Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВПО «Ярославский государственный педагогический
университет им. К.Д.Ушинского»

В.В. Афанасьев, М.А. Суворова

Школьникам о статистике в играх

Учебное пособие

Ярославль
2012

УДК 37.016; 519.2
ББК 22.18
А 94

Печатается по решению
редакционно-издательского
совета ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор,
зав. кафедрой математического анализа ЯГПУ Е.И. Смирнов;
кандидат биологических наук, доцент,
зав. кафедрой спортивных дисциплин ЯГПУ И.А. Осетров.

Афанасьев, В.В., Суворова, М.А.
А 94 Школьникам о статистике в играх: учебное пособие / В.В. Афанасьев, М.А. Суворова. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2012. – 153 с.

ISBN 978-5-87555-786-6

Книга предназначена для старшеклассников, учителей математики и физической культуры, тренеров детско-юношеских спортивных школ и всех любителей спорта и математики.

Настоящую работу можно рассматривать как один из подходов к изложению курса «Стохастика» в школе. Вводный курс теории вероятностей дается на задачах из биатлона, а математическая статистика – на анализе спортивных достижений в олимпийских видах спорта.

УДК 37.016; 519.2
ББК 22.18

ISBN 978-5-87555-786-6

Оглавление

Замечательно, что наука, которая
началась с рассмотрения азартных игр,
обещает стать наиболее важным объектом
человеческого знания… Ведь по большей части
важнейшие жизненные вопросы являются
на самом деле лишь задачами
из теории вероятностей.
П. Лаплас

Введение

В книге «Школьникам о вероятности в играх» мы предложили рассмотрение основ теории вероятности с рассмотрения азартных игр. В этой книге мы будем знакомиться с основами математической статистики, и объектом нашего изучения станут уже другие игры – Олимпийские.

Что такое для вас Олимпийские игры? Что представляется при упоминании об Олимпиаде? Беговые дорожки, зеленые поля стадионов, спортивные залы, водная гладь бассейна, красочность, праздник, награды, медали, счастливые лица, флаги стран? Какие чувства переполняют при просмотре соревнований: волнение, страх, радость, обида за поражение? У каждого есть свой ответ на эти вопросы.

Вообще же, **Олимпийские игры** – это праздник людей из разных стран, спортивные состязания, которые приносят азарт, радость побед или горечь поражения. Недаром Олимпийские игры проходят каждый раз в разных странах – это придает играм своеобразие, а участникам и болельщикам возможность обмена культур и познания другой страны. Олимпийские игры – это возможность доказать, что нет предела возможностям человека, что всего можно достичь, были бы цель и желание.

Для спортсменов же участие в Олимпийских играх – это цель, праздник и мечта. Их не пугают ни трудности, ни травмы, ни возможность поражения. Привлекают победы, медали и просто участие, ведь Олимпиада – это мотиватор развития спорта во всем мире, это двигатель не только в спорте, но и в отношениях между людьми, это пропаганда здорового образа жизни, физического и духовного развития, закалки характера, воспитания в себе лучших качеств.

Издание книги совпало с проведением летних олимпийских игр 2012 в Лондоне. Это тридцатые по счету летние Олимпийские игры, они официально называются **Игры XXX Олимпиады.** Лондон станет первым городом, который примет игры уже третий раз (до этого они проходили там в 1908 и 1948 годах). Исполнительный комитет МОК впервые разрешил женщинам принять участие в боксе. Теперь женщины смогут выступать во всех летних видах спорта.

Следующие зимние Олимпийские игры 2014 года пройдут в Сочи (в посёлке Красная Поляна, находящемся в 39 км от Сочи). На территории России Олимпийские игры пройдут во второй раз (до этого в Москве, когда она была столицей СССР, проходили XXII Летние Олимпийские игры 1980), и впервые это будет зимняя Олимпиада. Лыжный курорт Красная Поляна был открыт в 2007 году и должен будет принять спортивные состязания под открытым небом (лыжные гонки, скоростной спуск, бобслей и т. д.), в то время как в Сочи пройдут соревнования в закрытых помещениях (хоккей, фигурное катание, бег на коньках и т. д.). Сочи станет первым городом с субтропическим климатом, где пройдут Зимние Олимпийские игры.

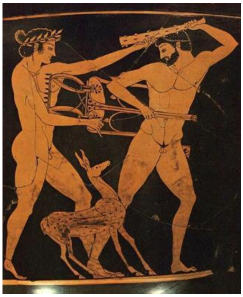
Возникновение Олимпийских игр

Знаете ли вы, где и как возникли Олимпийские игры?

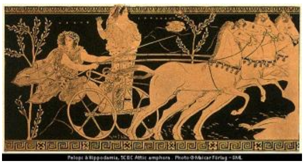
На этот вопрос ответит каждый школьник: «В Древней Греции. Это праздник в честь собранного урожая». Но не всё так просто. Однозначного ответа на этот вопрос нет.

Попробуем разгадать тайну возникновения Олимпийских игр. Во-первых, нам на помощь приходят легенды – легенды о Геракле, легендарном царе Пелопсе и эллинском царе Ифите.

По первой легенде о всеми любимом красавце Геракле в 1253 г. до н. э. эллинский царь Авгий предложил Гераклу в обмен на лошадей вычистить королевские конюшни за один день. Считалось, что выполнить это было невозможно, так как конюшни не убирались в течение года. Используя свою силу, Геракл изменил направление русел двух рек, пропустив их через конюшни, так что вода помогла ему сделать работу в срок. И когда царь отказался выполнять свое обещание и отдать Гераклу часть своих лошадей, Геракл убил царя и членов его семьи и устроил в честь этого большие состязания, посвященные Зевсу, которые и положили начало Олимпийским играм.



Вторая легенда повествует нам о Пелопсе: Пелопс влюбился в прекрасную дочь царя Эномая и попросил ее руки. Но Эномай поставил жестокое условие: он отдаст Гиподамию в жены тому, кто победит его в состязании на колеснице, но если он окажется победителем, то побежденный должен попла-



титься жизнью. Многие молодые люди погибли таким образом, но это не остановило Пелопса. Договорившись с возничим Эномая о том, чтобы тот не вставлял чеку, удерживающую колесо на оси, Пелопс наказывает жестокого царя и завладевает всем царством Эномая и в память о своей победе решает устраивать каждые четыре года Олимпийский праздник и проводить соревнования.

Третья легенда возникновения Олимпийских игр гласит об эллинском царе Ифите, которому было передано повеление богов: устроить угодные им общегреческие атлетические празднества. Ифит, спартанский законодатель Ликург и афинский законодатель и реформатор Клиосфен устанавливают порядок проведения таких игр и заключают священный союз. Олимпию, где надлежало проводить это празднество, объявили священным местом, а любого, кто войдет в ее пределы вооруженным, – преступником.

Другие легенды утверждают, что в Олимпии около могилы Крона, отца Зевса, состоялись соревнования по бегу. И будто бы их организовал сам Зевс, который таким образом отпраздновал победу над своим отцом, сделавшую его властелином мира.

Существует множество других версий появления и создания Олимпийских игр, но все эти версии, чаще всего мифологического происхождения, остаются версиями, и какая из них самая правдивая – мы уже не узнаем…

Затем греки создают единый календарь Олимпийских игр. Олимпийский праздник, состоявший из многочисленных религиозных церемоний и спортивных состязаний, повторялся каждые четыре года, которые и составляли «олимпиаду» – греческий олимпийский год.

Интересные факты. В античных Олимпиадах женщины не участвовали. Действительно, в Древней Греции женщинам не только воспрещалось участвовать в Олимпийских играх – прекрасных дам даже на трибуны не пускали (исключение делалось только для жриц богини плодородия Деметры). Потому иногда особо азартные болельщицы пускались на хитрости. Например, мать одного из атлетов – Калипатерия, – чтобы понаблюдать за выступлением сына, переоделась мужчиной и прекрасно сыграла роль тренера. По другой версии она участвовала в состязании бегунов. Калипатерию опознали и приговорили к смертной казни – отважную спортсменку должны были сбросить с Тифийской скалы. Но, учитывая то, что ее муж был олимпиоником (т.е. победителем Олимпиады), а сыновья – победителями на соревнованиях юношей, судьи помиловали Калипатерию. Однако коллегия судей (элланодиков) обязала атлетов впредь выступать на состязаниях обнаженными, дабы избежать повторения вышеописанного инцидента. При этом следует заметить, что девушки в Древней Греции отнюдь не чуждались занятий спортом, да и соревноваться любили. Потому в Олимпии проводились игры, посвященные Гере (супруге Зевса). В этих состязаниях (на которые, кстати, мужчины не допускались) участвовали исключительно девушки, соревнуясь в борьбе, беге и гонках на колесницах, которые проходили на том же стадионе за месяц до или через месяц после соревнований спортсменов-мужчин. Также женщины-спортсменки принимали участие в Истмийских, Немейских и Пифийских играх.

Интересно, что в Олимпийских играх, возрожденных в XIX веке, поначалу также состязались исключительно мужчины-спортсмены. Лишь в 1900 году в соревнованиях по парусному и конному спорту, теннису, гольфу и крокету приняли участие женщины. А в состав международного Олимпийского комитета (МОК) представительницы прекрасного пола вошли только в 1981 году.

Рекорды и мифы Древних Олимпиад

Особенно нас интересуют результаты, которых добивались тогдашние атлеты. Были ли они сравнимы с нынешними? К сожалению, и здесь никто не даст однозначного ответа. Во-первых, потому что греки не вели никаких записей о достижениях и рекордах своих атлетов. Во-вторых, потому что время вообще не учитывалось в состязаниях – этого не позволяла техника того времени. Часы были только солнечные, водяные и песочные – на них секунды не отметишь… В-третьих, потому что даже в тех видах (прыжки или метания), где результат можно было замерить для истории, он нигде не записывался – ведь соревнования велись отборочным методом и важен был лишь победитель в каждом виде и пятиборье. И даже те немногие случайные сведения, которые до нас дошли, нужно пересчитать на современные меры длины, веса, времени, причем всегда какая-нибудь из величин либо недостаточно точна, либо вовсе неизвестна.

Всего три абсолютных спортивных результата дошли к нам из античных времен, они принадлежат двум знаменитым атлетам – первый и второй запечатлены на постаменте статуи в Дельфах, там написано: «На пятьдесят пять стоп в длину прыгнул Фаилл, и в диске же ему до сотни не хватило всего пяти». Это повторяет и Павсаний в десятой книге «Описание Эллады». Сообщение о третьем результате мы имеем от Юлия Африкана (автора «Перечня Олимпийских победителей», написанного в III в. до н.э.), оно касается спартанского атлета Хионида, троекратного победителя в «простом» и «двойном» беге на 29-х и 31-х Олимпийских Играх (664–656 гг. до н.э.). На памятном столбе этого атлета, согласно тому же источнику, написано, что он «…мог прыгнуть в длину на 50 стоп». При пересчете на наши меры выходит, что Фаилл прыгал на 6,28 м, а Хионид – на 5,39 м, диск же Фаилл бросал на 28,2 м.

Олимпийские игры проводились непрерывно 1169 лет. Двести девяносто два раза собирались спортсмены на эти удивительные соревнования.

В 394 году нашей эпохи римский правитель Феодосий I запретил олимпийские соревнования. На пятнадцать веков Олимпия вообще как бы исчезла с лица земли. Даже само название её было забыто! И все же Олимпийские игры броской звездой горели в памяти человечества. Свет этой звезды прошел через века и вспыхнул с новой силой.

Пьер де Фреди, барон де Кубертен (1863–1937) был одним из самых увлекательных, профессиональных, энергичных и увлеченных людей собственного времени. Он утверждал, что без физического не может быть и духовного, и нравственного развития.

Пьер де Кубертен стал создателем спортивных союзов для детей, организатором интернациональных соревнований. Кубертен ни на минуту не оставлял мечты о сказочной, отдаленной от нас многими и многими веками Олимпии.

Он был еще совершенно юным человеком, когда высказал мысль о возрождении Олимпийских игр. С этого момента всю свою жизнь Пьер де Кубертен подчинил осуществлению великой идеи.

Он объезжал многие страны мира, спорил, убеждал, обосновывал. Писал сотни писем во всевозможные спортивные организации. И вот французские спортивные деятели принимают решение созвать интернациональный спортивный конгресс и пригласить на него представителей огромнейших спортивных держав. **23 июня 1894 г.** на Конгрессе в Париже был создан интернациональный олимпийский комитет – МОК.

Конгресс решил: через два года пройдут первые Олимпийские игры! И это была великая победа мирового спорта, великий подвиг Пьера де Кубертена!

Олимпийские игры 1896 года в Афинах превратились в яркий спортивный праздник и вызвали огромный общественный интерес. Главным достижением первых Олимпийских игр можно считать широкую популяризацию спорта и олимпийских идей.

Интересные факты

- Женщины не допускались к участию в тех Играх, однако гречанка Стамата Ревихти, по прозвищу Мельпомена, захотела участвовать в марафоне. Ей отказали, и тогда она одна пробежала дистанцию на следующий день после официального забега. В завершение пробега она обежала вокруг Мраморного стадиона, так как ей даже запретили вбегать на его территорию, как это делали участники-мужчины.
- На этих Играх участвовал самый молодой спортсмен за всю историю Олимпиад – Димитриос Лундрас, бронзовый призёр по спортивной гимнастике – ему было 10 лет и 218 дней.

Существует мнение, что для измерения времени, потребовавшегося атлетам для преодоления дистанции, в Древней Греции использовали клепсидру, а длину прыжков мерили шагами, однако оно ошибочно. Приборы для измерения времени (солнечные или песочные часы, клепсидра) были неточны, да и расстояния чаще всего мерили «на глазок» (например, стадия – это 600 футов или расстояние, которое может пройти человек спокойным шагом за время полного восхода солнца, т.е. примерно за 2 минуты). Потому ни время прохождения дистанции, ни длина прыжков не имела значение – победителем считался тот, кто приходил к финишу первым или прыгнул дальше всех.

Даже в наши дни для оценки достижения спортсменов долгое время использовали визуальное наблюдение – вплоть до 1932 года, когда на X Олимпиаде в Лос-Анжелесе впервые были использованы секундомер и фотофиниш, чрезвычайно облегчившие работу судей.

Первые высшие мировые достижения были зафиксированы в середине XIX века в Англии, когда появился институт профессиональных спортсменов, где стали замерять лучшее время в беге на 1 милю. В 1914 году создается Международная ассоциация легкоатлетических федераций (IAAF), которая и устанавливает централизованную процедуру фиксирования рекордов. В этом же году ассоциация составила список дисциплин, в которых в дальнейшем регистрировались мировые рекорды.

На Олимпиаде в 1968 году (Мехико) впервые использовали полностью автоматизированную систему для измерения времени с точностью до сотых долей секунды (так, Джим Хайнс показал время 9,95 с в беге на 100 м). А с 1976 года IAAF возвела в критерий для проведения спринтерских соревнований использование автоматики.

Начиная с 1924 года, в СССР стала проводиться официальная регистрация рекордов по легкой атлетике, что стимулировало рост спортивных достижений.

Очевидно, что Олимпийские игры невозможны без измерений.

Мы сегодня видим огромный накал страстей в спортивных состязаниях как в любительском, так и профессиональном спорте, когда спортсмены максимально прилагают свои физические и умственные способности для постоянного улучшения результатов. Измерения, как и фотофиксация, играют большую роль при оценке их результатов: состязания в беге могут быть проиграны из-за сотых долей секунды, а в других видах легкой атлетики – из-за долей миллиметра. Фотофиниш визуально может зафиксировать тот едва уловимый момент, который позднее может быть использован при выборе победителя, но он не покажет сравнение результата спортсмена с его/ее лучшим личным результатом или результатом другого спортсмена. На самом деле, именно точность измерений вселяет в нас уверенность в честности игры.

Однако зафиксированные результаты соревнований не имеют практического значения без дополнительного математико-статистического анализа, они ограничены в возможности осмысления и интерпретации.

В этой книге мы обсудим вопросы, связанные с обработкой, анализом и интерпретацией спортивных результатов. Всем эти занимается специальная наука – статистика.

Как говорит Мак-Коннелл, статистика – это, прежде всего, способ мышления, и для ее применения нужно лишь иметь немного здравого смысла и знать основы математики.

В.М. Зациорский предупреждал, что статистика в некоторых моментах анализа научных данных может стать опасным инструментом при заключении выводов, так как за каждой цифрой стоит индивидуальный результат, показанный спортсменом, и усреднять этот показатель, подводить под какие-то модели тоже не всегда бывает оправданно и нужно. И, тем не менее, без применения методов математической статистики невозможна обработка данных, полученных в ходе эксперимента, формулировка выводов, имеющих прикладное значение для самых различных областей человеческой деятельности, в том числе и в области физической культуры и спорта.

Вероятность в биатлоне

В трактате Я.Бернулли «Искусство предположений» (1713 г.) введено понятие вероятности, хотя и в далеко не совершенной форме, а в 30-х годах XVIII столетия классическое понятие вероятности стало общеупотребительным, и никто из ученых этих лет не мог бы ограничиться только подсчетом числа благоприятствующих событию шансов. Под вероятностью случайного события A стали понимать **число** $P(A)$, равное отношению числа благоприятствующих ему исходов к общему числу несовместных, единственно возможных и равновозможных исходов.

В работе [8] рассматриваются элементы теории вероятностей на основе азартных игр. Вероятностный анализ проводился как для реальных, исторических и современных азартных игр (рулетка, «попытай счастье», крэпс и т.д.), так и их аналогов и продолжений (игры со «сгорающими» очками, инициированы карточной игрой в «двадцать одно очко»). При решении вероятностных задач использовался наглядный (с использованием графов) способ решения.

Вспомним и здесь основные понятия и правила теории вероятностей также на основе игр, но уже других, а именно Олимпийских игр. Одним из Олимпийских видов спорта является биатлон. Первый цикл задач посвящен именно ему.

Во время эстафетных соревнований по биатлону каждый спортсмен в команде преодолевает дистанцию с двумя огневыми рубежами. Стрельба ведется на первом огневом рубеже из положения лёжа, на втором – стоя. Во время стрельбы биатлонисту требуется поразить 5 мишеней. В эстафете, в отличие от других биатлонных гонок, на огневой рубеж даётся 5 основных патронов и 3 дополнительных. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле принимаем за p $(0 < p < 1)$ и будем считать её постоянной для данного спортсмена. Рассмотрим различные вариации возможных исходов при стрельбе с использованием основных и дополнительных патронов.

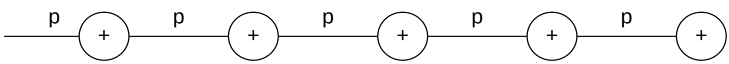
Случайные события

Случай, случайность – с ними мы встречаемся повседневно: случайная встреча, случайная поломка, случайная находка, случайная ошибка. Этот ряд можно продолжать бесконечно. Казалось бы, тут нет места для математики – какие уж законы в царстве Случая! Но и здесь наука обнаружила интересные закономерности – они позволяют грамотному человеку достаточно уверенно чувствовать себя при многократной встрече со случайными событиями. К таким случайным событиям относятся и многократные выступления биатлонистов на соревнованиях, на которых невозможно заранее предсказать результат.

Вариация 1 (на правило произведения вероятностей). Найти вероятность того, что биатлонист поразит 5 мишеней без использования дополнительных патронов.

Решение

Обозначим символом «+» попадание биатлониста в мишень одним выстрелом. Тогда ветвь графа, отображающая результаты удачной стрельбы, будет выглядеть следующим образом:



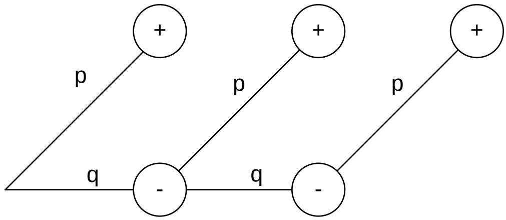
Чтобы вычислить вероятность по графу, нужно перемножить значения вероятностей на выбранной ветке от корня дерева до конечной вершины графа.

$$P = p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot p = p^5$$

Вариация 2 (на правила сложения и умножения вероятностей). Биатлонист во время основной стрельбы допустил один промах. Найти вероятность того, что он все-таки закроет эту мишень с помощью дополнительных патронов.

Решение

Продолжим стрельбу с использованием дополнительных патронов, тогда вероятностное дерево исходов будет следующее:



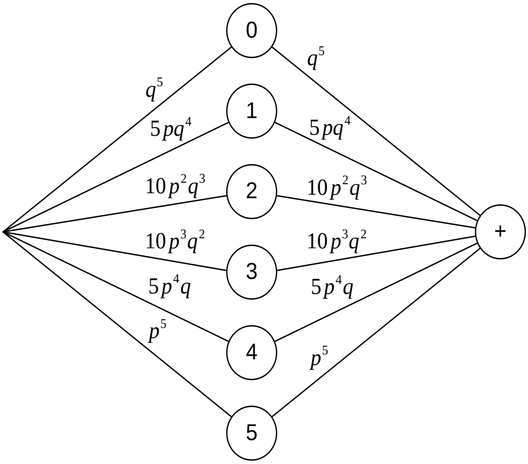
Используя интерпретацию правил сложения и умножения вероятностей на графе [9], получаем: $P(+) = p + qp + q^2 p = p\left(1 + q + q^2\right) = (1-q)\left(1 + q + q^2\right) = 1 - q^3$,

что соответствует вероятности противоположного события – непопадания дополнительными патронами $\left(P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1\right)$.

Вариация 3 (на схему Бернулли). Какова вероятность того, что количество промахов при стрельбе лежа и при стрельбе стоя совпадет? Будем считать, что вероятности попадания из положения лежа и из положения стоя одинаковы.

