Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского

Лаборатория механики

Лабораторная работа № 19

Изучение законов вращения твёрдого тела относительно оси с помощью маятника Максвелла

Ярославль
2025

Оглавление

1. Описание установки 3
2. Принцип работы маятника Максвелла 5
3. Экспериментальное определение моментов инерции колец . 7
4. Теоретический расчёт момента инерции колец 7
5. Ход работы 8

Лабораторная работа № 19

Изучение законов вращения твёрдого тела относительно оси с помощью маятника Максвелла

Цель работы:

– знакомство с одним из методов экспериментального определения момента инерции тел,

– проверка экспериментального метода теоретическим расчётом моментов инерции симметричных тел.

Приборы и принадлежности: Маятник Максвелла, набор колец различной массы одинакового внутреннего диаметра, штангенциркуль, линейка, весы.

Материал для изучения:

1. Маятник Максвелла.
2. Момент инерции твёрдых тел.
3. Кинетическая энергия вращательного движения.

Литература:

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т. 1 Механика, 1989.
2. Савельев И.В. Курс физики. т. 1., М., 1989.
3. Хайкин Э.И. Физическая механика.

1. Описание установки

Общий вид установки изображён на рис. 1.1. Установка представляет собой настольный прибор и состоит из следующих составных частей.

Основание 1, на вертикальной стойке которого размещены верхний 2 и нижний 3 кронштейны. Верхний кронштейн снабжён электромагнитами и устройством 4 для крепления и регулировки бифилярного подвеса 5. Маятник представляет собой диск 6, закреплённый на оси 7, подвешенный на бифилярном подвесе. На диск маятника могут надеваться сменные кольца 8. Маятник со сменным кольцом

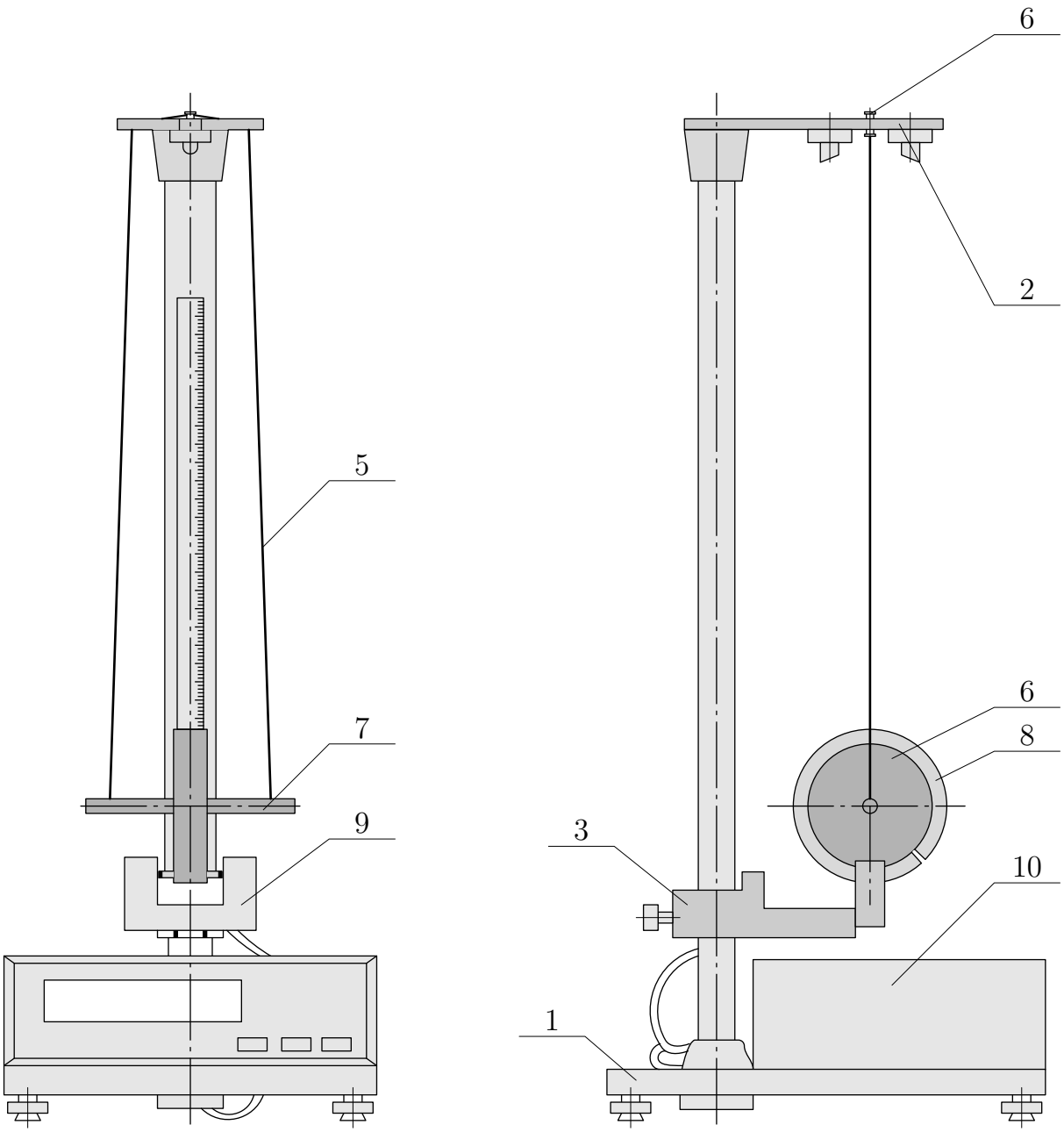

Рис. 1.1

фиксируется в верхнем исходном положении с помощью электромагнита.

