицах, для стали и железа он равен $(1,9 - 2,0) \cdot 10^{11}$ Па или $\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$.

Можно связать полученные выражения и с той формой закона, которая изучается в школе.

Из (1.1), (1.2) и (1.3) имеем:

$$|\vec{F}_{\text{упр}}| = \frac{ES}{\ell}\Delta\ell = k\Delta\ell\,. \tag{1.7}$$

Коэффициент $k$ называют **упругостью** (для пружин — **жесткостью**):

$$k = \frac{ES}{\ell}\,.$$

Для стержней этот коэффициент можно рассчитать, для пружин определяется из опыта. (Деформация проволоки в пружине имеет сложный характер и не может быть сведена только к растяжению.) Упругость (жесткость) определяется только упругими свойствами тела $E$ и его первоначальными размерами $\ell$, $S$.

Часто выражение (1.7) записывают в проекции на ось $X$:

$$F_x = -k\Delta x = -k(x - x_o)\,,$$

при этом, если $x_o = 0$

$$F_x = -kx\,. \tag{1.8}$$

Сила упругости прямо пропорциональна абсолютному удлинению. Направление силы упругости противоположно направлению внешней растягивающей или сжимающей силы.

## 2. Описание установки и метода измерений

Прибор Лермантова состоит из кронштейнов $A$ и $B$ (см. рис. 2.1), служащих для крепления исследуемой проволоки. При нагрузке проволока удлиняется и пластинка $r$, несущая зеркальце $M$ и опирающаяся на цилиндр $d$, вращается около оси $O$.

Нижний кронштейн $B$ имеет арретир $f$, пользуясь которым, завинчивая винт $C$ до упора, можно освобождать проволоку от нагрузки. Арретир предохраняет прибор от вырывания концов проволоки при возможных резких толчках.