Решение

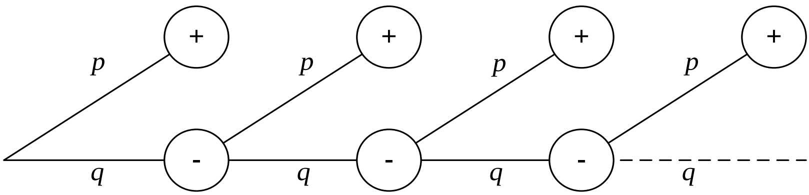
При первой стрельбе возможны шесть вариантов числа закрытых мишеней, для вычисления вероятностей которых используем формулу Бернулли $P_5(m) = C_5^m p^m q^{5-m}$ $(m = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ для 5 выстрелов с использованием основных патронов. Второе испытание должно совпадать с первым, поэтому искомую вероятность находим по следующему вероятностному графу:



$$P(+)=\left(q^5\right)^2+\left(5pq^4\right)^2+\left(10p^2q^3\right)^2+\left(10p^3q^2\right)^2+\left(5p^4q\right)^2+\left(p^5\right)^2=$$
$$=q^{10}+25p^2q^8+100p^4q^6+100p^6q^4+25p^8q^2+p^{10}=$$
$$=\left(p^{10}+q^{10}\right)+25p^2q^2\left(p^6+q^6\right)+100p^4q^4\left(p^2+q^2\right)$$

Вариация 4 (на продолжение схемы Бернулли). При использовании основных патронов был допущен один промах. Сколько достаточно дополнительных патронов, чтобы закрыть эту мишень с вероятностью, не меньшей 0,99?

Решение



$$P(+)\geq 0.99$$
$$P(+)=p+qp+q^2p+q^3p+...+q^np=p\left(1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}\right)$$

Вероятность противоположного события: $P(-) = q^n \le 0.01$.

$$q^n \le 0.01;\ \ln\left(q^n\right) \le \ln(0.01);\ n \cdot \ln(q) \le \ln(0.01);\ n \ge \frac{\ln(0.01)}{\ln(q)}$$

Пусть вероятность попадания равна $p = 0.8$, тогда $n \ge \dfrac{\ln(0.01)}{\ln(0.2)} \approx 2.861$. Таким образом, число дополнительных патронов должно быть не меньше 3.

Вариация 5 (на условные вероятности). Известно, что один из биатлонистов при стрельбе стоя поразил не все пять мишеней. Какова вероятность того, что он избежит штрафных кругов, если известна его неустойчивая психика?

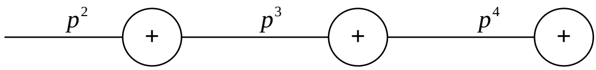
Решение

Примем, что в случае непоражения мишени основными патронами вероятность ее поражения дополнительными патронами при каждом следующем выстреле уменьшается в p раз. Такие вероятности, которые зависят от исходов предыдущих испытаний, называются ***условными***.

Вероятность избежать штрафных кругов для биатлониста, который промахнулся всеми основными патронами или попал только один раз, равна нулю.

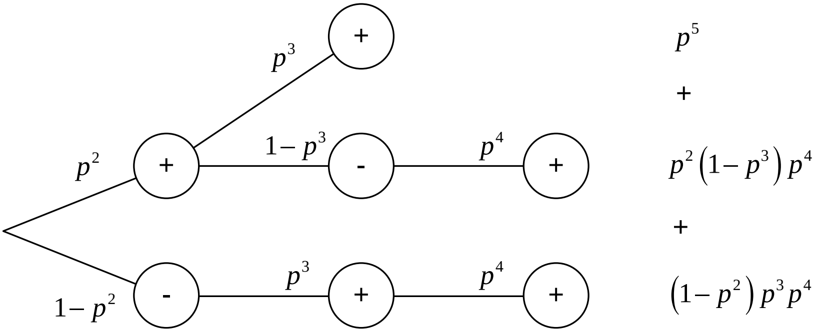
Рассмотрим три других случая.

a. Биатлонист поразил ровно две мишени, тогда, учитывая его психику, примем, что условная вероятность попадания каждым следующим дополнительным патроном равна предыдущей вероятности, умноженной на p.



$$P_1 = p^2 \cdot p^3 \cdot p^4 = p^9$$

b. Биатлонист поразил основными патронами ровно три мишени, тогда вероятностный граф дополнительных испытаний будет следующий:

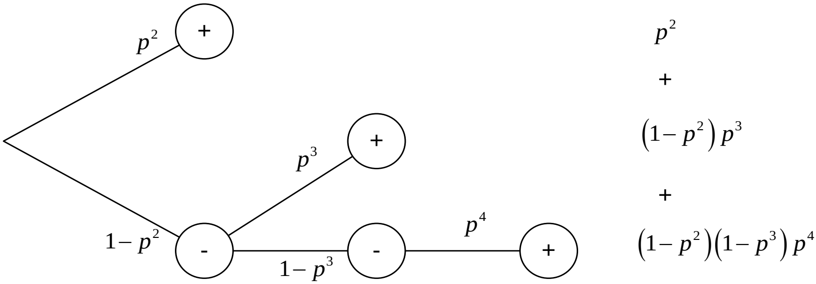


$$P_2 = p^5 + p^2\left(1-p^3\right)p^4 + \left(1-p^2\right)p^3p^4 =$$

$$= p^5\left(1+p\cdot\left(1-p^3\right)+p^2\left(1-p^2\right)\right) = p^5\left(1+p-p^4+p^2-p^4\right) =$$

$$= p^5\left(1+p+p^2-2p^4\right)$$

c. Биатлонист не поразил основными патронами только одну мишень.



$$P_3 = p^2 + \left(1-p^2\right)p^3 + \left(1-p^2\right)\left(1-p^3\right)p^4 =$$

$$p^2\left(1+p\cdot\left(1-p^2\right)+p^2\left(1-p^2\right)\left(1-p^3\right)\right) =$$

$$= p^2\left(1+p+p^2-p^3-p^4-p^5+p^7\right)$$

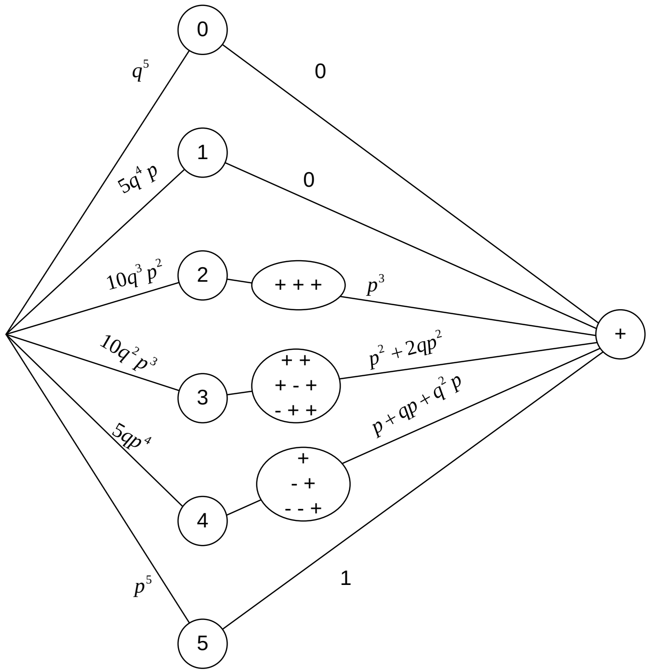
Так, например, для биатлониста, у которого вероятность поражения мишени p примерно равна 0,9, искомые вероятности будут:

$$P_1 \approx 0.387;\quad P_2 \approx 0.825;\quad P_3 \approx 0.982\,.$$

Вариация 6 (условные вероятности). Найти вероятность того, что все мишени будут поражены основными или дополнительными патронами.

Решение

Изобразим возможные варианты стрельбы на графе:



$$P(+)=10q^3p^2p^3+10q^2p^3\left(p^2+2qp^2\right)+5qp^4\left(p+qp+q^2p\right)+p^5=$$

$$=10p^5q^3+10p^5q^2+20p^5q^3+5p^5q+5p^5q^2+5p^5q^3+p^5=$$

$$=35p^5q^3+15p^5q^2+5p^5q+p^5=\boxed{p^5\left(35q^3+15q^2+5q+1\right)}$$

Вычислим вероятность поразить все мишени для биатлониста, у которого вероятность поражения мишени $p\approx 0.9$:

$P(+)\approx 0.995$, достаточно высокая вероятность (так и стрелок достойный!).

Вариация 7 (на формулу полной вероятности). Определить вероятность того, что все патроны будут израсходованы.

Решение

Пусть событие $A=\{использованы\ все\ патроны\}$.

Биатлонист сначала пытается закрыть мишени пятью основными патронами, а затем при необходимости использует дополнительные. Сделаем предположения относительно результатов основной стрельбы:

$H_i=\{i\quad промахов\ основными\ патронами\},\ i=0,1,2,3,4,5$.

В зависимости от результатов основной стрельбы биатлонист использует дополнительные патроны.

1) Если все 5 мишеней закрыты основными патронами, то дополнительные патроны не используются, т.е. $P\left(A/H_0\right)=0$.

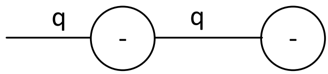
2) Если после основной стрельбы осталось больше двух незакрытых мишеней, то обязательно дополнительные патроны будут использованы полностью, т.е.

$P\left(A/H_3\right)=P\left(A/H_4\right)=P\left(A/H_5\right)=1$.

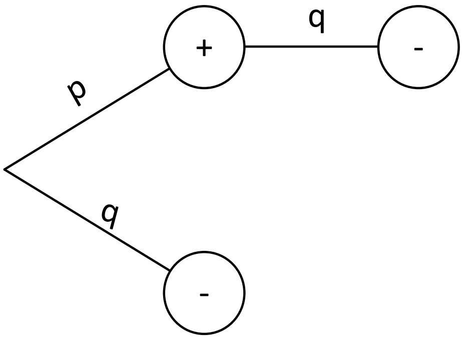
Если остались одна или две незакрытые мишени, то количество необходимых дополнительных патронов зависит от качества стрельбы, которое считаем стабильным и независимым от предыдущих выстрелов и чистого бега на дистанции.

Рассмотрим возможные результаты стрельбы с 3 дополнительными патронами.

Если в результате стрельбы основными патронами был допущен один промах, то все три дополнительных патрона биатлонист использует, если первые два выстрела не закрыли мишени, т.е. $P\left(A/H_1\right)=q^2$.



Аналогичные рассуждения проводим, если в результате стрельбы основными патронами биатлонист допустил 2 промаха.



$$P(A/H_2) = pq + q$$

Теперь определим вероятности гипотез, т.е. результаты основной стрельбы. Эту задачу можно решать графически или, используя формулу Бернулли:

$$P_5\left(0\,промахов = 5\,попаданий\right) = C_5^5 p^5 q^0 = p^5;$$

$$P_5\left(1\,промах\right) = C_5^4 p^4 q^1 = 5p^4 q;$$

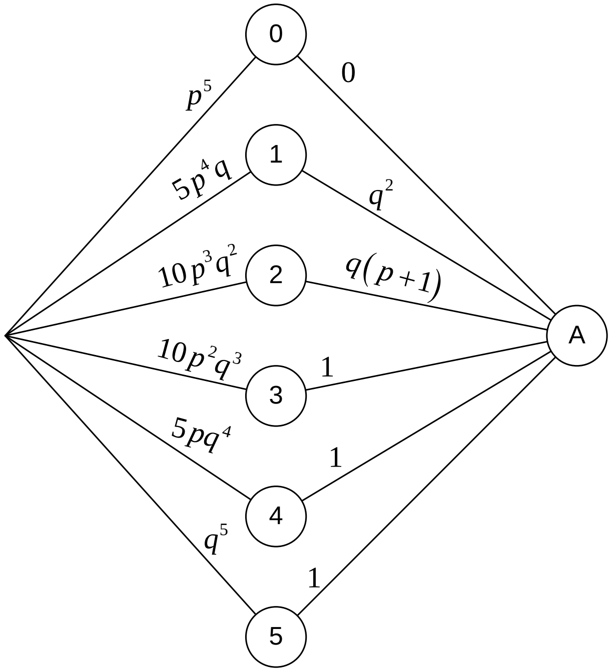
$$P_5\left(2\,промаха\right) = C_5^3 p^3 q^2 = 10p^3 q^2;$$

$$P_5\left(3\,промаха\right) = C_5^2 p^2 q^3 = 10p^2 q^3;$$

$$P_5\left(4\,промаха\right) = C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4;$$

$$P_5\left(5\,промахов\right) = C_5^0 p^0 q^5 = q^5$$

Составим полный вероятностный граф с гипотезами и по нему найдем искомую вероятность:



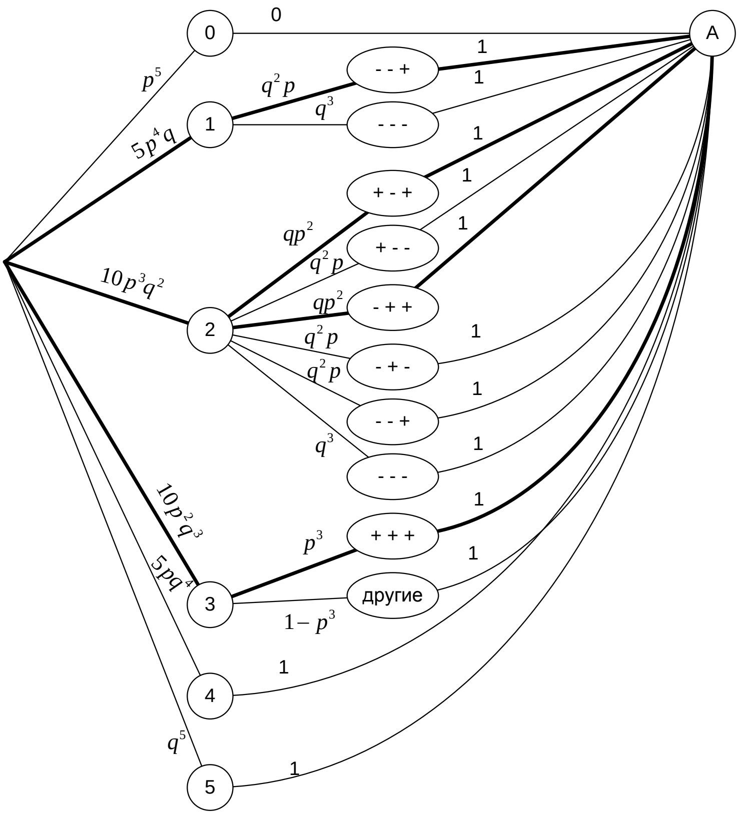
$$P(A)=5p^4q\cdot q^2+10p^3q^2\cdot q(p+1)+$$
$$+10p^2q^3\cdot 1+5pq^4\cdot 1+q^5\cdot 1=$$
$$=5p^4q^3+10p^4q^3+10p^3q^3+5pq^4+q^5=$$
$$=15p^4q^3+10p^3q^3+5pq^4+q^5=$$
$$=q^3\cdot\left(15p^4+10p^3+5pq+q^2\right)$$

Вариация 8 (на формулу Байеса). Определить вероятность того, что биатлонист, который закрыл все мишени, израсходовал все 8 патронов.

Решение

Расширим граф, обозначив результаты использования дополнительных патронов. Выделим ветви графа, где с помощью дополнительных патронов биатлонист справился со стрельбой.

Используем интерпретацию формулы Байеса на графе, по которой условная вероятность $P\left(H_k/A\right)$ может находиться как отношение веса ветвей, проходящих через вершины, соответствующие гипотезам H_k, к весу всего вероятностного графа [9]:



$$P\left(+/A\right)=\frac{P\left(+\right)}{P\left(A\right)}=\frac{5p^4q.q^2p+2\cdot\left(10p^3q^2\cdot qp^2\right)+10p^2q^3\cdot p^3}{q^3\cdot\left(15p^4+10p^3+5pq+q^2\right)}=$$

$$=\frac{35p^5q^3}{q^3\cdot\left(15p^4+10p^3+5pq+q^2\right)}=\frac{35p^5}{15p^4+10p^3+5pq+q^2}$$

Почти все наши примеры имели дело с независимыми испытаниями. Эти процессы – основа классической вероятностной теории и большей части статистических вычислений. Для независимых испытаний все возможные исходы для каждого эксперимента – одинаковы и происходят с одинаковой вероятностью. Более того, знание исходов предыдущих испытаний не влияет на наши предсказания об исходах следующего. Зная исходы отдельного испытания, мы могли создать дерево и вероятностный граф для последовательности из n испытаний и решать с их помощью вероятностные задачи.

Современная вероятностная теория изучает случайные процессы, для которых знание предыдущих исходов влияет на предсказания для будущих экспериментов. В принципе, когда мы наблюдаем последовательность случайных экспериментов, все прошлые исходы могут влиять на наши предсказания для следующего эксперимента. Но сделать такое обобщение очень трудно.

В 1907 году А.А. Марков начал изучение важного нового типа случайного процесса. В этом процессе вероятность находиться в данном состоянии в данный момент можно вывести из сведений о предшествующем состоянии. Процессы такого типа называют цепью Маркова.

Цепи Маркова

Наглядным примером марковского процесса может служить поведение лягушки в пруду с кувшинками [24]. Время от времени лягушка перепрыгивает с одного листа кувшинки на другой согласно «желанию» в данный момент.

Введем основные понятия марковского процесса на примере с лягушкой:

Состоянием системы является номер листа, занимаемого лягушкой в данное время.

Прыжок лягушки будем называть **переходом**.

Возможные прыжки лягушки с каждого листа можно записать в виде **матрицы перехода**. Каждый элемент этой матрицы представляет собой вероятность перехода из заданного состояния (которому соответствует строка) к следующему состоянию (которому соответствует столбец).

Начальное положение лягушки задается **вектором начальных вероятностей**, который характеризует вероятность первого появления лягушки на каждом из листьев кувшинки.

Часто для описания эволюции цепи Маркова вместо явного выписывания матрицы *P* используют граф, вершинами которого являются состояния цепи, а стрелка, идущая из состояния E_i в состояние E_j с числом p_{ij} над ней, показывает, что из состояния E_i в состояние E_j возможен переход с вероятностью p_{ij}. В том случае, когда $p_{ij} = 0$, соответствующая стрелка не проводится.

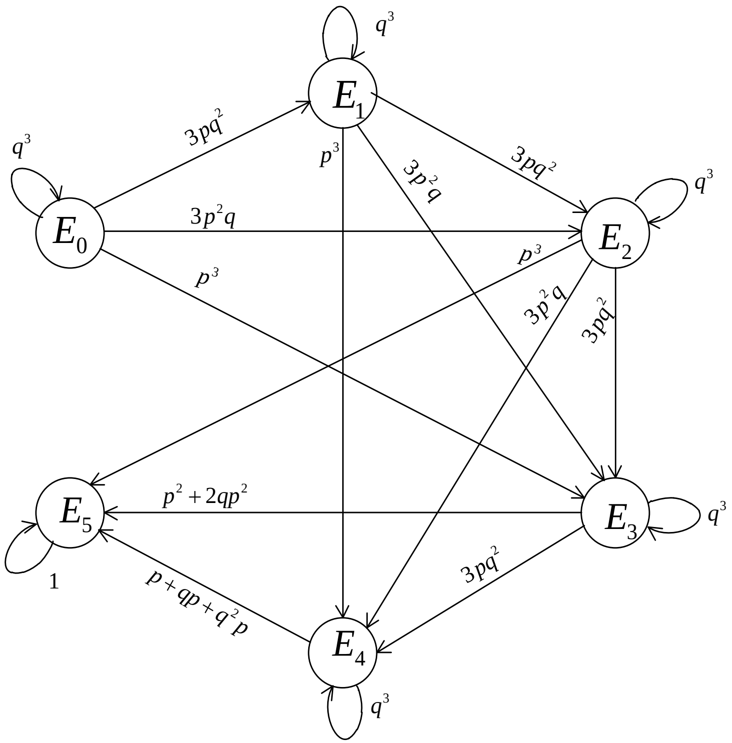
Вариация 9 (на цепи Маркова) Найти матрицу и граф перехода при поражении мишеней основными и дополнительными патронами.

Решение

Пусть состояние системы

$E_i = \{\textit{поражение i мишеней основными патронами}\}, i = 0,1,...,5$,

а переход задается результатами использования дополнительных патронов. Тогда граф перехода выглядит следующим образом:



Матрица перехода имеет вид:

$$
P = \begin{array}{c} \\ E_0 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 & 0 & 0 \\
0 & q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 & 0 \\
0 & 0 & q^3 & 3q^2p & 3qp^2 & p^3 \\
0 & 0 & 0 & q^3 & 3q^2p & p^2 + 2qp^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q^3 & p + qp + q^2p \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Матрица P обладает следующими свойствами:

а) $0 \le p_{ij} \le 1$;

б) Сумма вероятностей в каждой строке матрицы P равна единице, т.е. $\sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1 \;\left(i = 1, 2, \ldots, k\right)$;

Проверим второе свойство для каждой строки матрицы:

$q^3 + 3q^2 p + 3qp^2 + p^3 = \left(q + p\right)^3 = 1$ (для первой строки)

$q^3 + \underline{3q^2 p} + p^2 + \underline{2p^2 q} = \underline{q^3} + 2qp\left(q + p\right) + \underline{q^2 p} + p =$

$q^2\left(q + p\right) + 2qp + p^2 = q^2 + 2qp + p^2 = \left(p + q\right)^2 = 1$

(для второй строки)

$q^3 + p + qp + q^2 p = q^2\left(q + p\right) + p + qp = q\left(q + p\right) + p = q + p = 1$

(для третьей строки)

Вариация 10 (на цепи Маркова и вектор начальных вероятностей). Найти вектор начальных вероятностей и матрицу перехода из начальных состояний $E_i = \left\{i \;\textit{попаданий}\right\}$ после стрельбы с использованием одного дополнительного патрона.

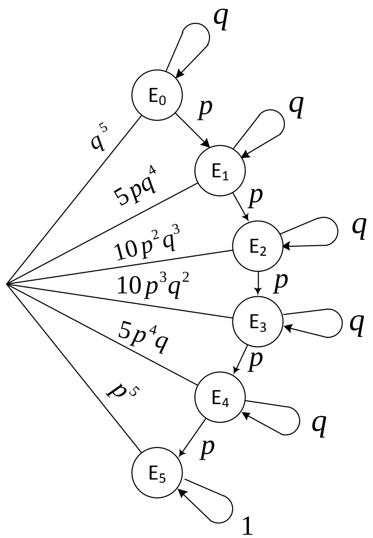
Решение

Вектор начальных вероятностей определяется вероятностями всевозможных попаданий основными патронами.