На вертикальной стойке нанесена миллиметровая шкала, с помощью которой может определяться максимальный ход маятника.

Фотодатчик 9 предназначен для выдачи электрических сигналов на электронный блок 10.

Электронный блок 10 представляет собой жёсткую конструкцию с размещёнными на передней панели индикаторами “ПЕРИОД”, “ВРЕ-

МЯ" кнопками управления "СБРОС", "ПУСК", "СТОП" и тумблером "СЕТЬ".

Электронный блок состоит из устройства питания и устройства управления и индикации. Электронный блок предназначен для управления подачи питания на электромагнит, определения длительности и количества периодов пересечения от фотодатчика подвижным элементом (диском маятника) прибора, и вывода результатов на индикатор.

2. Принцип работы маятника Максвелла

Принцип работы маятника основан на том, что поднятый на высоту h маятник, обладающий массой M будет иметь запас потенциальной энергии Mgh. После отключения электромагнита маятник начнёт раскручиваться и его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую энергию поступательного движения и кинетическую энергию вращательного движения.

$$Mgh = \frac{Mv_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}\,, \tag{2.1}$$

где M — масса маятника;
h — высота его подъёма;
v — скорость центра инерции маятника;
I — момент инерции маятника;
ω — угловая скорость вращения.

Это уравнение позволяет получить соответствующее выражение для момента инерции маятника, однако предварительно обсудим некоторые динамические и кинематические особенности такой вращающейся и одновременно поступательно движущейся системы.

При движении маятника центр его инерции (масс) движется поступательно. Уравнение его движения согласно второму закону Ньютона

$$M\vec{g} + 2\vec{F}_H = M\vec{a}_c \tag{2.2}$$

и в проекциях на вертикальное направление:

$$Mg + 2F_H = Ma_c\,, \tag{2.3}$$

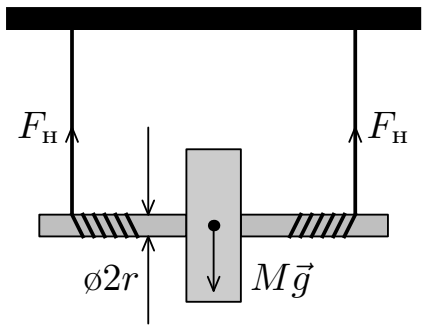

Рис. 2.1

где a_c — ускорение центра масс,
F_H — сила натяжения нитей (см. рис.2.1).

Основной закон динамики вращательного движения маятника (диска с валом) определяется известным уравнением динамики вращательного движения

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon} \tag{2.4}$$

которое в проекции на ось вращения даёт:

$$2F_H \cdot r = I\varepsilon\,, \tag{2.5}$$

где I — момент инерции маятника,
ε — угловое ускорение маятника.

Нить разматывается без проскальзывания, и это означает, что мгновенная скорость точки A (см. рис.2.2) равна нулю.

Движение маятника можно представить как ряд последовательных поворотов вокруг мгновенного центра вращения A (подобно качению цилиндра по плоскости). Тогда справедливо равенство

$$v_c = \omega r\,,$$

где ω – угловая скорость вращения центра масс.

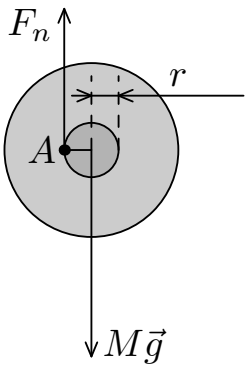

Рис. 2.2

Но угловая скорость вращения твёрдого тела относительно оси для всех его точек одинакова. Соответственно, линейное ускорение центра масс

$$a_c = \frac{dv_c}{dt} = \varepsilon r\,. \tag{2.6}$$

Совместное решение уравнений (2.3), (2.5) и (2.6) даёт для

$$a_c = \frac{g}{1 + \dfrac{I}{Mr^2}} \tag{2.7}$$

Центр масс движения с постоянным ускорением и за время

$$t = \frac{T}{2} \tag{2.8}$$

(T – период колебаний маятника) проходит путь равный h

$$\frac{a_c t^2}{2} = h \quad \text{или} \quad a_c = \frac{2h}{t^2}\,. \tag{2.9}$$

Наконец, совместное решение (2.8), (2.9) и (2.7) позволяет получить выражение для вычисления момента инерции в виде:

$$I = Mr^2 \left(\frac{gT^2}{8h} - 1 \right)\,. \tag{2.10}$$

Это же выражение можно получить из уравнения (2.1) с учётом кинематических связей ($v_c = \omega r$, $a_c = \varepsilon r$).