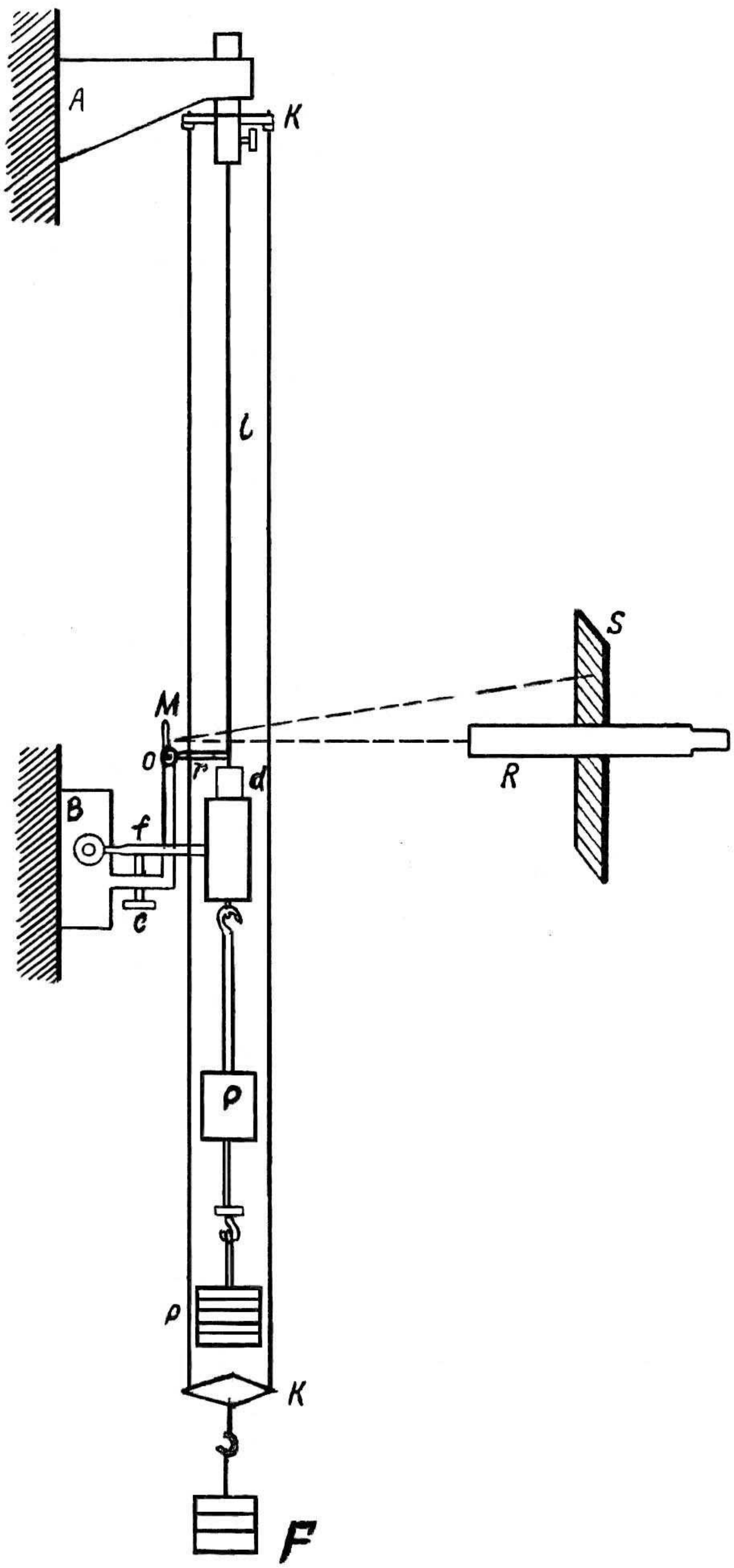


Рис. 2.1

Грузы берут с особого подвеса, укрепленного на верхнем кронштейне; при снятии нагрузки грузы снова укладываются на этот подвес. Этим достигается постоянство нагрузки и тем самым — постоянство прогиба верхнего кронштейна.

Нагрузку проволоки и снятие грузов нужно всегда проводить при закрученном до упора арретире.

Модуль Юнга в этой работе рассчитывается с помощью закона Гука:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F \cdot \ell}{S \cdot \Delta\ell} = \frac{mg\ell}{S \cdot \Delta\ell}\,, \tag{2.9}$$

где $m$ — масса груза. Остальные обозначения приведены выше.

Наибольшую сложность представляет измерение абсолютного удлинения $\Delta\ell$, так как оно очень мало. При удлинении проволоки на $\Delta\ell$ зеркальце повернется на угол $\varphi$ и будет иметь место соотношение:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta\ell}{b} \quad \text{см. рис. 2.2.} \tag{2.10}$$

Здесь $b$ — расстояние от отражающей поверхности зеркала до проволоки, оно равно 11 мм.

Изменение положения зеркальца фиксируется на шкале $S$, изображение которой рассматривается в зеркальце через трубу $R$, имеющую в окуляре горизонтальную нить. Если $\Delta n = n' - n_o$ —разность, измеренная по шкале, а $Д$ — расстояние от зеркала до шкалы, то можно записать:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\Delta n}{Д} = \frac{n - n_o}{Д}\,. \tag{2.11}$$

Так как $\Delta\ell$ и $\varphi$ малы, можно принять, что

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2\operatorname{tg}\varphi\,, \tag{2.12}$$

тогда

$$\Delta\ell = b\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\Delta n}{2Д}\,. \tag{2.13}$$