Для нахождения координат вектора $\vec{a}$ используем формулу Бернулли для конечной серии из n повторных независимых испытаний $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$, где m – число «успехов», а p – вероятность «успеха» в одном испытании. В нашем случае n=5 и вектор начальных вероятностей выглядит следующим образом:

$\vec{a}\left(q^5, 5q^4 p, 10q^3 p^2, 10q^2 p^3, 5qp^4, p^5\right)$.

Тогда граф данной цепи Маркова и матрица перехода с учётом вектора начальных вероятностей выглядят следующим образом:



$$P=\begin{array}{c} \\ E_0\\ E_1\\ E_2\\ E_3\\ E_4\\ E_5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}E_0 & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5\end{array}\\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & q & p & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Покажем, как используя матрицу и особенно граф цепей Маркова, можно достаточно просто получить многие вероятностные результаты при анализе стрельбы в биатлоне.

Вариация 11 Найти вероятности того, что спортсмен, используя не более одного дополнительного патрона, закроет: а) все мишени; б) четыре мишени; в) по крайней мере, три мишени.

Решение. В матричном виде ответ записывается координатами вектора $\vec{a}\cdot P$

Проще и нагляднее выглядит вероятность нахождения состояний по графу:

а) Вероятность оказаться в состояние E_5 находится как сумма вероятностей попадания основными патронами и дополнительным, т.е.: $p(E_5)=p^5\cdot 1+5p^4\cdot q\cdot p=p^5(1+5q)$

б) аналогично находим

$p(E_4)=(5p^4q)\cdot q+(10p^3q^2)p=15p^4\cdot q^2$

в) Вероятность того, что спортсмен закроет, по крайней мере, три мишени, равна сумме трех вероятностей

$$p(E_3)+p(E_4)+p(E_5)=(10p^2q^3)p+(10p^3q^2)\cdot q+15p^4q^2+p^5(1+5q)=$$
$$=20p^3\cdot q^2(q+p)-5p^4\cdot q^2+p^5(1+5q)=$$
$$=p^2q^3(20-5p)+p^5(1+5q)=p^3\left[5q^2(4-p)+p^2(1+5q)\right]$$

Случайные величины

В XVIII веке в работах Котса, Симпсона и Д. Бернулли начала развиваться теория ошибок измерений, возникшая в первую очередь под влиянием метрологии. Ошибка измерения в зависимости от случая может принимать различные значения. Эта позиция была высказана еще Галилеем, который ввел в обиход понятия «случайная» и «систематическая» ошибки измерения. «Случайная» ошибка зависит от многочисленных причин, влияние которых невозможно учесть и которые изменяются от измерения к измерению. Вот такая ошибка измерения и представляет собой случайную величину с каким-то распределением вероятностей.

Случайной называют **величину**, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены [16]. Случайная величина, которая принимает конечное или счетное (эквивалентно множеству натуральных чисел) множество значений, называется **дискретной**.

Вариация 12 (биномиальное распределение) Построить закон распределения случайной величины для числа закрытых мишеней при использовании основных патронов. Вычислить математическое ожидание, дисперсию, моду и медиану этой случайной величины, если $p=0.8$.

Решение

По формуле Бернулли (см. вариацию 3) находим соответствующие вероятности числа попаданий:

$P_5(5)=C_5^5p^5q^0=p^5$ $\quad$ $P_5(4)=C_5^4p^4q^1=5p^4q$

$P_5(3)=C_5^3p^3q^2=10p^3q^2$ $\quad$ $P_5(2)=C_5^2p^2q^3=10p^2q^3$

$P_5(1)=C_5^1 p^1 q^4 = 5pq^4$ $\qquad$ $P_5(0)=C_5^0 p^0 q^5 = q^5$

Тогда закон распределения случайной величины X = {число закрытых мишеней при использовании основных патронов} имеет вид:

X	0	1	2	3	4	5
P	q^5	$5pq^4$	$10p^2q^3$	$10p^3q^2$	$5p^4q$	p^5

Закон распределения для числа наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p, называется биномиальным законом распределения. Основные характеристики случайной величины, распределенной по биномиальному закону, вычисляются по формулам:

Математическое ожидание равно $M[X]=np$; дисперсия: $D[X]=npq$.

Мода M_0 – это наивероятнейшее число, которое удовлетворяет условию: $np-q \le M_0 \le np+p$.

Построим закон распределения случайной величины X для $p=0,8$ и вычислим ее основные числовые характеристики.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32768

$$M[X]=np=5\cdot 0.8=4$$

$$D[X]=npq=5\cdot 0.8\cdot 0.2=0.8$$

Найдем моду и медиану случайной величины:

$$5\cdot 0.8-0.2\le M_0 \le 5\cdot 0.8+0.8$$

$$3.8\le M_0 \le 4.8$$

$$M_0=4$$

$M_e = x_4 = 4,$

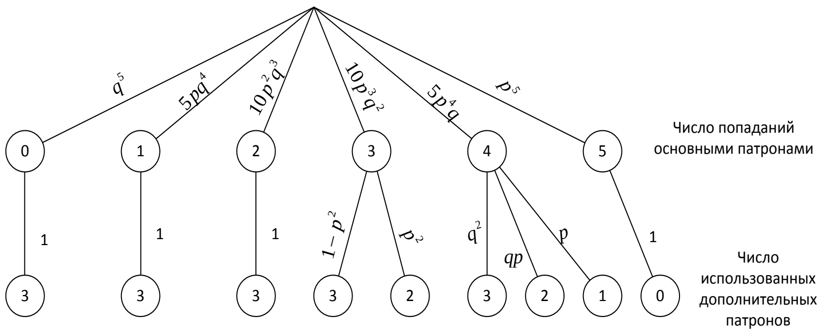
$$т.к.\begin{cases} \sum_{i=0}^{4} p_i = 0,00032 + 0,0064 + 0,0512 + 0,2048 + 0,4096 \ge \frac{1}{2} \\ \sum_{i=4}^{5} p_i = 0,4096 + 0,32768 \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

В данном случае все три основные характеристики положения для X равны одному числу $4 = M\left[X\right] = M_0 = M_e$.

Вариация 13 . Построить закон распределения случайной величины Y={*общее число используемых дополнительных патронов*}. Вычислить математическое ожидание и дисперсию для случайной величины Y.

Решение.

Заметим, что число дополнительных патронов зависит от результатов стрельбы основными патронами.



$P(Y=0) = p^5 \cdot 1 = p^5$

$P(Y=1) = 5p^4 q \cdot p = 5p^5 q$ (по правилу произведения)

$P(Y=2) = 5p^4 q \cdot qp + 10p^3 q^2 \cdot p^2 = 5p^5 q^2 + 10p^5 q^2 = 15p^5 q^2$

(по правилу сложения).

Во всех остальных случаях биатлонист будет использовать 3 дополнительных патрона, по свойству вероятности

$P(Y=3) = 1 - \left(P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)\right) =$

$= 1 - p^5 - 5p^5 q - 15p^5 q^2.$

Y	0	1	2	3
P	p^5	$5p^5q$	$15p^5q^2$	$1-p^5-15p^5q^2-5p^5q$

$$M[Y]=0\cdot p^5+1\cdot 5p^5q+2\cdot 15p^5q^2+3\cdot\left(1-p^5-15p^5q^2-5p^5q\right)=$$
$$=\underline{5p^5q}+\underline{\underline{30p^5q^2}}+3-3p^5-\underline{\underline{45p^5q^2}}-\underline{15p^5q}=3-3p^5-15p^5q^2-10p^5q$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию для Y при $p=0.8$

Y	0	1	2	3
P	0,328	0,328	0,197	0,148

$$M[Y]=0\cdot 0.328+1\cdot 0.328+2\cdot 0.197+3\cdot 0.148=1{,}167\approx 1$$

Y^2	0^2	1^2	2^2	3^2
P	0,328	0,328	0,197	0,148

$$M\left[Y^2\right]=0^2\cdot 0.328+1^2\cdot 0.328+2^2\cdot 0.197+3^2\cdot 0.148\approx \mathbf{2.448}$$
$$D[Y]=M\left[Y^2\right]-M[Y]=2.448-1.167^2=\mathbf{1.088\approx 1.}$$

Многомерные случайные величины

Часто приходится решать задачи, в которых рассматриваются события, описываемые не одной, а несколькими случайными величинами (в частности двумя). Так, при стрельбе в эстафетной гонке биатлонист сначала использует основные патроны, а затем при необходимости – дополнительные. Количество штрафных кругов (X) и количество использованных дополнительных патронов (Y) образуют систему двух случайных величин (X,Y).

Двумерную случайную величину (X,Y) так же, как и одномерную, можно задавать таблицей. Первая строка таблицы содержит возможные значения случайной величины Y, а первый столбец – возможные значения X. В остальных клетках таблицы указаны соответствующие вероятности, причем их сумма всегда равна единице.

$X \backslash Y$	y_1	$\dots$	y_m
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_k	p_{k1}	$\dots$	p_{km}

Характеристики двумерных случайных величин:

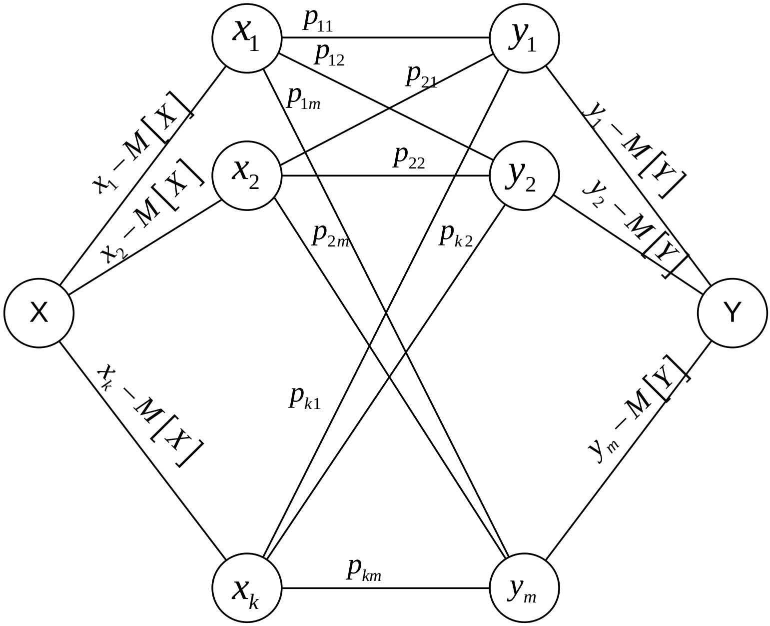
Главной характеристикой двумерной случайной величины является коэффициент корреляции $\rho(X,Y)$. По значению коэффициента определяют направление и тесноту связи. Если $\rho > 0$, то связь прямая, если $\rho < 0$, то связь обратная.

Обычно считают, при $0 < |\rho| \le 0.3$ связь двух случайных величин слабой, при $0.3 < |\rho| \le 0.7$ – средней, а при $0.7 < |\rho| \le 1$ – сильной (или тесной).

Коэффициент корреляции определяется через ковариацию и дисперсии $\rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}}$.

Ковариация вычисляется по формуле $Cov(X,Y) = M\Big[\big(X - M[X]\big) \cdot \big(Y - M[Y]\big)\Big]$ и характеризует степень зависимости случайных величин, а также их рассеивание вокруг точки $\big(M[X], M[Y]\big)$.

Для конечных случайных величин X,Y ковариацию удобно находить как полный вес всего графа, который называем ковариационным [9, С. 143]:



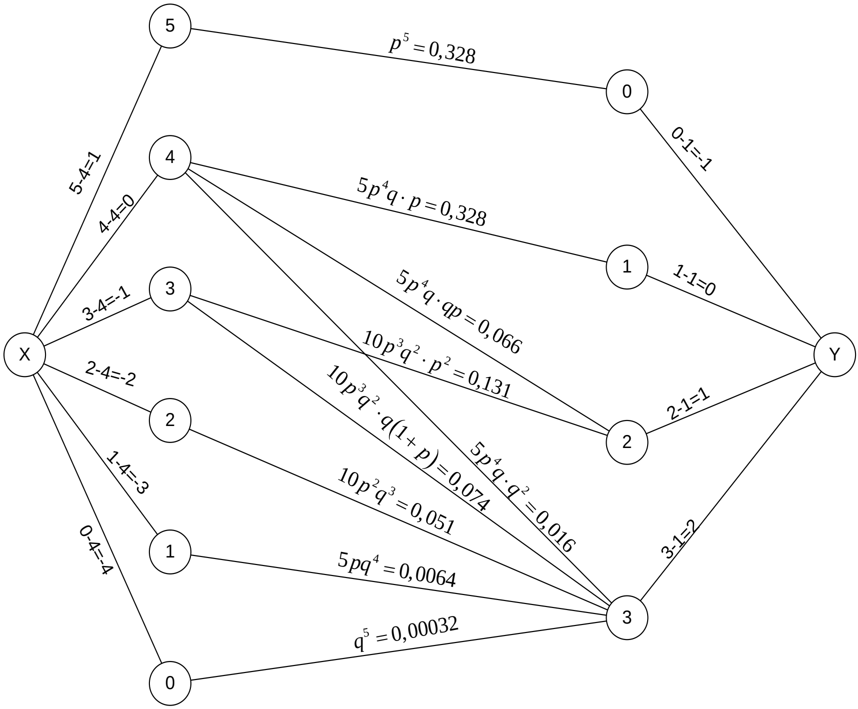
Вариация 14 (на корреляцию). Определить коэффициент корреляции между количеством закрытых мишеней при основной стрельбе и количеством использованных дополнительных патронов, если вероятность попадания равна $p = 0,8$.

Решение

$X = \{\textit{количество закрытых мишеней при основной стрельбе}\}$

$Y = \{\textit{количество использованных дополнительных патронов}\}$

Построим ковариационный граф, используя значения математического ожидания, вычисленные в вариациях 12 и 13 $M[X] = 4; M[Y] \approx 1$.



Ковариацию случайных величин X и Y найдем по ковариационному графу:

$$Cov(X,Y)=1\cdot 0.328\cdot(-1)+0\cdot 0.328\cdot 0+0\cdot 0.066\cdot 1+0\cdot 0.016\cdot 2+$$
$$+(-1)\cdot 0.131\cdot 1+(-1)\cdot 0.074\cdot 2+(-2)\cdot 0.051\cdot 2+(-3)\cdot 0.0064\cdot 2+$$
$$+(-4)\cdot 0.00032\cdot 2\approx -0.852$$

Дисперсии случайных величин X *и* Y вычислены в вариациях 11 и 12.

$D[X]=0.8$, $D[Y]\approx 1$.

Следовательно, коэффициент корреляции находится следующим образом:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}=\frac{-0.852}{\sqrt{0.8\cdot 1}}\approx -0.95.$$

Полученный коэффициент $\rho(X,Y)$ показывает наличие обратной сильной связи между случайными величинами X и Y. Таким образом, мы показали, что чем **больше** количество попаданий при стрельбе основными патронами, тем **меньше** потребуется дополнительных, и наоборот.

Итак, мы вспомнили (на спортивном материале) основные понятия теории вероятностей, и теперь можно переходить к изучению нового раздела – математическая статистика.

Статистика соревнований

Математическая статистика, о которой в основном и будет говориться в этой книге, опирается на методы и понятия теории вероятностей, но решает в каком-то смысле обратные задачи. В теории вероятностей рассматриваются случайные величины с заданным распределением или случайные эксперименты, свойства которых целиком известны.

Но часто эксперимент представляет собой черный ящик, выдающий лишь некие результаты, по которым требуется сделать вывод о свойствах самого эксперимента. Наблюдатель имеет набор числовых (или их можно сделать числовыми) результатов, полученных повторением одного и того же случайного эксперимента в одинаковых условиях.

При этом возникают, например, следующие вопросы:

– Если мы наблюдаем одну случайную величину – как по набору ее значений в нескольких опытах сделать как можно более точный вывод о ее распределении?

– Если мы наблюдаем одновременно проявление двух (или более) признаков, т.е. имеем набор значений нескольких случайных величин – что можно сказать об их зависимости? Есть она или нет? А если есть, то какова эта зависимость?

Часто имеется возможность высказать некие предположения о распределении, спрятанном в «черном ящике», или о его свойствах. В этом случае по опытным данным требуется подтвердить или опровергнуть эти предположения («гипотезы»). При этом надо помнить, что ответ «да» или «нет» может быть дан лишь с определенной степенью достоверности, и чем дольше мы можем продолжать эксперимент, тем точнее могут быть выводы.

Основные понятия статистики

Генеральная совокупность – это любая совокупность людей (спортсмены или команды, участвующие в Олимпийских играх). Теоретически генеральная совокупность неограничена.

Выборка – любая группа элементов (испытуемых, спортсменов, команд), выделенная из генеральной совокупности для проведения исследования.

Требования к выборке:

1. ***Однородность***. Выбор осуществляется на определенных основаниях: возраст, пол, участие в Олимпийских играх в конкретном году, участие в определенной дисциплине Олимпийских игр.
2. ***Репрезентативность*** – качество выборки, позволяющее распространять полученные на ней выводы на всю генеральную совокупность (отборочные турниры, жеребьевка).

Объем выборки – количество испытуемых (спортсменов, команд, сборных) в выборке.

Полученный статистический материал $x_1, x_2, ..., x_n$ наблюдений представляет собой первичные данные о величине, подлежащей статистической обработке. Обычно такие статистические данные оформляются в табличной или графической форме.

Табличное представление данных

Первым этапом статистического изучения результатов является построение вариационного ряда – упорядоченного распределения единиц совокупности по возрастающим значениям признака и подсчет числа единиц с тем или иным значением признака.

Существуют **три формы вариационного ряда**: ранжированный ряд, группированный ряд, интервальный ряд.

Ранжированный ряд – это перечень отдельных вариант в порядке возрастания (убывания) изучаемого признака.

Прыжки с трамплина. Историческая справка: *Прыжки с трамплина входили в состав каждых Зимних Олимпийских игр. С 1924 по 1956 год проводилось лишь одно соревнование на трамплине с разгоном длиной около 70 метров, в то время классифицированного как «большой». В 1960 году прыжки прошли на 80-метровом трамплине, а на следующей Олимпиаде впервые разыгрывались 2 комплекта наград, на 70- (нормальный) и 80- (большой) метровых трамплинах. С Олимпиады 1968 года большой трамплин стал 90-метровым, и с тех пор длина трамплинов практически не менялась. В 1988 году впервые были проведены командные соревнования, где каждый из четырёх спортсменов сборной дважды прыгает с большого трамплина. С Олимпиады 1992 года мощность трамплинов стала измеряться не длиной разгона, а расстоянием от точки отрыва до К-поинта: нормальный получил мощность К-90, а большой – К-120. Мощность может немного варьироваться, в Турине соревнования проводились на 95- и 125-метровых трамплинах.*

Пример 1. Имеются результаты первой десятки лучших спортсменов, выполнявших ***прыжки с трамплина*** на зимних Олимпийских играх 2010 (нормальный трамплин).

Место	Спортсмен	1 прыжок					2 прыжок					Всего
		Дистанция (метры)	Дистанция (очки)	Оценка судей	Всего	Место	Дистанция (метры)	Дистанция (очки)	Оценка судей	Всего	Место	
1	Симон Амман (SUI)	105,0 м	80,0	55,5	135,5	1	108,0 м	86,0	55,0	141,0	1	276,5
2	Адам Малыш (POL)	103,5 м	77,0	55,5	132,5	3	105,0 м	80,0	57,0	137,0	3	269,5
3	Грегор Шлиренцауэр (AUT)	101,5 м	73,0	55,0	128,0	7	106,5 м	83,0	57,0	140,0	2	268,0
4	Янне Ахонен (FIN)	102,0 м	74,0	55,5	129,5	5	104,0 м	78,0	55,5	133,5	5	263,0
5	Михаэль Урман (GER)	103,5 м	77,0	56,0	133,0	2	102,0 м	74,0	55,5	129,5	10	262,5
6	Роберт Кранец (SLO)	102,0 м	74,0	55,0	129,0	6	102,5 м	75,0	55,5	130,5	8	259,5
7	Петер Превц (SLO)	100,0 м	70,0	54,0	124,0	13	104,5 м	79,0	56,0	135,0	4	259,0
8	Томас Моргенштерн (AUT)	102,0 м	74,0	56,0	130,0	4	101,5 м	73,0	55,5	128,5	11	258,5
9	Андерс Якубсен (NOR)	99,5 м	69,0	54,5	123,5	15	104,0 м	78,0	55,5	133,5	5	257,0
10	Мартин Шмитт (GER)	99,5 м	69,0	54,0	123,0	16	103,5 м	77,0	56,0	133,0	7	256,0

Составить ранжированный ряд по столбцу «Дистанция (метры)» для второго прыжка.

Решение

Лучший результат – более далекий прыжок, поэтому составим ранжированный ряд по убыванию признака:

108,0 106,5 105,0 104,5 104,0 104,0 103,5
102,5 102,0 101,5.

Если в соревнованиях принимало большое количество спортсменов (объем выборки большой), то ранжированный ряд становится громоздким, а его построение занимает длительное время. В большинстве своем такой ряд является неинформативным. Например, если рассматривать в качестве анализируемого признака оценки судей, то удобнее перечислить все возможные оценки и для каждой из них указать, сколько судей поставили эту оценку:

Оценка x_i	57	56	55,5	55
Частота m_i	2	2	5	1

При таком построении повышается информативность таблицы – половина спортсменов получила оценку 55,5.

Таким образом, ***вариационным*** (***статистическим***) рядом называется таблица, первая строка которой содержит в порядке возрастания элементы x_i, а вторая – их частоты m_i (относительные частоты f_i).

Вариационный ряд:

x_i	x_1	x_2		x_k
m_i	m_1	m_2		m_k

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = N$$

Статистический ряд:

x_i	x_1	x_2		x_k
$f_i = \dfrac{m_i}{N}$	f_1	f_2		f_k

$$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$$

Если же исследуемых вариант много и практически каждое встречается только один раз, тогда строится ***интервальный вариационный ряд***.

Интервальный вариационный ряд представляет собой таблицу, состоящую из двух строк – интервалов вариант и частот попадания в данный интервал (относительных частот).