3. Метод экспериментального определения моментов инерции колец

Для определения момента инерции колец сначала, измерив период колебаний маятника, определим по формуле (2.10) момент инерции I_0 маятника (без кольца).

Затем, поочерёдно помещая на диск маятника кольца, измеряем периоды колебаний маятника с кольцами и по той же формуле (2.10) определяем моменты инерции таких систем маятника с кольцами I_1' и I_2'.

Моменты инерции колец получаем, вычитанием из моментов инерции I_1' и I_2' момента инерции маятника I_0

$$I_k = I_k' - I_0\,. \tag{3.11}$$

4. Теоретический расчёт момента инерции колец

Проверку полученных результатов экспериментального определения моментов инерции колец, (и вместе с тем и всей теории колебаний

маятника Максвелла) можно осуществить рассчитав моменты инерции колец по известной формуле:

$$I_{\text{теор}} = \frac{M_{\text{к}}(R_{\text{н}}^2 - R_{\text{вн}}^2)}{2}\,. \tag{4.12}$$

(см., например, учебник И. В. Савельева, т. 1 стр. 144-145 М., 1970),

где $M_{\text{к}}$ — масса кольца,
$R_{\text{вн}}$ — внутренний радиус кольца,
$R_{\text{н}}$ — наружный радиус кольца.

Измерив радиусы колец, можно определить моменты инерции колец по формуле (4.12).

5. Ход работы

1. Ознакомьтесь с описанием установки и методом измерений.
2. Установите нижний кронштейн 3 с фотодатчиком 9 в крайнее нижнее положение но так, чтобы маятник на бифилярном подвесе не касался кронштейна.
3. Произвести отметку положения оси маятника по шкале (или вертикально поставленной линейке).
4. Аккуратно сматывая нити бифилярного подвеса с обеих сторон маятника, установить его в исходное положение вверху установки. Отметить по шкале положение оси маятника.
5. Нажав на кнопку “пуск” привести маятник в движение (при этом отключается электромагнит) и после того, как на табло появятся цифры, фиксирующие время периода колебаний, нажать на кнопку “стоп”, и остановить рукой движение маятника.
6. Проделать вышеописанную процедуру не менее 5 раз, занося в таблицу результатов измерение периода колебаний маятника.
7. Надеть на диск маятника кольцо и повторить все действия не менее 5 раз, занося результаты измерений периодов в таблицу.
8. Ту же процедуру повторить для другого кольца большей массы.
9. Измерить штангенциркулем диаметры колец и диаметр оси маятника. Вычислить по произведённым отсчётам положения оси маятника длину h его хода.

10. На рычажных весах определить массу колец и массу маятника M_0 (оси с диском).
11. Вычислить по результатам измерений по формулам (2.10) и (2.1) моменты инерции маятника и колец.
12. Рассчитать ошибку измерений, исходя из надёжности $0,95$.
13. Рассчитать теоретическим путём моменты инерции колец и ошибку их определения.
14. Сравнивая экспериментальное и теоретическое значение моментов маятников, определить относительную погрешность экспериментального метода:

$$\delta = \frac{I_{\text{т}} - I_{\text{экс}}}{I_{\text{т}}} \cdot 100\,\% .$$

Примерная таблица измерений при экспериментальном методе

№ п/п	h	r	M_0	$M_1 = M_0 + M_{1\text{к}}$	$M_2 = M_2 + M_{2\text{к}}$	T_0	T_1	T_2
1								
2								
3								
4								
5								

Таблица результатов расчёта по формуле (2.10)

№ п/п	I_0	ΔI_0	ΔI_0^2	I_1'	I_2'	$I_1 = I_1' - I_0$	ΔI_1	ΔI_1^2	$I_2 = I_2' - I_0$	ΔI_2	ΔI_2^2
1											
2											
3											
...											

Таблица результатов теоретического расчёта

№ п/п	$R_{1\text{вн}}$	$\Delta R_{1\text{вн}}$	$R_{1\text{н}}$	$\Delta R_{1\text{н}}$	$R_{2\text{вн}}$	$\Delta R_{2\text{вн}}$	$R_{2\text{н}}$	$\Delta R_{2\text{н}}$	$M_{1\text{к}}$	$M_{2\text{к}}$	I_1	I_2
1												

Для расчёта ошибки полученных расчётным путём моментов инерции колец можно воспользоваться формулой:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta M_{\text{к}}}{M} + 2\left(\frac{\Delta R_{\text{вн}}}{R_{\text{вн}}} + \frac{\Delta R_{\text{н}}}{R_{\text{н}}}\right),$$

где $\Delta M_{\text{к}}$, $R_{\text{вн}}$ и $R_{\text{н}}$ — ошибки, обусловленные точностью измерительных приборов (весов и штангенциркуля).