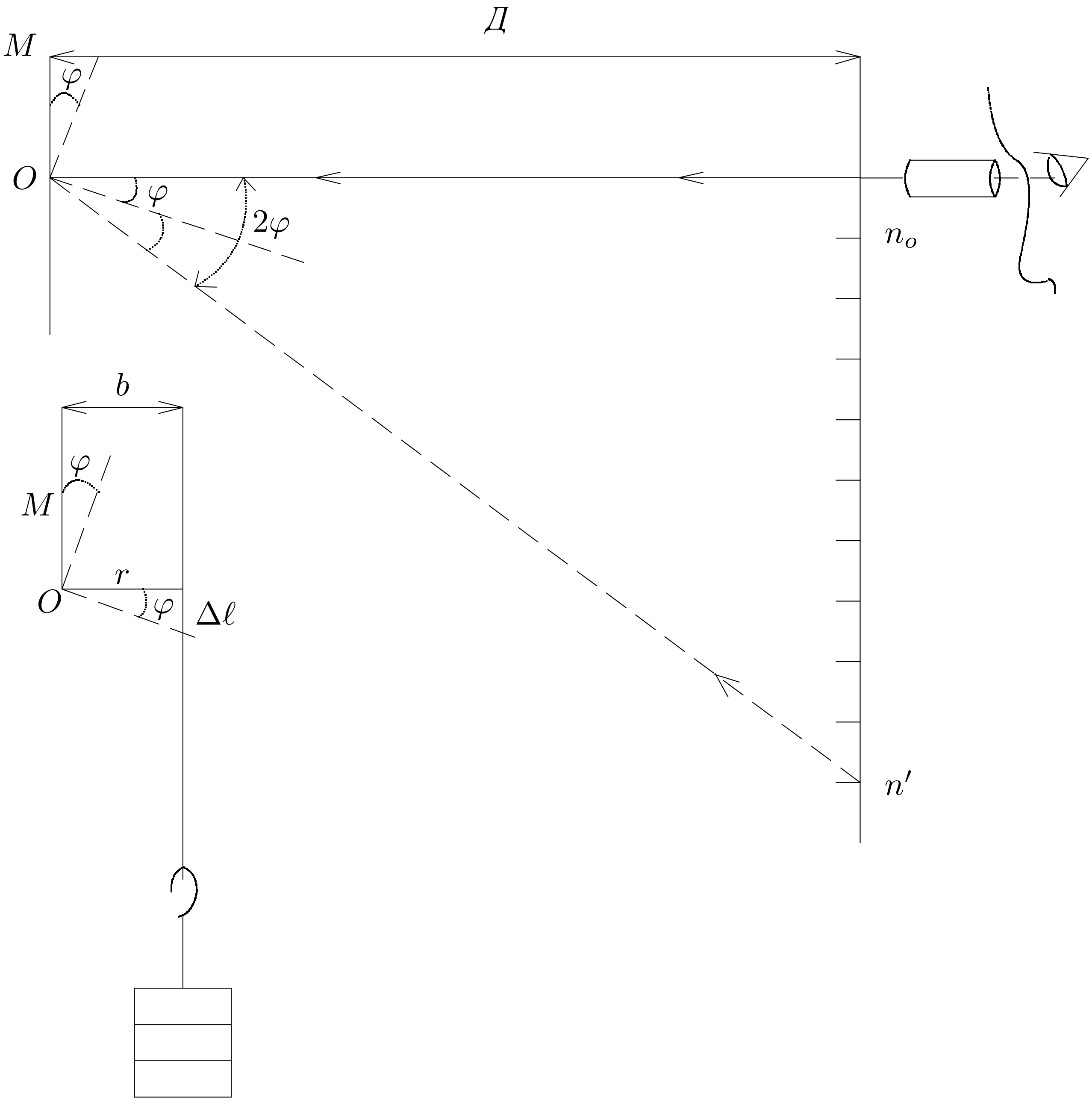


Рис. 2.2

Подставляя (2.13) в (2.9) и заменяя $S = \frac{\pi d^2}{4}$, где $d$ — диаметр проволоки, получаем расчетную формулу:

$$E = \frac{8mg\ell Д}{\pi d^2 b \Delta n} = \frac{8mg\ell Д}{\pi d^2 b(n' - n_o)}\,. \tag{2.14}$$

Диаметр проволоки равен 0,65 мм. Длина ее 83 см.

Таким образом, для расчета модуля Юнга данным методом вам нужно знать массу груза, расстояние $Д$ и $\Delta n$.

# 3. Выполнение работы и обработка результатов

## Задание 1. Определение модуля Юнга

Перед началом работы располагают на столе шкалу на расстоянии $0,5 - 0,6$ м от зеркальца, так, чтобы ее изображение было видно визуально в зеркальце наблюдателю, стоящему у торца стола. При этом зеркальце должно быть расположено вертикально.

Далее изображение шкалы нужно увидеть в окуляре зрительной трубы, настроить трубу на резкость, измерить расстояние $Д$ и во время опытов не смещать шкалу и трубу.

Затем нужно освободить конец проволоки, вывернув винт, и заметить положение горизонтальной нити в трубе $n_o$, при отсутствии грузов (они лежат на специальном подвесе). Цена одного деления шкалы 1 см.

Завернув винт до упора, нагружают проволоку одним или несколькими грузами (по указанию преподавателя). Затем освобождают зеркальце и делают отсчет $n'$ по шкале. Такие опыты, измеряя каждый раз $n_o$ и $n'$, т.е. перекладывая груз с подвеса на платформу, проводят $5 - 7$ раз. Результаты заносят в таблицу. Рассчитывают по формуле (2.14) модуль Юнга и обрабатывают результаты. Сравнивают полученный результат с табличным.

**Внимание:** нельзя грузы снимать и класть на стол или окно! Не забывайте правильно пользоваться арретиром! Следите, чтобы при отсчетах зеркальце касалось цилиндра.

## Задание 2. Проверка закона Гука.

Повторите описанные выше опыты с любой парой грузов, со всеми тремя. Для каждого случая результаты измерений занесите в таблицу, аналогичную приведенной в работе. Рассчитайте в каждом случае модуль Юнга. Сформулируйте свой вывод.

| № опыта | $m$ грузов | $F = m \cdot g$ | $n_1 \downarrow$ | $n_2 \uparrow$ | $n_{\text{ср}}$ | $\Delta n$ | $\Delta n^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |

### Задание 3. Расчет $\alpha_{упр}$, $k$ и $\Delta\ell$.

По среднему значению модуля **Юнга**, полученному в задании 1, рассчитайте коэффициент упругости $\alpha_{упр}$ и упругость проволоки $k$. Рассчитайте также $\Delta\ell$, $\operatorname{tg}\varphi$ для проверки их малости и правильности уравнения (2.12) в данной работе. Постройте график зависимости удлинения $\Delta\ell$ от силы растяжения $F$.

## 4. Содержание отчета

Название и цель работы, сущность метода и вывод расчетной формулы, таблицы результатов, полученное значение модуля Юнга и краткие выводы.

## 5. Контрольные вопросы

1. По какому признаку тела делятся на упругие и неупругие? Каковы особенности действия сил, возникающих внутри тел при упругих и пластических деформациях?
2. Сформулируйте закон Гука и область его применимости.
3. Запишите закон Гука для абсолютного удлинения, относительного удлинения, для силы упругости.
4. Изобразите качественно зависимость упругого напряжения от относительной деформации для области, где справедлив закон Гука.
5. Каков физический смысл модуля Юнга и в каких единицах он измеряется в СИ?
6. Что такое коэффициент упругости и упругость, жесткость? В каких единицах измеряется каждая из этих величин?
7. Вывод расчетной формулы для модуля Юнга.