При построении интервального вариационного ряда необходимо выбрать оптимальное число групп (интервалов признака) и установить длину интервала.

Обычно предпочтительны интервалы одинаковой ширины, а при выборе числа интервалов исходят из следующих соображений: группировка производится для того, чтобы построить эмпирическое распределение и сформировать с его помощью предположения о форме распределения изучаемого признака в генеральной совокупности, из которой взята выборка.

При увеличении числа интервалов группировки уменьшается число экспериментальных данных, попадающих в каждый интервал. При такой группировке появляется много случайных изменений, что мешает установить общие закономерности варьирования признака. И, наоборот, при чрезмерно широких интервалах группировки нельзя получить детальной картины распределения, поэтому возникает опасность упустить важные закономерные подробности формы распределения.

Поэтому вопрос о выборе числа и ширины интервалов группировки приходится решать в каждом конкретном случае исходя из целей исследования, объема выборки и степени варьирования признака в выборке.

Границы интервалов должны указываться следующим образом: верхняя граница предыдущего интервала повторяет нижнюю границу следующего.

Плавание. Историческая справка. *В 1896 году плавание вошло в программу первых Олимпийских игр, и с тех пор неизменно входит в олимпийскую программу. В 1899 году в Будапеште прошли крупные международные соревнования с участием спортсменов из нескольких европейских стран; далее они стали проводиться ежегодно в различных странах Европы и носили название «первенство Европы».*

Перед началом Олимпийских игр 1908 года Международная федерация плавания (ФИНА) разработала и утвердила «Правила ФИНА», включавшие перечень дистанций для проведения соревнований, порядок комплектования и проведения заплывов, порядок регистрации мировых рекордов. Тогда же были зарегистрированы первые мировые рекорды, самым ранним из них стал результат Золтана Халмаи на дистанции 100 м вольным стилем (1.05,8), показанный 3 декабря 1905 года.

Пример 2. (Плавание). Имеются результаты по плаванию в полуфинале на летних Олимпийских играх 2008 года 200 метров на спине (женщины).

Место	Заплыв	Спортсмен	100 м
12	1	Ханаэ Ито (JPN)	1:01,78
1	2	Кирсти Ковентри (ZIM)	1:01,97
4	1	Рэйко Накамура (JPN)	1:02,08
2	1	Элизабет Бейзел (USA)	1:02,93
3	2	Нэй Мигэн (AUS)	1:03,05
9	1	Джемма Споффорт (GBR)	1:03,13
15	1	Лора Маноду (FRA)	1:03,17
5	2	Маргарет Хольцер (USA)	1:03,36
13	2	Алексианна Кастель (FRA)	1:03,46
7	1	Элизабет Симондс (GBR)	1:03,52
8	2	Анастасия Зуева (RUS)	1:03,62
11	1	Мелисса Ингрэм (NZL)	1:03,64
6	2	Белинда Хокинг (AUS)	1:03,72
14	2	Станислава Комарова (RUS)	1:04,21
16	2	Анья Чарман (SLO)	1:04,51
10	1	Чжао Цзин (CHN)	1:04,59

Постройте интервальный вариационный ряд.

Решение

Определим **размах варьирования**

$R = x_{\max} - x_{\min} = 1:04,59 - 1:01,78 = 02,81$.

Разобьем весь этот диапазон на 2, 4 и на 5 равных интервалов. Тогда длины интервалов будут соответственно равны:

$$\Delta x_2 = \frac{02,81}{2} \approx 1,4; \quad \Delta x_4 = \frac{02,81}{4} \approx 0,7; \quad \Delta x_5 = \frac{02,81}{5} \approx 0,56 .$$

Составим интервальные вариационные ряды:

2 интервала:

Интервалы	$[1:01,78; 1:03,18)$	$[1:03,18; 1:04,59]$
Частоты	7	9

4 интервала

Интервалы	Частоты
$[1:01,78; 1:02,48)$	3
$[1:02,48; 1:03,18)$	4
$[1:03,18; 1:03,88)$	6
$[1:03,88; 1:04,59]$	3

5 интервалов

Интервалы	Частоты
$[1:01,78; 1:02,34)$	3
$[1:02,34; 1:02,90)$	0
$[1:02,90; 1:03,46)$	5
$[1:03,46; 1:04,02)$	5
$[1:04,02; 1:04,59]$	3

Таким образом, разбив на 2 интервала, трудно увидеть закономерность распределения времени прохождения дистанции спортсменами. При разбиении на 5 интервалов получили интервал, в который никто из спортсменов не попал. Значит, наиболее рациональным является разбиение на 4 интервала.

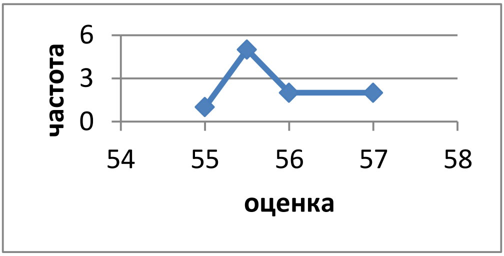
Графическое отображение данных

Существенную помощь в анализе вариационного ряда и его свойств оказывает графическое изображение. Наиболее распространенными способами графического представления являются полигон частот и гистограмма.

Полигон частот – это ломаная, соединяющая точки с координатами (x_i, m_i).

Пример 3. Построить полигон частот для вариационного ряда из примера 2.

Решение

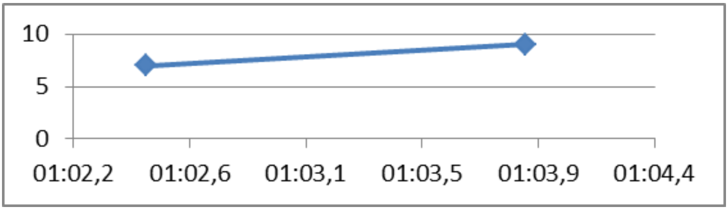


Пример 4. Построить полигон частот для интервальных вариационных рядов из примера 2.

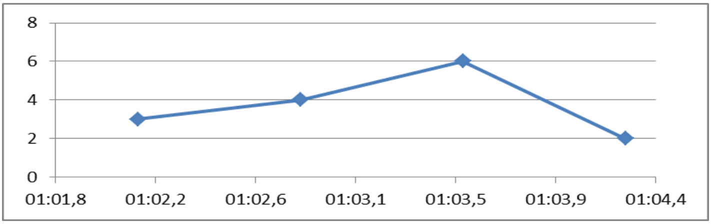
Решение

Вычислим середины каждого интервала и построим полигон частот:

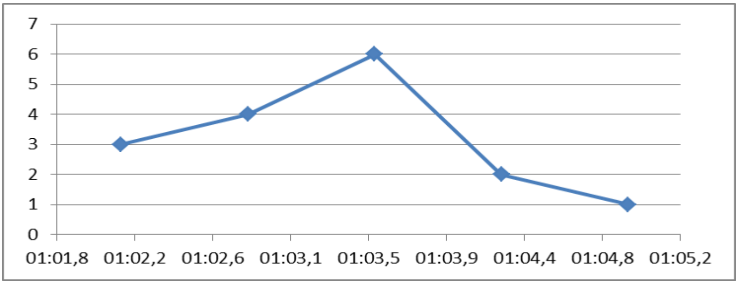
2 интервала		
Интервалы	Середина интервала	Частоты
$[1:01,78;1:03,18)$	1:02,48	7
$[1:03,18;1:04,59]$	1:03,89	9



4 интервала		
Интервалы	Середина интервала	Частоты
$[1:01,78;1:02,48)$	1:02,13	3
$[1:02,48;1:03,18)$	1:02,83	4
$[1:03,18;1:03,88)$	1:03,53	6
$[1:03,88;1:04,59]$	1:04,24	3



5 интервалов		
Интервалы	Середина интервала	Частоты
$[1:01,78;1:02,34)$	1:02,06	3
$[1:02,34;1:02,90)$	1:02,62	0
$[1:02,90;1:03,46)$	1:03,18	5
$[1:03,46;1:04,02)$	1:03,74	5
$[1:04,02;1:04,59]$	1:04,31	3



Для отображения интервального ряда чаще всего вместо полигона частот используется ***гистограмма***.

Гистограмма – это фигура, состоящая из прямоугольников. По оси абсцисс откладываются крайние значения интервалов, по оси ординат – относительные частоты появления значения в рассматриваемой совокупности, деленные на длину интервала $\left(\dfrac{m_i}{N\cdot\Delta x_i}\right)$.

Гистограмму следует отличать от столбчатой диаграммы, которая отображает частоту через ***высоту столбца***, а гистограмма – через его ***площадь***. Из способа построения гистограммы следует, что полная ее площадь равна единице.

Пример 5. Построить гистограмму для интервального вариационного ряда из примера 3 для четырех интервалов.

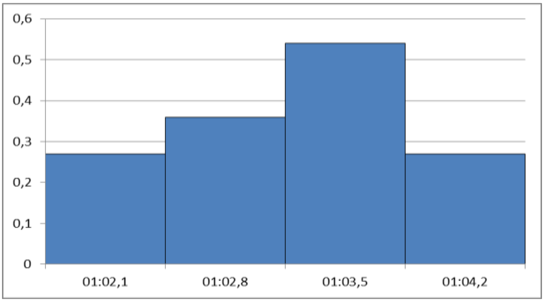
Решение

Вычислим ширину и высоту каждого столбика для интервального ряда и построим гистограмму. Так как разбивали на равные интервалы, то и ширина каждого столбца постоянна и равна $\Delta x_i = 0,7$.

Интервалы	Середина интервала	Частоты m_i	Высота столбца $h_i = \dfrac{m_i}{N\cdot\Delta x_i}$
$[1:01,78;1:02,48)$	1:02,13	3	0,27
$[1:02,48;1:03,18)$	1:02,83	4	0,36

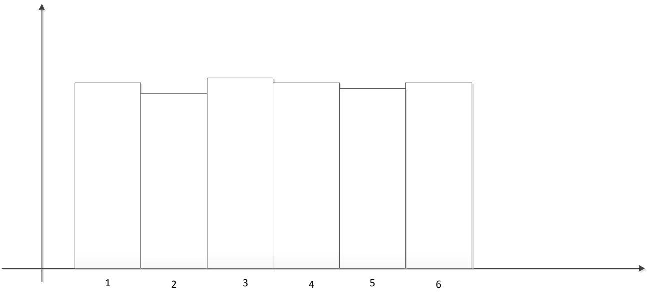
$[1:03,18; 1:03,88)$	1:03,53	6	0,54
$[1:03,88; 1:04,59]$	1:04,24	3	0,27

Тогда гистограмма будет иметь вид:



Если ваше распределение получится похожим на симметричный холм, или на колокол, то оно называется **нормальным**. Почему «нормальным»? Возможно, из-за того, что для этого вида распределения математики нашли подход и придумали формулы, по которым удобно находить основные числовые характеристики.

Многие распределения не нормальны. Например, если кидать кубик и смотреть, сколько каких граней будет выпадать при большом количестве бросков, то окажется, что распределение будет похоже на прямоугольник.



Итак, все числа на гранях будут выпадать примерно одинаковое число раз. Получается равномерное распределение.

Оно, конечно, даже проще чем нормальное, но на практике редко встречается. Другие могут иметь самую причудливую форму.

Гистограмму распределения хорошо видно на глаз, но в формулу рисунок не подставишь. Нужны какие-то числовые параметры, чтобы они отображали свойства распределения. Главные среди них – это среднее значение, дисперсия и среднеквадратичное отклонение.

Числовые характеристики вариационного ряда

Мы рассмотрели различные способы представления исходных данных: табличное и графическое. Каждое распределение дает некоторое представление об изучаемой совокупности. Однако основную информацию получаем из числовых характеристик положения и рассеивания.

Главными характеристиками положения являются:

- мода,
- медиана,
- выборочное среднее.

Рассмотрим их вычисления для различных типов представления данных.

Мода

Мода – это такая варианта, которая чаще всего встречается в выборке.

Если исходные данные представлены интервальным вариационным рядом, то в качестве моды выбирается интервал, частота попадания в который максимальна, такой интервал называется **модальным интервалом**.

Пример 6. Определите моду для вариационного ряда из примера 1 и примера 2 (при разбиении на 4 интервала).

Решение

Оценка x_i	57	56	55,5	55
Частота m_i	2	2	5	1

Наибольшее количество арбитров, а именно 5, поставило оценку 55,5. Значит, мода равна $M_o = 55.5$.

Интервалы $\left[x_i ; x_{i-1}\right)$	Частота m_i
$\left[1:01,78;1:02,48\right)$	3
$\left[1:02,48;1:03,18\right)$	4
$\left[1:03,18;1:03,88\right)$	6
$\left[1:03,88;1:04,59\right]$	3

Наибольшее количество спортсменов преодолело дистанцию за время $\left[1:03,18;1:03,88\right)$. Этот интервал является модальным интервалом.

Медиана

Медиана – это такая варианта, которая делит ряд распределения пополам.

Если исходные данные представлены ***ранжированным рядом***, то чтобы определить медиану, нужно просто найти среднее значение ряда.

Если количество вариант нечетно, то медиана одна: $x_1, x_2, \underset{M_e}{x_3}, x_4, x_5$.

Если количество вариант четно, то медиан может быть две, если центральные значения различны, или одна, если они одинаковые: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.
M_e

Если исходные данные представлены ***вариационным рядом***, нужно найти такую варианту, которая примерно делит ряд пополам, т.е. сумма частот до нее и после нее больше или равна половине объема выборки. Такая варианта называется медианой.

Так же, как и для ранжированного ряда, медиан может быть или одна, или две.

x_i	x_1	$\dots$	x_r	$\dots$	x_k
m_i	m_1	$\dots$	m_r	$\dots$	m_k

$$M_e = x_r\text{, } \textit{если} \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{r} m_i \geq \dfrac{N}{2} \\ \sum\limits_{i=r}^{k} m_i \geq \dfrac{N}{2} \end{cases}\text{, где } N = \sum_{i=1}^{k} m_i \text{ .}$$

Пример 7. Определите медианы для распределений из примеров 1 и 2.

Решение

Ранжированный ряд из примера 1.

$$108,0\ 106,5\ 105,0\ 104,5\ \underbrace{104,0\ 104,0}_{M_e}\ 103,5\ 102,5\ 102,0\ 101,5.$$

Так как центральные значения одинаковые, то медиана для ранжированного ряда одна: $M_e = 104$.

Определим медиану для вариационного ряда из примера 1.

Оценка x_i	57	56	55,5	55
Частота m_i	2	2	5	1

Значит, $M_e = 55,5$.

Выборочное среднее

Выборочное среднее – это среднее арифметическое вариационного ряда.

Если исходные данные представлены ***ранжированным рядом***, то чтобы определить выборочное среднее, нужно найти среднее арифметическое всех значений: $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$.

Если исходные данные представлены ***вариационным рядом***, то выборочное среднее определяется по формуле: $\overline{x_в} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_i \cdot m_i}{N}$.

Пример 8. Определите выборочное среднее для распределений из примеров 1 и 2.

Решение.

Ранжированный ряд из примера 1.

108,0 106,5 105,0 104,5 104,0 104,0 103,5 102,5 102,0 101,5.

$$\overline{x_в} = \frac{108 + 106,5 + 105 + 104,5 + 104 + 104 + 103,5 + 102,5 + 102 + 101,5}{10} =$$

$$= \frac{1041,5}{10} = 104,15$$

Определим выборочное среднее для группированного вариационного ряда из примера 2.

Оценка x_i	57	56	55,5	55
Частота m_i	2	2	5	1

$$\overline{x_в} = \frac{57 \cdot 2 + 56 \cdot 2 + 55,5 \cdot 5 + 55 \cdot 1}{10} = \frac{558,5}{10} = 55,85$$

Все три найденные характеристики: $M_0 = 55,5;\ \ M_e = 55,5;\ \ \overline{x_в} = 55,85$ - близки между собой.

Бег. Историческая справка. *Уже первобытному человеку были знакомы бег, прыжки и метания, для того чтобы обороняться от неприятелей, охотиться и т.д. Эти упражнения составляют фундамент современного легкоатлетического спорта. Соревнования по лёгкой атлетике на летних Олимпийских играх впервые появились на Олимпиаде 1896 в Афинах и с тех пор включались в программу каждых последующих Игр. Первоначально соревнования были мужскими, но на летних Олимпийских играх 1928 в Амстердаме были введены женские дисциплины.*

История бега на короткие дистанции начинается с Олимпийских игр древности. Бег на стадий (192,27 м) и два стадия пользовался большой популярностью у греков. Причем древние атлеты применяли не только высокий, но и низкий старт, используя для этого особые стартовые упоры в виде каменных или мраморных плит.

Бег на короткие дистанции раньше других видов легкой атлетики был признан доступным для женщин и включен в программу Олимпийских игр 1928 г.

Интересные факты. *А знаете ли вы, что на первых современных Олимпийских играх американский спринтер Том Бёрк оказался единственным спринтером, использовавшим низкий старт? Во многом благодаря этому он и выиграл дистанции 100 м и 400 м и стал двукратным чемпионом Игр 1896 года. До этого бегуны даже на короткие дистанции стартовали с высокого старта.*

Но надо признать, что идея низкого старта принадлежит не Бёрку, а другому американцу – Чарльзу Шериллу, который применил низкий старт еще в 1888 году. Путешествуя по Австралии, Шерилл и его тренер обратили внимание на такой интересный факт: кенгуру перед прыжком пригибается к зем-

ле, а затем быстро распрямляется, посылая тело вперед. Такой стремительный старт позволяет и животному, и спринтеру выиграть несколько мгновений, таких дорогих на коротких дистанциях!

Пример 9. В таблице представлены результаты соревнований в беге на 400 метров среди мужчин на Летних Олимпийских играх 2008 в Пекине.

Первые четыре спортсмена из забега независимо от показанного времени автоматически попадают в финал соревнований.

Место	Спортсмен	Результат	Примечания
1.	Лашоун Меррит	44.12	Q
2.	Мартин Руни	44.60	Q,PB
3.	Йохан Виссман	44.64	q,SB
4.	Ренни Квоу	44.82	q,PB
5.	Гэри Кикайя	44.94	
6.	Майкл Матье	45.56	
7.	Шон Ро	45.56	
8.	Седрик ван Брантегхем	45.81	

Определите, какая из трех характеристик положения является определяющей при отборе в финал.

Решение

Вычислим все три характеристики.

Мода – это время, показанное большинством спортсменов. В данном случае, два спортсмена показали одинаковый результат 45,56. Таким образом, самый «модный» результат $M_o = 45.56$.

Медиана – это время, лучше которого пробежали половина спортсменов и хуже которого тоже половина спортсменов. В данном случае $M_e' = 44.82,\ M_e'' = 44.94$.

Выборочное среднее – это среднее время спортсменов в данном забеге

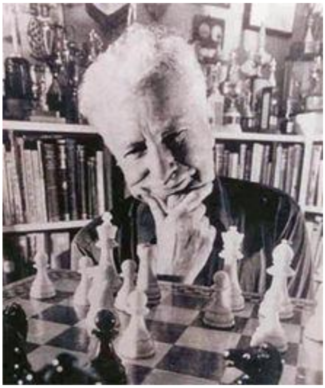
$$\overline{x_в} = \frac{44,12+44,60+44,64+44,82+44,94+45,56+45,56+45,81}{8} \approx 45.$$

Итак, в данном примере мы получили, что если бы определяющей была характеристика выборочного среднего или моды, то и пятый спортсмен прошел бы в финал.

В данной задаче, если в финал проходит половина спортсменов, то и определяющей является медиана – середина вариационного ряда.

Новый рейтинг в спорте

Рассмотренные характеристики вариационного ряда позволяют смоделировать новую систему подсчета очков в турнирах, разыгрываемых по круговой системе. Идея предлагаемой системы заключается в пересчете набранных очков в зависимости от «силы» конкретного соперника.



В спортивном мире существуют различные способы ранжирования или рейтингования игроков, команд. В соревнованиях, разыгрываемых по круговой системе, рейтинг команд определяется по числу набранных очков с дополнительными условиями при их равенстве. Существуют различные варианты начисления очков за победу (3, 2 или 1 очко), стимулирующие результативную борьбу, и ничью (1 или 0,5 очка), если она допускается. Однако при обычном подсчете очков не учитывается сила соперников, на чем основан наиболее известный спортивный рейтинг ELO. Арпад Эло был квалифицированным шахматистом и активно работал в шахматной федерации США со времени ее основания в 1939 году, которая применяла уже тогда числовую систему для обсчета рейтингов.

Сколько существует спорт, столько же и предпринимаются усилия по разработке различных способов начисления очков в спортивных состязаниях и способов классификации в индивидуальных и командных видах спорта. Так, в конце XX века кандидат физико-математических наук Е.Г. Потемкин предложил:

1) объединить в единую табель о рангах клубы высшей лиги чемпионата СССР по хоккею и команды НХЛ на момент 1990 г. с учетом сыгранных командами ЦСКА (Москва) и Динамо (Рига) выставочных матчей с заокеанскими профессионалами. При этом предложенный Е.Потемкиным рейтинг учитывал счет встречи (команде, победившей в игре с разницей в одну шайбу, начисляется $\frac{3}{5}$ от общего количества разыгрываемых в матче очков, проигравшей – $\frac{2}{5}$, соответственно; победителю с разницей в две шайбы начисляется $\frac{2}{3}$, проигравшему – $\frac{1}{3}$, соответственно и т.д.). Таким образом, чем больше преимущество в счете, тем больше растет рейтинг победителя по сравнению с рейтингом проигравшего, «вес победы» (победа над лидером турнира, по его мнению, должна оцениваться в двух- или трехкратном размере больше, чем победа над аутсайдером), пространственный фактор (победа на поле соперника должна цениться выше, чем победа на «родном льду»);

2) механизм сравнения значимости побед некоторых олимпийских чемпионов 1988 г. (где в финальных соревнованиях участвуют 8 команд или 8 спортсменов), суть предлагаемого алгоритма начисления условных очков спортсменам-победителям заключается в том, что чем больше отрыв победителя от своих соперников, тем выше его место в объединенной табели о рангах;

3) ввести новую систему начисления очков: а) в каждом матче разыгрывается одинаковое количество очков (кратное 100: на момент 1990 года – 200 очков, поскольку, как известно, в то время в стандартной очковой системе в матче разыгрывалось 2 очка); б) количество очков, начисляемое команде, определяется забитыми и пропущенными шайбами; в) количество очков, начисляемое победителю при одном и том же соотношении заби-

тых и пропущенных шайб, растет с увеличением общей результативности встречи. На основании этих данных рассчитывается коэффициент успеха.

Рассмотрим сначала традиционный способ подсчета очков и определения победителя и призеров соревнований.

Футбол. Историческая справка. *Родоначальником футбола по праву считается средневековая Англия. Тогда в футбол играли на рыночных площадях и даже на узких кривых улицах. Играли с утра до вечера. Численность играющих превышала 100 человек, при этом почти никаких ограничений не существовало.*

Можно было играть как руками, так и ногами, разрешалось хватать игрока, владеющего мячом, сбивать его с ног. Как только игрок овладевал мячом, за ним тотчас устремлялась веселая, буйная толпа играющих. В результате рушились торговые палатки, в щепки разносились базарные ларьки. В деревнях даже реки не служили игрокам преградой. Случалось, что некоторые игроки тонули при переправе, но этого порой даже не замечали. Один писатель из Англии писал, что у них «щеки в синяках, ноги, руки и спины переломаны, выбитые глаза, носы, полные крови...». А путешественник Гастон де Фуа, наблюдая за игрой в футбол, воскликнул: «Если англичане называют это игрой, то что же они называют дракой?!»

Все эти нарушения не остались не замеченными среди церковников и феодалов. Вскоре они потребовали запретить футбол.

Но, несмотря на запреты, народ продолжал играть в футбол. И уже в 1592 году в Шотландии запрет на футбол был снят, а в 1603 году этому примеру последовала и Англия. Народ сумел защитить свою любимую игру.

Футбол оказался сильнее запретов, благополучно жил и развивался, приобрел современную форму и стал олимпийским *видом спорта. В 1908 году футбол был включен в программу Олимпийских игр.*

Интересные факты. *Российская сборная по футболу располагает столетней историей выступлений на чемпионатах мира и Европы и Олимпийских играх; сборная Российской империи по футболу впервые появилась на V Летних Олимпийских играх в Стокгольме, в 1912 году. После распада Российской империи образовался СССР, а затем и его национальная сборная, которая завоевала титул чемпиона Европы в 1960 году и дважды становилась олимпийским чемпионом: в 1956 и 1988 годах.*

Пример 10. Рассмотрим результаты чемпионата России по футболу в Премьер-лиге за 2010 год.

Пример 11.

м	команда	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	иг	в н п	мячи	разн.	Оч
1	Зенит	1	1:3 2:0	2:0 2:2	1:1 0:1	1:0 3:0	3:1 3:2	1:1 2:1	2:0 0:0	5:0 3:1	6:1 1:0	2:1 3:3	0:0 0:0	0:0 1:0	2:0 2:0	3:0 3:1	2:0 5:2	30	20 8 2	61 - 21	+40	68
2	ЦСКА	0:2 3:1	2	0:0 1:0	3:1 2:1	1:1 0:1	1:2 1:1	0:0 0:0	3:1 3:0	2:0 0:1	1:1 1:1	4:0 2:1	4:1 3:0	4:3 1:0	1:0 0:0	2:1 3:1	1:0 4:1	30	18 8 4	51 - 22	+29	62
3	Рубин	2:2 0:2	0:1 0:0	3	1:1 1:0	2:0 0:0	1:1 1:1	2:0 2:2	2:1 1:0	2:1 2:0	2:0 0:0	0:0 1:0	0:0 1:1	3:0 2:0	3:0 1:0	1:0 1:1	1:0 2:2	30	15 13 2	37 - 16	+21	58
4	Спартак М	1:0 1:1	1:2 1:3	0:1 1:1	4	2:1 3:2	0:0 2:0	0:1 1:1	4:2 2:2	2:1 0:1	2:1 0:0	3:0 1:0	2:1 0:2	0:0 0:0	2:2 2:0	3:0 2:5	5:3 0:0	30	13 10 7	43 - 33	+10	49
5	Локомотив М	0:3 0:1	1:0 1:1	0:0 0:2	2:3 1:2	5	1:0 1:1	3:2 0:3	2:1 1:1	0:1 2:1	0:1 1:0	2:1 1:0	2:1 0:0	3:0 0:0	2:0 2:1	3:0 0:0	1:1 2:2	30	13 9 8	34 - 29	+5	48
6	Спартак Нч	2:3 1:3	1:1 2:1	1:1 1:1	0:2 0:0	1:1 0:1	6	1:0 3:0	2:1 0:1	5:2 1:1	2:0 1:3	1:3 0:0	2:1 1:1	1:0 0:2	2:1 1:3	2:1 0:1	4:2 2:0	30	12 8 10	40 - 37	+3	44
7	Динамо М	1:2 1:1	0:0 0:0	2:2 0:2	1:1 1:0	3:0 2:3	0:3 0:1	7	0:0 0:1	3:2 1:1	1:0 2:3	4:0 1:1	3:1 1:1	1:1 0:1	1:1 1:0	2:0 0:0	4:1 2:2	30	9 13 8	38 - 31	+7	40
8	Томь	0:0 0:2	0:3 1:3	0:1 1:2	2:2 2:4	1:1 1:2	1:0 1:2	1:0 0:0	8	3:1 2:0	2:2 2:1	1:4 0:1	2:1 0:1	1:1 3:2	1:0 1:2	1:1 1:2	3:2 1:0	30	10 7 13	35 - 43	−8	37
9	Ростов	1:3 0:5	1:0 0:2	0:2 1:2	1:0 1:2	1:2 1:0	1:1 2:5	1:1 2:3	0:2 1:3	9	1:0 2:0	1:0 2:1	1:0 1:1	1:2 2:1	2:1 0:1	0:1 0:0	0:1 0:2	30	10 4 16	27 - 44	−17	34
10	Сатурн	0:1 1:6	1:1 1:1	0:0 0:2	0:0 1:2	0:1 1:0	3:1 0:2	3:2 0:1	1:2 2:2	0:2 0:1	10	1:0 2:1	1:0 0:2	1:1 1:2	2:2 1:0	1:1 1:1	1:1 1:0	30	8 10 12	27 - 38	−11	34
11	Анжи	3:3 1:2	1:2 0:4	0:1 0:0	0:1 0:3	0:1 1:2	0:0 3:1	1:1 0:4	1:0 4:1	1:2 0:1	1:2 0:1	11	1:0 3:1	0:0 0:3	1:0 0:1	2:0 0:0	1:0 4:2	30	9 6 15	29 - 39	−10	33
12	Терек	0:0 0:0	0:3 1:4	1:1 0:0	2:0 1:2	0:0 1:2	1:1 1:2	1:1 1:3	1:0 1:2	1:1 0:1	2:0 0:1	1:3 0:1	12	2:0 3:1	1:0 0:2	2:0 1:2	1:1 2:0	30	8 9 13	28 - 34	−6	33
13	Кр. Советов	0:1 0:0	0:1 3:4	0:2 0:3	0:0 0:0	0:0 0:3	2:0 0:1	1:0 1:1	2:3 1:1	1:2 2:1	2:1 1:1	3:0 0:0	1:3 0:2	13	1:1 1:2	1:0 3:2	1:1 1:4	30	7 10 13	28 - 40	−12	31
14	Амкар	0:2 0:2	0:0 0:1	0:1 0:3	0:2 2:2	1:2 0:2	3:1 1:2	0:1 1:1	2:1 0:1	1:0 1:2	0:1 2:2	1:0 0:1	2:0 0:1	2:1 1:1	14	1:0 0:0	3:1 0:1	30	8 6 16	24 - 35	−11	30
15	Алания	1:3 0:3	1:3 1:2	1:1 0:1	5:2 0:3	0:0 0:3	1:0 1:2	0:0 0:2	2:1 1:1	0:0 1:0	1:1 1:1	0:0 0:2	2:1 0:2	2:3 0:1	0:0 0:1	15	2:1 2:1	30	7 9 14	25 - 41	−16	30
16	Сибирь	2:5 0:2	1:4 0:1	2:2 0:1	0:0 3:5	2:2 1:1	0:2 2:4	2:2 1:4	0:1 2:3	2:0 1:0	0:1 1:1	2:4 0:1	0:2 1:1	4:1 1:1	1:0 1:3	1:2 1:2	16	30	4 8 18	34 - 58	−24	20

В верхних строчках приведены результаты домашних матчей, в нижних – игр на выезде.

Обозначения в таблице традиционные:

– в – число выигранных матчей;

– н – число матчей, сыгранных вничью;

– п – число проигранных матчей,

– мячи – забитые - пропущенные мячи;

– Оч – число набранных очков. Очки начисляются следующим образом: за выигранный матч – 3 очка, за матч, сыгранный вничью – 1 очко, за проигранный матч – 0 очков.

– Иг – число игр.

Распределение мест для каждой команды определяется на основании регламента. Команда, набравшая большее количество очков, нежели другая, располагается в текущей и итоговой турнирной таблице выше ее.

В случае равенства очков у двух и более команд места команд в итоговой таблице Чемпионата определяются по дополнительным показателям.

Команды Ростов и Сатурн набрали одинаковое количество очков – 34. Согласно регламенту, т.к. у команды Ростов 10 выигранных матчей, а у команды Сатурн – только 8, Ростов располагается на 9 позиции, а Сатурн – на 10.

В.В. Афанасьев и И.Н. Непряев [10] предложили новый подход к подсчету очков в турнирах, разыгрываемых по круговой системе, в основу которого положена идея использования главной числовой характеристики специального вариационного ряда.

Рассмотрим столичные футбольные команды: ЦСКА, Динамо, Локомотив, Спартак.

Приведем таблицу результатов личных домашних (гостевых) встреч друг с другом, и, таким образом, набранные очки в «московском турнире».

№	**Место в ЧР**	**Команда**	**Результаты (дома)**				**Набранные очки**
1	2	ЦСКА		3:1 6	1:1 1	0:0 2	9
2	4	Спартак М	1:2 0		2:1 6	0:1 1	7
3	5	Локомотив М	1:0 4	2:3 0		3:2 3	7
4	7	Динамо М	0:0 2	1:1 4	3:0 3		9

В каждой ячейке записан счет матча и очки, набранные командой за две встречи с соперником. Например, ЦСКА и Локомотив (М): первая встреча закончилась вничью со счетом 1:1, а вторая 1:0 в пользу Локомотива. Значит, обе команды за первую встречу получили по 1 очку, а за вторую Локомотив получил 3 очка, а ЦСКА – 0 очков. Таким образом, за две игры ЦСКА получил 1+0=1 очко, а Локомотив: 1+3=4 очка.

Обратим внимание, что по две команды набрали равное количество очков (по 9 – ЦСКА и Динамо М, по 7 – Спартак М и Локомотив М). Возникает вопрос о расстановке команд, учитывая «вес» набранных очков, т.е. анализируя очки, набранные во встречах с «сильными» или «слабыми» соперниками.

Для каждой команды составим нетрадиционный вариационный ряд, выбирая в качестве вариант набранные очки в домашних и гостевых встречах, а в качестве частот — все очки, набранные этими командами во встречах друг с другом.

За две игры можно набрать число очков, равное x_i = 0, 1, 2, 3, 4 или 6 (0 – обе встречи проиграны; 1 – одна встреча вничью, одна проиграна; 2 – обе встречи вничью; 3 – одна проиграна, одна выиграна; 4 – одна вничью, одна выиграна; 6 – обе встречи выиграны).

Для полученных вариационных рядов находим их главную характеристику положения – выборочную среднюю, которая означает среднее число набранных командой очков в парных встречах с соперниками.

Составим такой вариационный ряд для команды ЦСКА.

x_i	1 (Локомотив)	2 (Динамо)	6 (Спартак)
n_i	7	9	7

Выборочная средняя $\overline{x}_1$, для команды ЦСКА находится следующим образом:

$$\overline{x}_1 = \left(1\cdot 7 + 2\cdot 9 + 6\cdot 7\right) / \left(7+9+7\right) = \frac{67}{23} \approx \mathbf{2{,}91}$$

Аналогично находим среднее число набранных очков в домашних и гостевых встречах и для других команд:

Спартак М: $$\overline{x}_2 = \frac{0\cdot 9 + 1\cdot 9 + 6\cdot 7}{25} = \frac{51}{25} \approx 2{,}04\,;$$

Локомотив М: $\bar{x}_3 = \dfrac{0 \cdot 7 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 9}{25} = \dfrac{63}{25} \approx 2,52$;

Динамо М: $\bar{x}_4 = \dfrac{2 \cdot 9 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 7}{23} = \dfrac{67}{23} \approx 2,91$.

Так как 2 команды набрали одинаковый средний ранг, то можно аналогично регламенту сравнивать их остальные показатели, в частности разность между количеством забитых и пропущенных мячей.

№	Место в ЧР	Команда	$\overline{x_i}$	мячи	разность	Новый рейтинг
1	2	ЦСКА	2,91	6-4	2	2
2	4	Спартак М	2,04	8-10	-2	4
3	5	Локомотив М	2,52	8-11	-3	3
4	7	Динамо М	2,91	7-4	3	1

Предложенный подход может быть полезен специалистам, да и самим спортсменам для определения истинной силы той или иной команды после первого круга по футболу, например, или для уточнения возможностей первой восьмерки хоккейных команд при начале плей-офф. И самое главное, если пересчитывать набранные очки по предложенному способу, становится маловероятным решить судьбу команды в последних двух-трех турах, а, следовательно, болельщикам можно надеяться на борьбу до последнего матча и на справедливость спортивных принципов распределения мест.

Характеристики рассеивания

Используя для описания вариационного ряда только характеристики положения, можно сильно ошибиться в оценке характера изучаемой совокупности. Это хорошо видно на следующем примере.

Допустим, мы изучаем средний возраст в двух группах, состоящих каждая из 6-ти человек. Значения признака распределились следующим образом:

1 группа -10, 10, 10, 50, 50, 50

2 группа - 25, 35, 30, 30, 35, 25

Подсчитав среднее значение в каждой из групп, получим одинаковые результаты $\overline{x_1} = 30;\ \overline{x_2} = 30$, тогда как совершенно очевидно, что выборки взяты из разных совокупностей. Путаница произошла из-за разброса значений возраста в этих группах.

Существует несколько способов оценки степени разброса или рассеивания данных. Основными характеристиками рассеивания являются:

- *размах варьирования (R),*
- *дисперсия (D),*
- *среднее квадратическое* (стандартное) *отклонение* (σ —сигма),
- *коэффициент вариации (V).*

Простейший из параметров распределения, ***размах варьирования,*** – это разность между максимальным и минимальным значениями признака: $R = x_{\max} - x_{\min}$.

Например, определим средний возраст в группах и размах варьирования:

1 группа -10, 10, 10, 50, 50, 50

2 группа - 10, 20, 25, 35, 40, 50

$$\overline{x_1} = \frac{10 \cdot 3 + 50 \cdot 3}{6} = 30;\ R_1 = 50 - 10 = 40$$

$$\overline{x_2} = \frac{10 + 20 + 25 + 35 + 40 + 50}{6} = 30;\ R_2 = 50 - 10 = 40$$

Однако этот показатель также не отражает характер совокупности.

Казалось бы, естественной мерой разброса может быть величина, которую можно назвать **средним отклонением от среднего**. Понятно, как ее можно получить: сначала найти среднее значение $\overline{x}$, а затем вычислить среднее арифметическое всех отклонений от этого среднего:

$$\frac{\left(x_1-\overline{x}\right)+\left(x_2-\overline{x}\right)+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)}{n}$$

С одной стороны, учитываются все отклонения, с другой – каждое из них в отдельности не может слишком сильно повлиять на общий результат (как это было с размахом). Но при ближайшем рассмотрении этот общий результат оказывается неожиданным…

Вычислим среднее отклонение от среднего для первой и второй групп:

$$\frac{(10-30)\cdot 3+(50-30)\cdot 3}{6}=0;$$

$$\frac{(10-30)+(20-30)+(25-30)+(35-30)+(40-30)+(50-30)}{6}=0$$

При вычислении среднего отклонения *часть слагаемых входит в сумму со знаком «плюс», а часть – со знаком «минус»*. Итак, среднее отклонение от среднего не может быть мерой разброса, поскольку оно всегда равно нулю. Если бы мы использовали не сами отклонения, а их модули, то тогда найденную величину можно было бы рассматривать как меру разброса:

$$\frac{|10-30|\cdot 3+|50-30|\cdot 3}{6}=20;$$

$$\frac{|10-30|+|20-30|+|25-30|+|35-30|+|40-30|+|50-30|}{6}=11.67$$

Однако математики, да и школьники не любят иметь дело с модулем (и дело даже не в любви, а в «плохих» свойствах модуля) и поэтому для вычисления меры разброса используют не модули отклонений, а их квадраты. Эта величина получила название **дисперсии числового ряда**.

Дисперсия показывает разброс значений признака относительно своего выборочного среднего, то есть насколько плотно значения признака группируются вокруг $\overline{x_в}$; чем больше разброс, тем сильнее варьируются результаты испытуемых в данной группе, тем больше индивидуальные различия между испытуемыми.

Выборочная дисперсия вычисляется по формуле $d_в = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2}{N}$.

У дисперсии есть не очень хорошая черта – ее размерность имеет квадрат. Например, дисперсия роста будет $см^2$. Какой в этом смысл? При чем здесь площадь? Поэтому взяли из дисперсии корень квадратный и назвали **среднее квадратическое отклонение** $\sigma = +\sqrt{d}$ **.** Эта величина, как и дисперсия, характеризует разброс.

Коэффициент вариации V – мера относительного разброса случайной величины; показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет ее средний разброс. Эта характеристика вообще не имеет размерности, что позволяет сравнивать вариативность случайных величин, имеющих различную природу: $V = \frac{\sigma}{\overline{\overline{x_в}}} \cdot 100\%$

Прыжки в высоту. Историческая справка. *Прыжок в высоту с разбега – дисциплина лёгкой атлетики, относящаяся к вертикальным прыжкам технических видов. Составляющие прыжка — разбег, подготовка к отталкиванию, отталкивание, переход через планку и приземление. У древних немцев был популярен так называемый королевский прыжок через несколько стоящих рядом лошадей. А у некоторых племен, населяющих Центральную Африку, издавна и по сей день основным событием народных празднеств остаются состязания по прыжкам в высоту с разбега. На олимпийских играх в Древней Греции олимпийцы бегали, метали диск, прыгали в длину, боролись, состязались на колес-*

ницах, проводили кулачные бои, но ни разу за все 293 олимпиады не прыгали в высоту. Первое упоминание о спортивных соревнованиях по прыжкам в высоту относится к XIX веку.

Интересные факты

В прыжках в высоту безусловное преимущество имеют высокие атлеты, так как их центр массы находится относительно выше и, соответственно, им приходится поднимать свою массу на меньшую высоту. Но при этом в соревнованиях успешно выступают разные спортсмены.

Рост Стефана Хольма (личный рекорд 2,40м) равен 181 см, то есть он прыгнул на 59 см выше собственного роста.

Рост Бланки Влашич (рекорд 2,08) равен 193 см.

Пример 12. Результаты квалификации соревнований по прыжкам в высоту у мужчин на Летних Олимпийских играх 2008 года в Пекине содержатся в таблице. Определите характеристики рассеивания по их результатам.

Пример 13.

Место	Спортсмен	2.10	2.15	2.20	2.25	2.29	Результат
1.	Ярослав Баба	-	o	o	o	o	2.29
1.	Джермейн Мейсон	-	o	o	o	o	2.29
3.	Рауль-Роланд Спанк	-	o	o	xo	o	2.29
4.	Стефан Хольм	-	-	o	o	xo	2.29
5.	Розл Презель	-	o	o	o	xxx	2.25
5.	Ярослав Рыбаков	-	o	o	o	xxx	2.25
7.	Андра Мэнсон	-	xo	xo	o	xxx	2.25
8.	Андреа Бетинелли	-	o	o	xo	xxx	2.25
8.	Микаэл Анани	o	o	o	xo	xxx	2.25
8.	Вячеслав Воронин	-	o	o	xo	xxx	2.25
11.	Драгутин Топич	-	o	xo	xo	xxx	2.25
12.	Никита Палли	o	o	o	xxx		2.20
12.	Дональд Томас	-	o	o	xxx		2.20
14.	Михал Бьеньек	-	xo	o	xxx		2.20
14.	Мажед Алдин Газал	o	xo	o	xxx		2.20
16.	Дасти Джонас	o	o	xo	xxx		2.20
17.	Петер Хорак	o	xo	xxx			2.15
17.	Джерардо Мартинез	o	xo	xxx			2.15
19.	Константинос Баниотис	xo	xxx				2.10
20.	Александр Нартов	xxo	xxx				2.10

Решение

Составим вариационный ряд и произведем все вычисления в таблице:

Результат x_i	Частота m_i	$x_i \cdot m_i$	$x_i - \overline{x_в}$	$\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot m_i$
2,29	4	9,16	0,07	$196 \cdot 10^{-4}$
2,25	7	15,75	0,03	$63 \cdot 10^{-4}$
2,20	5	11	-0,02	$20 \cdot 10^{-4}$
2,15	2	4,3	-0,07	$98 \cdot 10^{-4}$
2,10	2	4,2	-0,12	$288 \cdot 10^{-4}$
Сумма	**20**	**44,41**		$\mathbf{665} \cdot 10^{-4}$
Среднее		**2,22**		$\mathbf{33{,}25} \cdot 10^{-4}$

Выборочное среднее: $\overline{x_в} = 2.22$.

Дисперсия: $d = \dfrac{665 \cdot 10^{-4}}{20} \approx 33,25 \cdot 10^{-4} \approx 0,0033$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = +\sqrt{d} \approx 0.06$.

Коэффициент вариации: $V = \dfrac{\sigma}{\overline{x_в}} \cdot 100\% = \dfrac{0,06}{2,22} \cdot 100\% \approx 2,6\%$, по которому можно судить о плотности результатов.

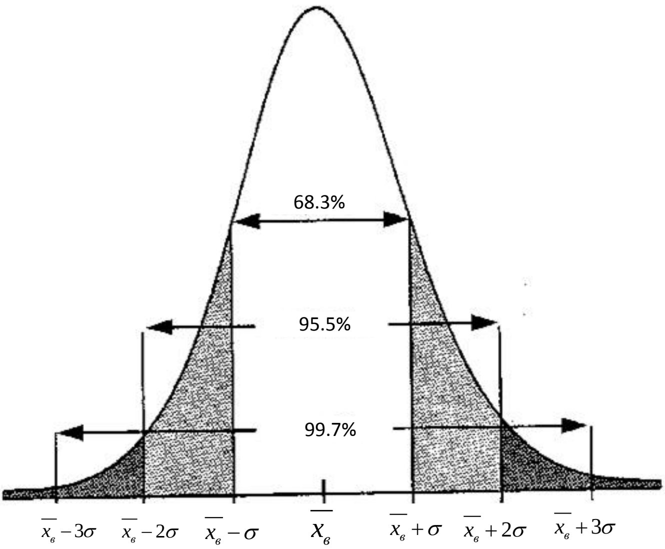
Интервальные оценки параметров

В предыдущих разделах мы рассмотрели вопрос об оценке неизвестного параметра одним числом. Такая оценка называется *точечной*. Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных. Их недостаток заключается в том, что неизвестно, с какой точностью оценивается параметр. Если для выборок большого объема точность обычно бывает достаточной, то для выборок небольшого объема вопрос точности оценок становится очень важным.

В жизни используют понятия доверия и доверительного интервала. Например, когда пытаются спрогнозировать результаты спортивных соревнований, которые зависят не только от спортсменов, но и от погодных условий, то можно сказать, что получается широкий доверительный интервал.

Для того, чтобы доверительный интервал имел числовое выражение, условились, что он равен такому диапазону, в который попадает 95% параметров, то есть, вероятность того, что величина находится вне доверительного интервала меньше 0,05. Все это относится не к выборке, которую мы можем измерить, а к генеральной совокупности, многие из результатов которой нам недоступны.

Если исследуемое распределение близко к нормальному, то для него есть характерное свойство – **правило трех сигм**, которое гласит, что 99,7% результатов попадают в интервал $\left(\overline{x_в} - 3\sigma; \overline{x_в} + 3\sigma\right)$, т.е. практически все значения лежат в этом интервале.



Это так называемый **доверительный интервал**, который мы рассмотрим позднее.

Таким образом, если выборка большая, то можно заявить, что 99,7% значений из всей выборки будет находиться в диапазоне $\left(\overline{x_в} - 3\sigma; \overline{x_в} + 3\sigma\right)$.

А если выборка малого объема, то интуитивно понятно, что будет слишком самонадеянно делать такие же выводы, но, тем не менее, что-то все равно сказать можно. Для этого нужно расширить доверительный интервал.

Введем понятие интервальной оценки неизвестного параметра генеральной совокупности.

Пример 14. Результаты соревнований одиночек в санном спорте среди женщин на зимних Олимпийских играх 2010 представлены в таблице

Место	Спортсмены	1 заезд		2 заезд		3 заезд		4 заезд		Всего
		Результат	Место	Результат	Место	Результат	Место	Результат	Место	
1	Татьяна Хюфнер (GER)	41,760	3	41,481 TR	1	41,666	1	41,617	1	2:46,524
2	Нина Райтмайер (AUT)	41,728 TR	1	41,563	2	41,884	3	41,839	2	2:47,014
3	Натали Гайзенбергер (GER)	41,743	2	41,657	4	41,800	2	41,901	7	2:47,101
4	Татьяна Иванова (RUS)	41,816	6	41,601	3	41,914	5	41,850	3	2:47,181
5	Анке Вишневски (GER)	41,785	5	41,685	5	41,894	4	41,889	5	2:47,253
6	Александра Родионова (RUS)	41,828	7	41,731	7	41,984	8	41,913	8	2:47,456
7	Мартина Кохер (SUI)	42,005	13	41,697	6	41,976	7	41,897	6	2:47,575
8	Эвелина Сташулонек (POL)	41,975	10	41,816	10	41,948	6	41,882	4	2:47,621
9	Майя Тирума (LAT)	41,773	4	41,933	13	42,012	9	41,936	9	2:47,654
10	Наталья Хорева (RUS)	41,932	9	41,785	8	42,175	12	42,092	12	2:47,984

Для одноместных саней проводится четыре заезда, и результат определяется по сумме результатов всех четырех заездов. Определить среднее время заезда.

Решение

Определим среднее время первого заезда (взяв округленные значения):

$$\overline{x_{в1}} = \frac{41.8 + 41.7 + 41.7 + 41.8 + 41.8 + 42 + 42 + 41.8 + 41.9}{10} \approx 41{,}8$$

Затем спортсмены выполнили второй заезд, и вновь можно провести тот же расчет - и так несколько раз.

$\overline{x_{в2}} \approx 41,7$

Легко понять, что каждый раз будут получаться разные числа, то есть результат получается **случайным.** И какое на самом деле среднее время прохождения дистанции, мы определить точно не в состоянии, хотя, конечно, оно есть, и бесконечное количество попыток спортсмены делать не будут.

Лучше сделать допущение, считать, что средняя величина случайная, и использовать понятие доверительного интервала. Да, мы не сможем точно сказать, какой средний результат точно, но зато мы сможем определить, в каком доверительном интервале он находится.

Таким образом, неизвестный параметр попадает в границы интервала $\left(\overline{x_в} - \Delta; \overline{x_в} + \Delta\right)$ с очень высокой вероятностью. Чаще всего такую вероятность выбирают равной 0,95; 0,99 или 0,999. Чтобы определить длину интервала Δ, используют формулу: $\Delta = \sigma \cdot t(N)$. Величина σ – среднее квадратическое отклонение. Значение $t(N)$ определяется по таблице в зависимости от выбранной вероятности p и объема выборки N:

P / ***N***	0,95	0,99	0,999
3	2,92	4,30	9,92
10	2,23	3,17	4,59
20	2,09	2,86	3,88
30	2,05	2,76	3,66
100	1,98	2,63	3,39

Пример 15. Определить величину доверительного интервала для результатов соревнований одиночек в санном спорте среди женщин на зимних Олимпийских играх 2010 из предыдущего примера.

Решение

Пусть $p = 0,95$, и определим параметр t из таблицы: $t(N = 10) = 2,23$.

Найдем среднее квадратическое отклонение:

Результат x_i	$x_i - \overline{x_{в1}}$	$\left(x_i - \overline{x_{в1}}\right)^2$	
41,8	0	0	
41,7	-0,1	0,01	
41,7	-0,1	0,01	
41,8	0	0	
41,8	0	0	
41,8	0	0	
42	0,2	0,04	
42	0,2	0,04	
41,8	0	0	
41,9	0,1	0,01	
41,83		0,01	среднее

$\overline{x1_в} \approx 41{,}8;\ d_в \approx 0{,}01;\ \sigma = +\sqrt{d_в} = +\sqrt{0{,}01} \approx 0{,}1$

Тогда величина доверительного интервала будет равна $\Delta = \sigma \cdot t = 0{,}1 \cdot 2{,}23 \approx 0{,}223$.

Получаем доверительный интервал:

$41{,}83 - 0{,}22 < \overline{x_в} < 41{,}83 + 0{,}22$

$41{,}61 < \overline{x_в} < 42{,}05$

Проверим, попадают ли средние результаты других заездов в этот интервал.

$\overline{x_{в1}} \approx 41{,}7$; $\overline{x_{в3}} \approx 41{,}9$; $\overline{x_{в4}} \approx 41{,}9$.

Все найденные значения попали в доверительный интервал. Значит, среднее время заезда лежит в найденном диапазоне $41{,}61 < \overline{x_в} < 42{,}05$.

Понятие корреляции является одним из основных понятий теории вероятностей и математической статистики, оно было введено Гальтоном и Пирсоном.

В предыдущих примерах мы выбирали для анализа лишь один параметр: дальность прыжка с трамплина, оценка судей, время, потраченное на прохождение стометровки в плавании и т.д. Однако в спорте многие параметры связаны между собой. Так, на оценку судей в прыжках с трамплина влияют и дальность прыжка, и его качество. Установление связей между признаками - наиболее интересная задача при анализе различных спортивных показателей.

При изучении *корреляций* стараются установить, существует ли какая-то связь

- между двумя показателями в одной выборке,
- между двумя различными выборками,

и если эта связь существует, то сопровождается ли увеличение одного показателя

- возрастанием (положительная корреляция),
- уменьшением (отрицательная корреляция) другого.

Коэффициент корреляции

Значение коэффициента корреляции может изменяться в диапазоне от -1 до +1.

Абсолютное значение коэффициента корреляции показывает силу взаимосвязи. Чем меньше его абсолютное значение, тем слабее связь. Если он равен нулю, то связь вообще отсутствует. Чем больше значение модуля коэффициента корреляции, тем сильнее связь и тем меньше разброс в значениях y_i при каждом фиксированном значении x_i.

Знак коэффициента корреляции определяет направленность взаимосвязи: минус – отрицательная, плюс – положительная.

Принята следующая классификация взаимосвязей по значению коэффициента r корреляции:

1	$\lvert r \rvert = 1$	Функциональная зависимость
2	$0,7 \le \lvert r \rvert < 1$	Сильная связь
3	$0,4 \le \lvert r \rvert < 07$	Средняя связь
4	$0,1 \le \lvert r \rvert < 0.4$	Слабая связь
5	$0 < \lvert r \rvert < 0,1$	Очень слабая связь
6	0	Связи нет

Интерпретация коэффициентов корреляции

Хотя корреляция прямо не указывает на причинную связь, она может служить ключом к разгадке причин. При благоприятных условиях на ее основе можно сформулировать гипотезы, проверяемые экспериментально, когда возможен контроль других влияний, помимо тех немногочисленных, которые подлежат исследованию.

Различают два способа вычисления коэффициента корреляции: выборочный коэффициент корреляции (когда происходит сравнение **значений** выборки) и ранговый коэффициент корреляции (когда происходит сравнение **рангов** значений).

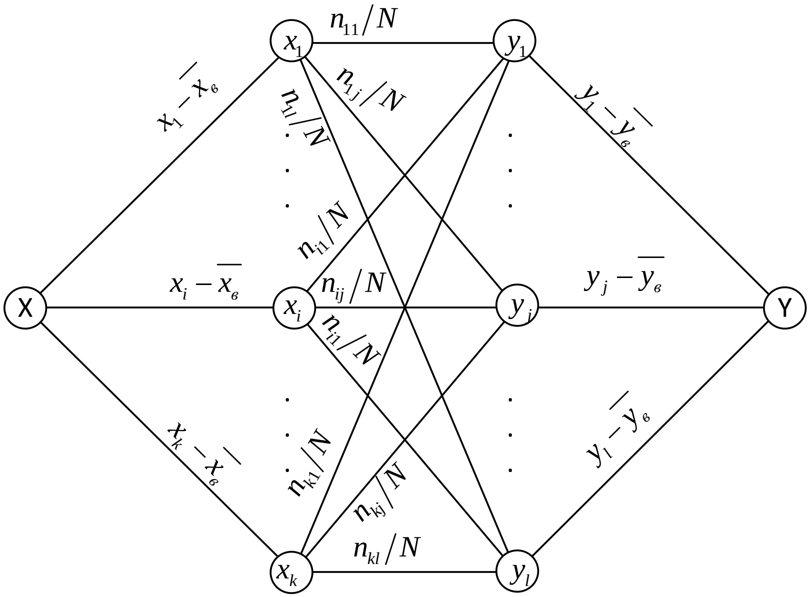
Выборочный коэффициент корреляции Пирсона

Пусть при проведении некоторого опыта наблюдаются две случайные величины *X* и *Y*, причем одно и то же значение *x* встречается n_x раз, *y* встречается n_y, одна и та же пара чисел (x, y) наблюдается n_{xy} раз. Все данные записываются в виде таблицы, которую называют корреляционной.

Выборочная ковариация $Cov(X,Y)$ величин X и Y определяется формулой:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x_в}\right)\left(y_j - \overline{y_в}\right) \cdot n_{xy}}{N}, \text{ где } N = \sum n_{xy} .$$

При небольшом количестве экспериментальных данных ковариацию удобно находить как полный вес ковариационного графа:



Выборочный коэффициент корреляции находится по формуле $r(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$.

Тяжелая атлетика. *Историческая справка.* *Поднятие тяжестей можно отнести к одному из древнейших видов соревнований, имеющих выраженные черты спортивной борьбы. Соревнования по тяжёлой атлетике впервые прошли на летних Олимпийских играх в 1896 в Афинах и с тех пор включались в программу каждых последующих Игр, кроме Игр 1900, 1908 и 1912. Первоначально соревнования были мужскими, женские дисциплины появились на летних олимпийских играх 2000 в Сиднее.*

Интересные факты

Если Геракл являлся известным мифическим силачом Греции, то его реальным «коллегой» был Милон из Кротона

(VI в. до н. э.), который также был знаменитым певцом, видным философом, учеником математика Пифагора, автором трактата «Физика». Это первый спортсмен, про которого доподлинно известно, что он применил существующий и поныне принцип силовых упражнений, а именно принцип трех условий влияния нагрузок: длительности воздействия, непрерывности воздействия и постепенного роста интенсивности воздействия.

По легенде, Милон еще мальчиком начал тренироваться по этому принципу, ежедневно взваливая на плечи теленка. С теленком на плечах атлет шел на стадион, где проделывал один круг. Эти занятия продолжались до тех пор, пока теленок становился быком. По мере того как нарастала масса теленка, увеличивалась мышечная сила атлета, которому приходилось справляться со все большей нагрузкой.

Впервые Милон был допущен к состязаниям на Олимпийских играх в возрасте 14 лет (в 540 г. до н. э.) и уже тогда стал победителем в борьбе. С тех пор на протяжении 20 лет, как утверждает историк Павзаний, он еще шесть раз становился абсолютным победителем на Олимпийских играх. Один из излюбленных трюков Милона при поднятии тяжестей состоял в том, что атлет ставил на голову колесницу с шестью седоками.

Пример 16. Определите, существует ли связь между весом атлета и итоговым результатом, который складывается из двух показателей (рывок и толчок).

Рывок – это упражнение, в котором спортсмен осуществляет подъем штанги над головой одним слитным движением прямо с помоста на полностью выпрямленные руки, одновременно подседая под неё. Затем, удерживая штангу над головой, спортсмен поднимается, полностью выпрямляя ноги.

Толчок – это упражнение, которое состоит из двух раздельных движений. Во время взятия на грудь спортсмен отрывает штангу от помоста, поднимает её на грудь, одновременно подседая, а потом поднимается. Затем он полуприседает и резким движением посылает штангу вверх на прямые руки, одновременно подседая под неё, разбрасывая ноги чуть в стороны или вперед-назад. После фиксирования положения штанги над головой спортсмен выпрямляет ноги, ставя стопы на одном уровне (параллельно), удерживая штангу над головой.

Проанализируем результаты женщин, занявших первые места в различных весовых категориях:

Категория	Призер	Вес	Результат
До 48 кг	Чэнь Сеся	47,46	212
До 53 кг	Прапаведи Джароенраттанатаракун	52,47	221
До 58	Чэнь Яньцин	57,66	244
До 63	Пак Хён Сук	61,8	241
До 69	Лю Чуньхун	68,87	286
До 75	Цао Лэй	73,16	282
От 75	Чан Миран	116,75	326

Решение

Вычислим выборочные средние и средние квадратические отклонения:

$$\overline{x_в} = \frac{47+52+57+61+68+73+116}{7} = \frac{474}{7} \approx 68$$

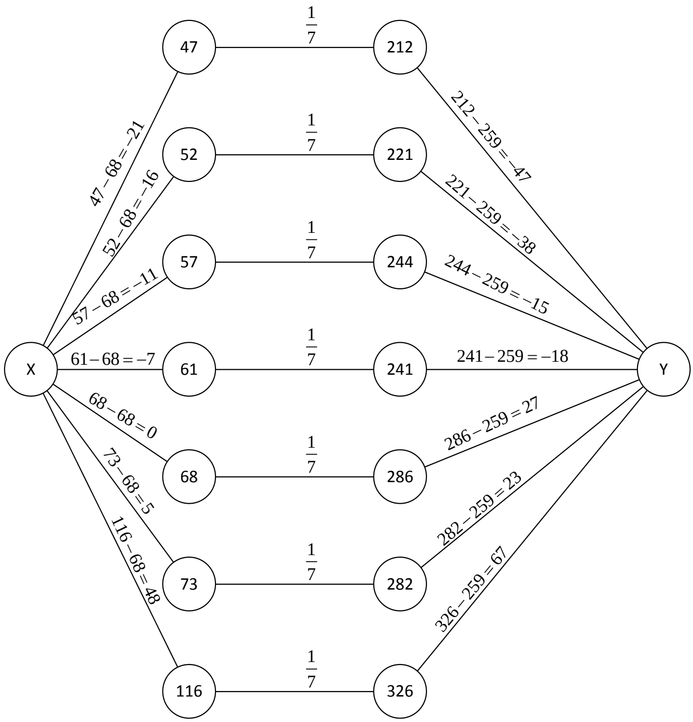
$$\overline{y_в} = \frac{212+221+244+241+286+282+326}{7} = \frac{1812}{7} \approx 259$$

Вычислим дисперсии и средние квадратические отклонения:

$$d(x) = \frac{\sum\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2}{N} = \frac{3196}{7} = 456,57;\ \ \sigma(x) = +\sqrt{d(x)} = +\sqrt{456,57} \approx 21$$

$$d(y) = \frac{\sum\left(y_i - \overline{y_в}\right)^2}{N} = \frac{9949}{7} = 1421,28;\ \ \sigma(y) = +\sqrt{d(y)} = +\sqrt{1421,28} \approx 37,7$$

Построим ковариационный граф и определим по нему ковариацию:



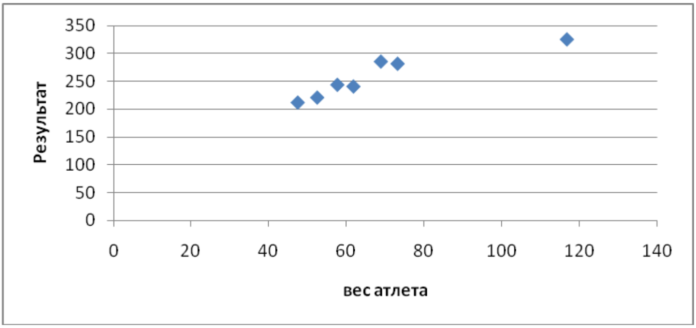
$$Cov(X,Y)=\frac{\sum\left(x_i-\overline{x_в}\right)\left(y_i-\overline{y_в}\right)}{N}=\frac{5217}{7}\approx 745.3$$

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{745.3}{21\cdot 37.7}\approx 0.94\,.$$

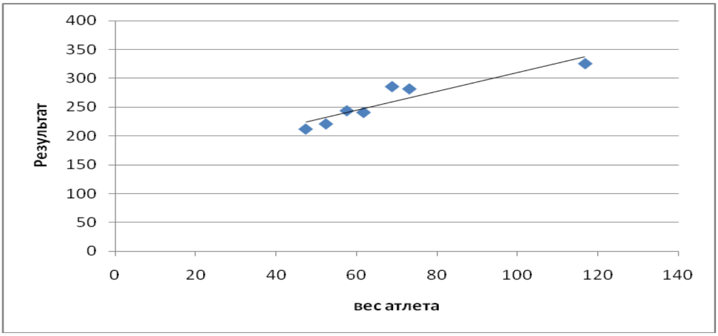
Таким образом, связь между весом атлета и результатом получилась прямая сильная.

По исходным данным (табличная зависимость) можно построить корреляционное поле:



По табличной зависимости и расположению точек можно определить корреляционную зависимость. Она может быть линейной и криволинейной.

В данном случае точки лежат близко к одной прямой, значит, мы можем построить линейную корреляционную зависимость.



В случае линейной корреляционной зависимости уравнение прямой имеет вид:

$$y-\overline{y_в}=r\left(X,Y\right)\cdot\frac{\sigma\left(Y\right)}{\sigma\left(X\right)}\left(x-\overline{x_в}\right).$$

Для примера, рассмотренного выше можем определить уравнение прямой:

$$y-259=0,94\cdot\frac{37,7}{21}\left(x-68\right)$$

$$y=1,7x+144$$

Предсказание результатов

Прыжки с шестом. Историческая справка. *Прыжок с шестом среди мужчин является олимпийским видом спорта с Первой летней Олимпиады 1896 года, среди женщин – с Олимпийских игр 2000 года в Сиднее. Соревнования в прыжке с шестом одни из самых длительных в легкоатлетических секторах и иногда затягиваются на много часов. В последнее время рассматриваются альтернативные варианты правил, при которых спортсменам (как в тяжёлой атлетике) даётся фиксированное количество попыток на все соревнования.*

Интересные факты

Прыжки с шестом - единственный вид среди официальных дисциплин IAAF (международная ассоциация легкоатлетических федераций), в котором мировой рекорд в зимнем сезоне выше, чем в летнем.

В 1904 году японец Савао Фуни, в первый раз принимающий участие в Летних Олимпийских играх, участвовал в соревнованиях по прыжкам с шестом. Он считал, что суть этого вида в том, чтобы взобраться по шесту и перелететь через планку. Атлет подготовил шест, который был прочнее, чем у других участников, поставил его в песок перед планкой, вскарабкался по нему и «взял высоту», преодолев планку. После того, как организаторы Игр объяснили японцу, что перед прыжком нужно разбежаться, он пробежался по дорожке и повторил свою ошибку. Последующие попытки объяснить атлету правила прыжка также были безуспешны. Савао Фуни дисквалифицировали и результат не засчитали. Спортсмен решил, что судьи предъявляют ему претензии из-за азиатского происхождения, а в японских газетах появились сообщения о несправедливом судействе. В результате в правила были внесены уточнения, отныне запрещалось перехватывать шест руками.

Пример 17. Построить прямую регрессии мировых рекордов по прыжкам с шестом от соответствующего года, если нам известна динамика результатов.

Год	**Место проведения**	**Спортсмен**	**Результат**
1912	Стокгольм	Гарри Бебкок (США)	3,95
1936	Берлин	Эрл Мидоуз (США)	4,35
1972	Мюнхен	Волфганг Нордвик (ГДР)	5,50
1980	Москва	Владислав Казакевич (Польша)	5,78
1988	Сеул	Сергей Бубка (СССР)	5,90
1994	Сестриере	Сергей Бубка (Украина)	6,14

Любители легкой атлетики ведут оживленную дискуссию о рекордах, поставленных в вертикальных прыжках, особенно в прыжках с шестом. Ведь в этих дисциплинах спортсмены могут прибавлять по 1 см к своим предыдущим достижениям, чего невозможно сделать в других дисциплинах. Невозможно не упомянуть легендарного Сергея Бубку, который является рекордсменом по количеству установленных рекордов. На его счету 35 мировых рекордов в период с 1984 по 1994 г.

Решение

1)Запишем в таблицу соответствие результатов некоторых мировых рекордов по прыжкам с шестом и годы их установления.

$X = \{год\ рекорда\}$	(19)12	36	72	80	88	94
$Y = \{высота\ рекорда\}$	395	435	550	578	590	614

$$\overline{x_в} = \frac{12+36+72+80+88+94}{6} = \frac{382}{6} \approx 64$$

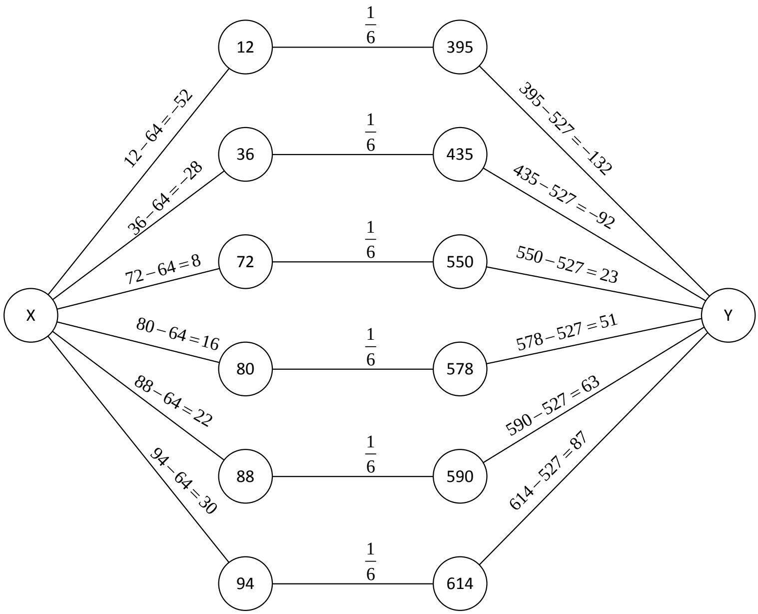
$$\overline{y_в} = \frac{395+435+550+578+590+614}{6} = \frac{3162}{6} = 527\,(см)$$

Вычислим дисперсии и средние квадратические отклонения:

$$d(x)=\frac{\sum\left(x_i-\overline{x_в}\right)^2}{N}=\frac{5284}{6}\approx 880;\ \sigma(x)=+\sqrt{d(x)}\approx 30$$

$$d(y)=\frac{\sum\left(y_i-\overline{y_в}\right)^2}{N}=\frac{40556}{6}=6759;\ \sigma(y)=+\sqrt{d(y)}\approx 82$$

Вычислим ковариацию по ковариационному графу:



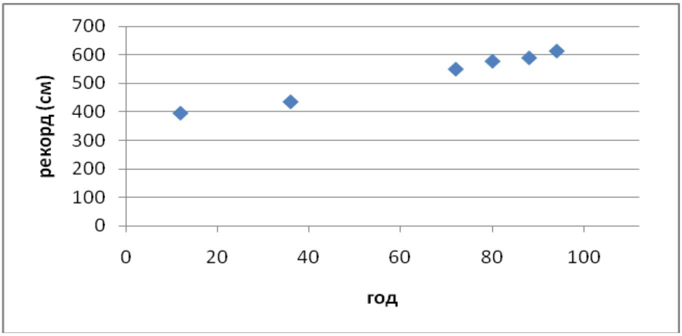
$$Cov(X,Y)=\frac{\sum\left(x_i-\overline{x_в}\right)\left(y_i-\overline{y_в}\right)}{N}=\frac{14562}{6}=2427$$

Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{2427}{30\cdot 82}\approx 0,98\,.$$

Таким образом, связь между годом установления мирового рекорда и результатом получилась прямая сильная.

Изобразим корреляционное поле и построим уравнение корреляционной зависимости:



По корреляционному полю видно, что результаты располагаются вблизи прямой. Определим коэффициенты этой прямой:

$$y-\overline{y_в}=r(X,Y)\cdot\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}\left(x-\overline{x_в}\right).$$

Для примера, рассмотренного выше, можем определить уравнение прямой:

$$y-527=0,98\cdot\frac{82}{30}(x-64)$$

$$y=2,7x+354$$

По полученной прямой регрессии можно на вероятностном языке предсказывать уровень мировых рекордов по прыжкам с шестом, так на Олимпийских играх в 2012 г. $(x=112)$ получаем ожидаемый прыжок на 6 м 56 см.

$$y(112)=2.7\cdot112+354\approx656.$$

Ранговая корреляция

Пусть объекты генеральной совокупности обладают двумя качественными признаками, и выборка объема *n* содержит независимые объекты, которые будем располагать (ранжировать) в порядке ухудшения (или улучшения) качества. Для оценки степени связи признаков вводят коэффициенты ранговой корреляции Спирмена и Кендалла. Рассматривая ранги $x_1, x_2, ..., x_n$ как возможные значения случайной величины *X*, а $y_1, y_2, ..., y_n$ – как возможные значения случайной величины *Y*, можно вычислить выборочный коэффициент корреляции.

Выборочный коэффициент корреляции Спирмена вычисляется по формуле: $r_s = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d_i^2}{(N-1) \cdot N \cdot (N+1)}$, где d_i – разность рангов.

Выборочный коэффициент ранговой корреляции Кендалла вычисляется по формуле $r_K = \frac{4R}{N \cdot (N-1)} - 1$, где $R = R_1 + R_2 + ... + R_{N-1}$, R_i – число рангов $y_{i+1}, ..., y_N$, *больших* y_i.

Фигурное катание. Историческая справка. *Историки заглядывают в очень далекое прошлое, чтобы найти истоки фигурного катания. Самые древние коньки были обнаружены на берегу Южного Буга, недалеко от Одессы, датированные периодом бронзового века. Такие коньки, по всей видимости, изготавливались из фаланги передних ног лошадей. Подобные костяные коньки были найдены при археологических раскопках на территории многих стран Европы. Конечно, обладатели костяных коньков не могли заложить основы будущего фигурного катания. Для этого должны были появиться совсем другие коньки – из железа.*

Считается, что родиной фигурного катания является Голландия. Именно там в XIII – XIV веках появились первые железные коньки. Появление коньков нового типа дало мощный *толчок развитию фигурного катания, которое в то время заключалось в умении вычерчивать на льду замысловатые фигуры и сохранять при этом красивую позу.*

В 1908 году соревнования фигуристов впервые были включены в программу летних Олимпийских игр в Лондоне. Первыми олимпийскими чемпионами в одиночном катании в 1908 стали М. Сайерс (Великобритания), У. Сальхов (Швеция), Панин-Коломенкин (Россия) и спортивная пара А. Хюблер — Г. Бюргер (Германия). Фигурное катание на коньках вошло и в программу летних Олимпийских игр в Антверпене (1920).

С 1924 года фигурное катание на коньках включено в программу зимних Олимпийских игр. Спортивные танцы на льду включены в программу зимних Олимпийских игр с 1976 года.

Пример 18. В таблице приведены результаты соревнований по одиночному фигурному катанию среди мужчин. Определите, насколько согласованы результаты (места) по разным видам программ: короткая и произвольная.

Место	Спортсмены	Короткая программа		Произвольная программа		Всего
		Результат	Место	Результат	Место	
1	Эван Лайсачек (USA)	90,30	2	167,37	1	257,67
2	Евгений Плющенко (RUS)	90,85	1	165.51	2	256,36
3	Дайсукэ Такахаси (JPN)	90,25	3	156,98	5	247,23
4	Стефан Ламбьель (SUI)	84,63	5	162,09	3	246,72
5	Патрик Чан (CAN)	81,12	7	160,30	4	241,42
6	Джонни Вейр (USA)	82,10	6	156,77	6	238.87
7	Нобунари Ода (JPN)	84.85	4	153,69	7	238,54
8	Такахико Кодзука (JPN)	79,59	8	151,60	8	231,19
9	Джереми Эбботт (USA)	69,40	15	149,56	9	218,96
10	Михал Бржезина (CZE)	78,80	9	137,93	11	216,73
11	Денис Тен (KAZ)	76,24	10	135,01	14	211.25
12	Флоран Амодьо (FRA)	75,35	11	134,95	15	210,30
13	Артём Бородулин (RUS)	72,24	13	137,92	12	210,16
14	Хавьер Фернандес (ESP)	68,69	16	137,99	10	206,68
15	Адриан Шультхайсс (SWE)	63,13	22	137,31	13	200,44
16	Бриан Жубер (FRA)	68,00	18	132,22	16	200,22
17	Кевин ван дер Перрен (BEL)	72,90	12	116,94	18	189,84
18	Самуэль Контести (ITA)	70,60	14	116,90	19	187,50
19	Томаш Вернер (CZE)	65,32	19	119,42	17	184,74
20	Паоло Баккини (ITA)	64,42	20	112,79	22	177,21
21	Виктор Пфайфер (AUT)	60,88	23	115,05	20	175,93
22	Штефан Линдеманн (GER)	68,50	17	103,48	23	171,98
23	Вон Шипер (CAN)	57,22	24	113,70	21	170,92
24	Антон Ковалевский (UKR)	63,81	21	102,09	24	165,90

В произвольную программу проходят первые 24 по итогам короткой программы, поэтому и в таблице приведены результаты спортсменов, которые участвовали и в короткой и в произвольной программе.

Решение

1. Вычислим коэффициент ранговой корреляции Спирмена:

Короткая программа	2	1	3	5	7	6	4	8	
Произвольная программа	1	2	5	3	4	6	7	8	
Разность рангов d_i^2	1	1	4	4	9	0	9	0	28

Продолжение таблицы

Короткая программа	15	9	10	11	13	16	22	18	
Произвольная программа	9	11	14	15	12	10	13	16	
Разность рангов d_i^2	36	4	16	16	1	36	81	4	194

Продолжение таблицы

Короткая программа	12	14	19	20	23	17	24	21	
Произвольная программа	18	19	17	22	20	23	21	24	
Разность рангов d_i^2	36	25	4	4	9	36	9	9	132

$$r_s = 1 - 6 \cdot \frac{\sum d_i^2}{(N-1)\cdot N \cdot (N+1)} = 1 - 6 \cdot \frac{28 + 194 + 132}{23 \cdot 24 \cdot 25} =$$

$$= 1 - \frac{354}{2300} \approx 1 - 0.15 \approx 0.85$$

Вывод: связь между результатами в короткой и произвольной программе сильная прямая.

2. Вычислим коэффициент корреляции Кендалла. Для этого упорядочим все исходные данные по результатам в короткой программе:

Короткая программа	Произвольная программа	R_i		Короткая программа	Произвольная программа	R_i
1	2	22		13	12	8
2	1	22		14	19	7
3	5	20		15	9	7
4	7	18		16	10	6
5	3	18		17	23	4
6	6	17		18	16	4
7	4	17		19	17	4
8	8	16		20	22	2
9	11	14		21	24	0
10	14	12		22	13	0
11	15	11		23	20	0
12	18	9		24	21	0

$$r_K = \frac{4R}{N \cdot (N-1)} - 1 = \frac{4 \cdot 238}{24 \cdot 23} - 1 \approx 0.72$$

Обычно коэффициент Кендалла несколько меньше коэффициента Спирмена, чаще всего они связаны соотношением $r_K \approx \frac{2}{3} r_S$.

В предыдущем примере мы рассматривали ранги значений в соответствии с местами, но довольно часто случается, что результаты совпадают у нескольких спортсменов. Как тогда ранжировать данные?

Правила ранжирования

1. Меньшему значению начисляется меньший ранг. Наименьшему значению начисляется ранг 1. Наибольшему значению начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых значений. Например, если $n = 7$, то наибольшее значение получит ранг 7, за возможным исключением для тех случаев, которые предусмотрены правилом 2.

2. В случае, если несколько значений равны, им начисляется ранг, представляющий собой среднее значение тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны. Например, три наименьших значения равны 10 сек. Если бы мы измеряли время более точно, то эти значения могли бы различаться и составляли бы, скажем, 10,2 сек; 10,5 сек; 10,7 сек. В этом случае они получили бы ранги, соответственно, 1, 2 и 3. Но поскольку все полученные значения равны, каждое из них получает средний ранг: $\frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$. Допустим, следующие 2 значения равны 12 сек. Они должны были бы получить ранги 4 и 5, но, поскольку они равны, то получают средний ранг: $\frac{4+5}{2} = 4,5$ и т.д.

3. Общая сумма рангов должна совпадать с расчетной, которая определяется по формуле: $\sum(R_i) = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$, где N – общее количество ранжируемых наблюдений (значений). Несовпадение реальной и расчетной сумм рангов будет свидетельствовать об ошибке, допущенной при начислении рангов или их суммировании. Прежде чем продолжить работу, необходимо найти ошибку и устранить ее.

Здесь следует учитывать, что наименьший результат, выраженный в секундах, действительно имеет меньший ранг, и он лучший, но результат, например, в количестве голов или очков, или подъеме большего веса, может также иметь наименьший ранг, но быть худшим.

Результативность в биатлоне

Биатлон. Историческая справка. *Биатлон (от лат. Bis — дважды и греч. attlon — состязание, борьба) – зимнее двоеборье, состоящее из лыжных гонок с оружием на установленные дистанции и стрельбы по мишеням из положения лежа и стоя на огневых рубежах из малокалиберной винтовки (в 1960-1976 — из карабина).*

Биатлон возник в результате соревнований, связанных с гонками на лыжах и стрельбой, проводимых на протяжении многих лет в нашей стране и за рубежом. Первые соревнования в передвижении на лыжах со стрельбой были проведены в 1767 в Норвегии. В числе трех номеров программы 2 приза предусматривались для лыжников, которые во время спуска со склона средней крутизны попадут из ружья в определенную цель на расстоянии 40-50 шагов.

Несмотря на столь раннее зарождение, биатлон не получил распространения в других странах.

В 1924 эти гонки были включены в программу первых зимних Олимпийских игр в качестве показательной дисциплины. Подобные выступления были также представлены на зимних Олимпийских играх 1928, 1936 и 1948. Но затем – в связи с малым числом стран-участниц и отсутствием унифицированных правил – были исключены из программы Олимпиад.

День рождения биатлона был официально провозглашен 2 марта 1958 на первом чемпионате мира в Австрии. Вначале программа биатлонистов на чемпионатах страны, мира и Олимпийских играх включала один вид – лыжная гонка на 20 км со стрельбой из боевого оружия (калибр 5,6; 6,5 и 7,62 мм) на четырех огневых рубежах с пятью выстрелами на каждом из них. С 1968 на Олимпийских играх программу расширили введением эстафеты 4х7,5 км, а затем в 1974 на чемпионате мира и *на Олимпийских играх в Лейк-Плэсиде (1980) ввели спринтерские гонки на 10 км.*

В современном биатлоне различают следующие дисциплины:

1 . Спринт

У мужчин 10 км, у женщин 7,5 км. На дистанции спортсмены должны поразить по 5 мишеней на двух огневых рубежах, за каждый промах спортсмен бежит 150-метровый штрафной круг. 60 спортсменов, первыми пришедшие к финишу, принимают участие в гонке преследования. Время отставания идет в зачет в гонке преследования.

2. Гонка преследования

У мужчин 12,5 км, у женщин 10 км. Спортсмены стартуют согласно времени, показанному в спринте. На огневом рубеже спортсмены останавливаются четыре раза и должны поразить по пять мишеней, за каждый промах спортсмен должен пробежать 150-метровый штрафной круг.

3. Индивидуальная гонка

У мужчин 20 км, у женщин 15 км. Спортсмены четырежды останавливаются на огневых рубежах, за каждый промах к общему времени спортсмена прибавляется по минуте.

4. Эстафета

Команда состоит из четырех участников, каждый из которых должен пробежать 10 км у мужчин и 7,5 км у женщин и два раза поразить по пять мишеней (у каждого спортсмена есть по три запасных патрона на каждую стрельбу), за каждую непораженную мишень спортсмен бежит 150-метровый штрафной круг.

Главная сложность биатлона заключается в синтезе двух, по сути, совершенно разных видов спорта: это бег на лыжах и стрельба из малокалиберной винтовки по мишени диаметром 45 или 115 миллиметров. В мире найдется немало людей, которых можно назвать мастерами в этих видах спорта по отдельности. Но вот объединить их вместе сможет далеко не каждый спортсмен.

Изначально отбор биатлонистов ведется все же по их скоростным качествам. Ведь обучить не владеющего техникой «конькового» хода стрелка до должного уровня гораздо сложнее, чем научить лыжника неплохо стрелять. Именно поэтому многие нынешние звезды биатлона вышли из лыжных гонок.

Успешное выступление на соревнованиях по биатлону зависит от:

– высокой скорости на дистанции,
– меткости стрельбы,
– экономии времени пребывания на огневых рубежах.

Указанные факторы являются определяющими для дальнейшего изыскания возможностей повышения мастерства в данном виде спорта.

От чего зависит победа для сборных разных стран

Пример 19. Рассмотрим индивидуальную мужскую гонку в биатлоне на Олимпийских играх в 2010 году. Определим для основных команд параметры, которые наиболее сильно влияют на итоговый результат.

Спортсмены сборной России:

Биатлонист	Место	Стартовый номер	Чистое время бега	Время стрельбы	Количество промахов
Устюгов Евгений	4	6	44:36,6	02:15,0	1
Круглов Николай	11	72	47:11,6	01:50,0	0
Черезов Иван	15	28	44:35,9	01:57,0	3
Шипулин Антон	36	51	46:17,6	02:10,0	3

Спортсмены сборной Норвегии:

Биатлонист	Место	Стартовый номер	Чистое время бега	Время стрельбы	Количество промахов
SVENDSEN Emil Hegle	1	5	44:14,2	01:44,0	1
BJOERNDALEN Ole Einar	2	12	43:35,2	01:38,0	2
BOE Tarjei	21	65	45:37,3	01:47,0	3
OS Alexander	28	56	45:43,2	01:58,0	3

Решение

Вычислим коэффициенты корреляции между всеми признаками, используя коэффициент корреляции Спирмена.

Проранжируем значения. Так как количество промахов у двух биатлонистов одинаковое, то этим значениям присваивается одинаковый ранг.

Биатлонист	Место (1)		Стартовый номер (2)		Чистое время бега (3)		Время стрельбы (4)		Количество промахов (5)	
Устюгов Евгений	4	1	6	1	44:36,6	2	02:15,0	4	1	2
Круглов Николай	11	2	72	4	47:11,6	4	01:50,0	1	0	1
Черезов Иван	15	3	28	2	44:35,9	1	01:57,0	2	3	3,5
Шипулин Антон	36	4	51	3	46:17,6	3	02:10,0	3	3	3,5
Сумма рангов		**10**		**10**		**10**		**10**		**10**

Проверим правильность ранжирования. Для этого вычислим суммы рангов по каждому параметру и сравним их с расчетной: $\frac{N\cdot(N+1)}{2}=\frac{4\cdot(4+1)}{2}=10$.

Определим коэффициент ранговой корреляции Спирмена, устанавливающий связь между местом и стартовым номером:

Биатлонист	Место		Стартовый номер		d_i^2
Устюгов Евгений	4	1	6	1	0
Круглов Николай	11	2	72	4	4
Черезов Иван	15	3	28	2	1
Шипулин Антон	36	4	51	3	1
Сумма рангов		**10**		**10**	**6**

$$r_s=1-6\cdot\frac{\sum d_i^2}{(N-1)\cdot N\cdot(N+1)}=1-6\cdot\frac{6}{3\cdot4\cdot5}=1-0.6=0.4$$

Аналогично вычислим коэффициент ранговой корреляции между остальными параметрами:

Биатлонист	$d_i^2\,(1,2)$	$d_i^2\,(1,3)$	$d_i^2\,(1,4)$	$d_i^2\,(1,5)$
Устюгов Евгений	0	1	9	1
Круглов Николай	4	4	1	1
Черезов Иван	1	4	1	0,25
Шипулин Антон	1	1	1	0,25
Сумма рангов	**6**	**10**	**12**	**2,5**

$$r_s\,(\textit{место, старт №})=1-6\cdot\frac{6}{3\cdot4\cdot5}=0.4$$

$$r_s\,(\textit{место, время бега})=1-6\cdot\frac{10}{3\cdot4\cdot5}=0$$

$$r_s\,(\textit{место, время стрельбы})=1-6\cdot\frac{12}{3\cdot4\cdot5}=-0,2$$

$$r_s\,(\textit{место, кол}-\textit{во промахов})=1-6\cdot\frac{2,5}{3\cdot4\cdot5}=0,75$$

Таким образом, получилось, что самая тесная связь между результатом и количеством промахов $r_s = 0.75$. А вот что интересно: связи между местом и чистым временем бега вообще нет.

Интересные факты. *Первым олимпийским чемпионом по биатлону стал шведский спортсмен К. Лестандер при невысоком результате гонки (1:33.21) и отличной стрельбе: 20 попаданий из 20. Отличная стрельба являлась в то время основным критерием, определяющим конечный результат соревнования.* Но это было давно, теперь все биатлонисты научились и метко стрелять и быстро ездить, поэтому успех зависит только от всех параметров вместе.

Сравним теперь выступление спортсменов Норвегии. Проранжируем исходные данные.

Биатлонист	Место		Стартовый номер		Чистое время бега		Время стрельбы		Количество промахов	
SVENDSEN Emil Hegle	1	1	5	1	44:14,2	2	01:44,0	2	1	1
BJOERNDALEN Ole Einar	2	2	12	2	43:35,2	1	01:38,0	1	2	2
BOE Tarjei	21	3	65	4	45:37,3	3	01:47,0	3	3	3,5
OS Alexander	28	4	56	3	45:43,2	4	01:58,0	4	3	3,5

Вычислим ранговые коэффициенты корреляции:

Биатлонист	$d_i^2(1,2)$	$d_i^2(1,3)$	$d_i^2(1,4)$	$d_i^2(1,5)$
SVENDSEN Emil Hegle	0	1	1	0
BJOERNDALEN Ole Einar	0	1	1	0
BOE Tarjei	1	0	0	0,25
OS Alexander	1	0	0	0,25
Сумма рангов	**2**	**2**	**2**	**0,5**

$$r_s\left(\textit{место, старт №}\right) = 1 - 6 \cdot \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 0.8$$

$$r_s\left(\textit{место, время бега}\right) = 1 - 6 \cdot \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 0.8$$

$$r_s\left(\textit{место, время стрельбы}\right) = 1 - 6 \cdot \frac{2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 0,8$$

$$r_s\left(\textit{место, кол} - \textit{во промахов}\right) = 1 - 6 \cdot \frac{0,5}{3 \cdot 4 \cdot 5} = 0,95$$

У биатлонистов сборной Норвегии каждый параметр тесно связан с итоговым результатом. Именно поэтому у них и 2 призовых места.

Множественная корреляция

В предыдущем разделе мы исследовали влияние нескольких факторов на результат. В частности, на результаты биатлонных гонок могут оказывать влияние стартовая позиция, беговые качества спортсмена и его стрельба.

Также не нужно забывать, что и между этими параметрами существует связь: так, например, чем позднее стартовый номер, тем по более разбитой трассе приходится бежать, и, как следствие, на это требуется больше времени. Чем быстрее спортсмен преодолевает дистанцию, тем тяжелее ему хорошо отстреляться, и так далее.

В том случае, если исследуется связь между несколькими признаками, то корреляцию называют множественной, и она задается всеми коэффициентами $r_{i,j}$ парных корреляций, которые записывают в таблицу:

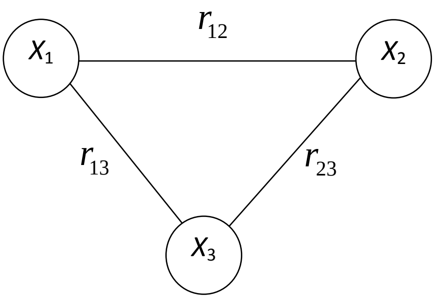
	1 фактор	2 фактор	3 фактор	…
1 фактор	r_{11}	r_{12}	r_{13}	
2 фактор	r_{21}	r_{22}	r_{23}	
3 фактор	r_{13}	r_{23}	r_{33}	
…				

Коэффициент r_{11} – устанавливает наличие связи ряда с самим собой. Связь явно присутствует $r_{11} = 1 - \dfrac{6\sum d_i^{\,2}}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = 1 - \dfrac{6\cdot 0}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)} = 1$. Аналогично и для других диагональных коэффициентов $r_{ii} = 1$.

Коэффициенты r_{12}, r_{21} – устанавливают связь между 1 и 2 факторами, соответственно, $r_{12} = r_{21}$. Аналогично и для других коэффициентов $r_{ij} = r_{ji}$. Таким образом, для выявления связей между всеми возможными факторами формируем корреляционную матрицу:

$$
(r) = \begin{pmatrix}
1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1n} \\
 & 1 & r_{23} & \dots & r_{2n} \\
 & & 1 & \dots & r_{3n} \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Множественную корреляцию удобно еще иллюстрировать и в виде корреляционного графа, который для трех случайных величин, например, выглядит следующим образом:



Составим корреляционную матрицу для биатлонистов нашей сборной и сборной Норвегии.

Сборная России:

$$(r)=\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)\end{array}\\ \begin{array}{r}\textit{место}\,(1)\\ \textit{старт №}\,(2)\\ \textit{время бега}\,(3)\\ \textit{время стрельбы}\,(4)\\ \textit{промахи}\,(5)\end{array} & \begin{pmatrix}1&0,4&0&-0,2&0,75\\ &1&0,8&-0,8&-0,25\\ &&1&-0,4&-0,55\\ &&&1&0,35\\ &&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Сборная Норвегии:

$$(r)=\begin{array}{rc} & \begin{array}{ccccc}(1)&(2)&(3)&(4)&(5)\end{array}\\ \begin{array}{r}\textit{место}\,(1)\\ \textit{старт №}\,(2)\\ \textit{время бега}\,(3)\\ \textit{время стрельбы}\,(4)\\ \textit{промахи}\,(5)\end{array} & \begin{pmatrix}1&0,8&0,8&0,8&0,95\\ &1&0,6&0,6&0,95\\ &&1&1&0,75\\ &&&1&0,75\\ &&&&1\end{pmatrix}\end{array}$$

Проанализируем результаты, показанные спортсменами в различных дисциплинах летних и зимних Олимпийских игр.

Прыжки на батуте. Историческая справка. *Сначала были эскимосы, которые использовали шкуры моржей для подбрасывания людей, англичане, использовавшие для этого одеяла. Видимо, эти игры и можно считать родоначальниками прыжков на батуте.*

Индейцы команчи использовали, что-то напоминающее батут, в середине XIX века. Цирковые акробаты используют батут в своих представлениях на протяжении вот уже 200 лет. Уже в конце позапрошлого века они могли выполнять двойные и тройные сальто.

В 50-х годах батут стал использоваться при подготовке летчиков, а затем и американских астронавтов и советских космонавтов для обучения ориентации в пространстве.

Первый национальный чемпионат был проведен в Великобритании в 1958 году. 6 лет спустя в Лондоне состоялся уже первый Чемпионат мира. В следующем 1965 году Международная федерация прыжков на батуте добилась признания ее управляющей организацией, и этот вид спорта стал укреплять свои позиции среди других видов. Стали постоянно проводиться Чемпионаты Европы и мира. В программе Олимпийских игр с 2000 года (XXVII Олимпиада, Сидней, Австралия).

Каждое выступление оценивают семь судей. Пятеро из них оценивают, насколько хорошо спортсмены выполняют различные приемы, которые составляют выступления. Двое судей оценивают степень сложности для различных исполняемых элементов. Двое судей «по сложности» работают вместе, производя единый рейтинг оценки сложности. У судей «по исполнению» наивысшая и наинизшая оценки не используются, и остающиеся 3 оценки складываются вместе. Рейтинг оценки сложности и суммарный результат по исполнению затем суммируются вместе для получения окончательного результата гимнаста.

Пример 20. В таблице содержатся результаты финальных соревнований у мужчин по прыжкам на батуте на летних Олимпийских играх 2008 года. Найдите матрицу ранговой корреляции Спирмена и пару арбитров «по исполнению», оценки которых наиболее согласуются.

Место	Спортсмен						Трудность	Штраф	Результат
1	Лю Чуньлун	8.3	8.2	8.1	8.3	8.3	16.2	-	**41.00**
2	Джейсон Бёрнетт	7.9	8.0	7.9	8.0	8.1	16.8	-	**40.70**
3	Дун Дун	8.2	8.2	8.0	8.0	8.3	16.2	-	**40.60**
4	Сотомура Тэцуя	8.0	8.1	8.1	8.0	8.1	15.6	-	**39.80**
5	Юрий Никитин	7.8	7.9	8.0	7.9	7.8	16.2	-	**39.80**
6	Дмитрий Ушаков	7.7	7.6	8.0	7.4	7.5	16.0	-	**38.80**
7	Александр Русаков	7.5	7.5	7.2	7.3	7.7	16.2	-	**38.50**
8	Николай Казак	7.1	7.2	7.4	7.6	7.5	16.0	-	**38.10**

Решение

Используя коэффициент ранговой корреляции Спирмена, оценим степень согласованности арбитров:

№	Испа-ния (1)		Швеция (2)		Нидерланды (3)		Польша (4)		Франция (5)	
	оценка	Ранг	оценка	ранг	оценка	ранг	оценка	ранг	оценка	ранг
1	8,3	1	8,2	1,5	8,1	1,5	8,3	1	8,3	1,5
2	7,9	4	8,0	4	7,9	6	8,0	3	8,1	3,5
3	8,2	2	8,2	1,5	8,0	4	8,0	3	8,3	1,5
4	8,0	3	8,1	3	8,1	1,5	8,0	3	8,1	3,5
5	7,8	5	7,9	5	8,0	4	7,9	5	7,8	5
6	7,7	6	7,6	6	8,0	4	7,4	7	7,5	7,5
7	7,5	7	7,5	7	7,2	8	7,3	8	7,7	6
8	7,1	8	7,2	8	7,4	7	7,6	6	7,5	7,5

№	$d_{1,2}^{\ 2}$	$d_{1,3}^{\ 2}$	$d_{1,4}^{\ 2}$	$d_{1,5}^{\ 2}$	$d_{2,3}^{\ 2}$	$d_{2,4}^{\ 2}$	$d_{2,5}^{\ 2}$	$d_{3,4}^{\ 2}$	$d_{3,5}^{\ 2}$	$d_{4,5}^{\ 2}$
1	0,25	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25	0	0,25
2	0	4	1	0,25	4	1	0,25	9	6,25	0,25
3	0,25	4	1	0,25	6,25	2,25	0	1	6,25	2,25
4	0	2,25	0	0,25	2,25	0	0,25	2,25	4	0,25
5	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
6	0	4	1	2,25	4	1	2,25	9	12,25	0,25
7	0	1	1	1	1	1	1	0	4	4
8	0	1	4	0,25	1	4	0,25	1	0,25	2,25
Сумма	**0,5**	**17,5**	**8**	**4,5**	**19,5**	**9,5**	**4**	**23,5**	**34**	**9,5**

$$r_{1,2} = 1 - 6\frac{0,5}{7 \cdot 8 \cdot 9} = 1 - \frac{0,5}{84} \approx 0,994$$

$$(r) = \begin{array}{r} \\ \textit{Испания}\,(1) \\ \textit{Швеция}\,(2) \\ \textit{Нидерланды}\,(3) \\ \textit{Польша}\,(4) \\ \textit{Франция}\,(5) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0,994 & 0,792 & 0,905 & 0,946 \\ & 1 & 0,768 & 0,887 & 0,952 \\ & & 1 & 0,720 & 0,595 \\ & & & 1 & 0,887 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Как видно из корреляционной матрицы, хуже всего согласуются оценки арбитра из Нидерландов, причем с каждым из остальных четырех арбитров.

Сильнее всего согласуются оценки арбитров Испании и Швеции $(r) = 0,994$.

Скелетон. Историческая справка. *Спортивный скелетон – один из наиболее интересных, но в то же время не очень распространенный вид спорта.*

Прародителем скелетона считается спуск с гор на тобоггане – бесполозных деревянных санях, распространённых среди канадских индейцев. В литературе его появление относят к XVI веку. Сведения о спортивных состязаниях саночников датируются серединой XIX века, когда британские туристы в Швейцарских Альпах начали спускаться на санях по заснеженным горным склонам.

История скелетона не сильно велика. Хотя сани были придуманы ещё до Деда Мороза, а вот спускаться на них лежа на животе (так гораздо быстрее) выдумал МакКормик в 1887 году. Это случилось на соревнованиях по санному спорту. Новый подвид санных гонок назвали «скелетон». А всё потому, что сами санки, если их поставить, чем-то напоминали скелет человека.

Скелетон дважды был включен в программу Олимпийских игр на своей родине, в Санкт-Морице, — в 1928 и 1948 гг. Однако окончательно он стал олимпийской дисциплиной в 2002 году на Играх в Солт-Лейк-Сити.

Российские спортсмены впервые приняли участие в соревнованиях по скелетону в 1994 году на этапах Кубка мира в Инсбруке и Санкт-Морице, а также на Чемпионате мира в Альтенберге. В 2002 году фаворит женской сборной Екатерина Миронова заняла 7-е место на Играх в Солт-Лейк-Сити, а в

2003 году завоевала серебряную медаль на Чемпионате мира по скелетону и установила новый рекорд трассы на разгоне. Медаль в этом виде спорта российские спортсмены завоевали впервые. В 2010 году на XXI Олимпийских зимних играх в Ванкувере российский скелетонист Александр Третьяков завоевал бронзовую медаль и стал первым призером на подобных соревнованиях среди наших соотечественников.

Интересные факты

Непосредственно сами сани представляют собой утяжеленную раму с площадкой, к которой прикреплены стальные полозья. Рулевого управления для них не предусмотрено. Спортсмен движется в положении лежа на животе, то есть лицом вниз. Голова должна быть впереди – по ходу движения. Управление скелетоном он осуществляет при помощи ног, используя специальные ботинки с шипами.

Когда сани разгоняются, их скорость может достигать 40 км/ч. При движении по трассе скорость иногда достигает 130 км/ч. Если сравнивать три вида спорта – скелетон, санный спорт и бобслей, то скелетон является наиболее травмоопасным, поэтому там очень жестко следят за соблюдением правил. Максимальный вес спортсмена и саней вместе установлен для женщин – 92 кг, для мужчин – 115 кг. Если вес спортсмена и саней невелик, то разрешается использовать балласт, но опять же – не превышая установленного предела. Победитель в соревнованиях определяется исходя из суммы нескольких заездов – двух или четырех.

Александр Третьяков считается одним из лидеров мирового скелетона. На всех трассах, где он выступал, рекорд разгона принадлежит ему.

Пример 21. Определите, существует ли зависимость между разгоном и результатом. В качестве исходных данных следует использовать результаты первого заезда среди мужчин на Олимпийских играх в Ванкувере.

№	Спортсмен	Страна	Общее время	время после разгона
1	Мартинс Дукурс	Латвия	52,32	4,53
2	Джон Монтгомери	Канада	52,6	4,62
3	Александр Третьяков	Россия	52,7	4,52
4	Маттиас Гуггенбергер	Австрия	52,75	4,65
5	Майкл Дуглас	Канада	52,83	4,67
6	Франк Роммель	Германия	52,9	4,67
7	Кристан Бромли	Великобритания	52,91	4,7
8	Томасс Дукурс	Латвия	52,94	4,66
9	Джефф Пэйн	Канада	53,03	4,81
10	Зак Лунд	США	53,04	4,72
11	Михи Халилович	Германия	53,09	4,75
12	Бен Сэндфорд	Новая Зеландия	53,11	4,8
13	Сандро Штилике	Германия	53,18	4,78
14	Эрик Бернотас	США	53,23	4,75
15	Грегори Сен-Женье	Франция	53,4	4,76
16	Сергей Чудинов	Россия	53,64	4,64
17	Адам Пенгилли	Великобритания	53,75	4,68
18	Ив Паскаль Освальд	Швейцария	53,77	4,76
19	Шинсуке Тайяма	Япония	53,94	4,77
20	Казухиро Коши	Япония	54,02	4,91
21	Джон Дэйли	США	54,08	4,66
22	Чо Ин Хо	Южная Корея	54,46	4,87
23	Анже Шетина	Словения	54,5	4,72
24	Энтони Дин	Австралия	54,55	4,69
25	Андер Мирамбель Винас	Испания	54,77	4,8
26	Патрик Шеннон	Ирландия	55,18	4,77
27	Ян Робертс	Новая Зеландия	55,21	4,87
28	Никола Дрокко	Италия	55,77	4,69

Решение

Проанализируем наличие связи для всех спортсменов и для первой десятки.

№	Спортсмен	Общее время	ранг	время после разгона	ранг	d_i^2
1	Мартинс Дукурс	52,32	1	4,53	2	1
2	Джон Монтгомери	52,6	2	4,62	3	1
3	Александр Третьяков	52,7	3	4,52	1	4
4	Маттиас Гуггенбергер	52,75	4	4,65	5	1
5	Майкл Дуглас	52,83	5	4,67	8,5	12,25
6	Франк Роммель	52,9	6	4,67	8,5	6,25
7	Кристан Бромли	52,91	7	4,7	13	36
8	Томасс Дукурс	52,94	8	4,66	6,5	2,25
9	Джефф Пэйн	53,03	9	4,81	25	256
10	Зак Лунд	53,04	10	4,72	14,5	20,25
11	Михи Халилович	53,09	11	4,75	16,5	30,25
12	Бен Сэндфорд	53,11	12	4,8	23,5	132,25
13	Сандро Штилике	53,18	13	4,78	22	81
14	Эрик Бернотас	53,23	14	4,75	16,5	6,25
15	Грегори Сен-Женье	53,4	15	4,76	18,5	12,25
16	Сергей Чудинов	53,64	16	4,64	4	144
17	Адам Пенгилли	53,75	17	4,68	10	49
18	Ив Паскаль Освальд	53,77	18	4,76	18,5	0,25
19	Шинсуке Тайяма	53,94	19	4,77	20,5	2,25
20	Казухиро Коши	54,02	20	4,91	28	64
21	Джон Дэйли	54,08	21	4,66	6,5	210,25
22	Чо Ин Хо	54,46	22	4,87	26,5	20,25

23	Анже Шетина	54,5	23	4,72	14,5	72,25
24	Энтони Дин	54,55	24	4,69	11,5	156,25
25	Андер Мирамбель Винас	54,77	25	4,8	23,5	2,25
26	Патрик Шеннон	55,18	26	4,77	20,5	30,25
27	Ян Робертс	55,21	27	4,87	26,5	0,25
28	Никола Дрокко	55,77	28	4,69	11,5	272,25
	Сумма					1625,5

$r = 1 - 6 \cdot \dfrac{1625,5}{27 \cdot 28 \cdot 29} \approx 0,6$ - связь получилась прямая и средняя по силе. Это говорит о том, что только хорошего разгона часто бывает мало, чтобы побеждать. Сравним хотя бы результаты Сергея Чудинова: у него четвертый результат в разгоне, а итоговое место лишь 16.

Теперь проанализируем результаты для первой десятки спортсменов:

№	**Спортсмен**	**Общее время**	**ранг**	**время после разгона**	**ранг**	d_i^2
1	Мартинс Дукурс	52,32	1	4,53	2	1
2	Джон Монтгомери	52,6	2	4,62	3	1
3	Александр Третьяков	52,7	3	4,52	1	4
4	Маттиас Гуггенбергер	52,75	4	4,65	4	0
5	Майкл Дуглас	52,83	5	4,67	6,5	2,25
6	Франк Роммель	52,9	6	4,67	6,5	0,25
7	Кристан Бромли	52,91	7	4,7	8	1
8	Томасс Дукурс	52,94	8	4,66	5	9
9	Джефф Пэйн	53,03	9	4,81	10	1
10	Зак Лунд	53,04	10	4,72	9	1
						20,5

$r = 1 - 6 \cdot \dfrac{20,5}{9 \cdot 10 \cdot 11} \approx 0,88$ – связь получилась прямая и уже сильная.

Художественная гимнастика. Историческая справка. *Художественная гимнастика – сравнительно молодой вид спорта, и возник он именно в нашей стране. Само название «художественная гимнастика» возникло в 30-х гг. прошлого века в Ленинграде. Большую роль в формировании и становлении российского спортивного изобретения сыграл Мариинский театр: мастера балета приняли активное участие в разработке и популяризации художественной гимнастики. В итоге само соревнование приняло следующий вид: это выполнение с музыкальным сопровождением различных гимнастических упражнений и танцевальных элементов, как со спортивными снарядами (мяч, скакалка, лента, обруч, булавы), так и без них. Первые соревнования прошли в Ленинграде в 1941 г., и участвовали в них, как и задумывалось, только представительницы прекрасного пола. В конце века и мужчины стали принимать активное участие в освоении этого вида спорта, но олимпийским движением мужская художественная гимнастика пока не признана. А для женской судьбоносным в плане олимпийского будущего стал 1980 год.*

Правда, законодатели мод в этом виде спорта, советские гимнастки, как и вся сборная СССР, по политическим мотивам участие в Олимпиаде не принимали. Спустя четыре года олимпийской чемпионкой в Сеуле стала Марина Лобач, Александра Тимошенко одержала победу в Барселоне, в Атланте – Екатерина Серебрянская, в Сиднее – Юлия Барсукова, в Афинах – Алина Кабаева, в Пекине – Евгения Канаева. Так что можно сделать вывод: если россиянки принимают участие в олимпийском турнире, то без медалей они не остаются.

Одной из главных проблем художественной гимнастики является судейство. Нередко крупные соревнования заканчиваются судейскими скандалами. Международная федерация художественной гимнастики уже не раз меняла систему начисления оценок, несколько раз переиздавала правила судейства, но, тем не менее, вид спорта для оценки очень субъективный. Простому зрителю порой невозможно понять, за что той или иной спортсменке снизили баллы, если она не совершала какой-нибудь очевидной ошибки, например, не роняла мяч. Между тем судьей *должно оцениваться буквально каждое движение гимнастки. Итоговая оценка складывается по трем параметрам: исполнение, артистичность и сложность элементов.*

Пример 22. Определите, соревнования с какими снарядами наиболее и наименее связаны. Проанализировать, существует ли связь между параметрами для призера Олимпийских игр Евгении Канаевой.

Место	Спортсменка	Страна	Скакалка	Обруч	Булавы	Лента	Всего
1	Евгения Канаева		18.850	18.850	18.950	18.850	75.500
2	Инна Жукова		18.125	18.125	17.850	17.825	71.925
3	Анна Бессонова		17.975	17.775	17.900	18.225	71.875
4	Ольга Капранова		18.200	18.500	16.950	18.050	71.700
5	Алия Юсупова		17.825	17.625	17.650	16.700	69.800
6	Алия Гараева		17.750	18.075	17.225	16.625	69.675
7	Наталья Годунько		16.700	17.500	17.525	17.125	68.850
8	Альмудена Сид Тостадо		17.000	17.000	17.150	16.950	68.100
9	Ирина Ризенсон		16.350	17.025	16.850	16.550	66.775
10	Симона Пейчева		15.975	16.975	16.775	15.750	65.475

Решение

Место	Спортсменка	Скакалка		Обруч		Булава		Лента	
			R_1		R_2		R_3		R_4
1	Евгения Канаева	18,850	1	18,850	1	18,950	1	18,850	1
2	Инна Жукова	18,125	3	18,125	3	17,850	3	17,825	4
3	Анна Бессонова	17,975	4	17,775	5	17,900	2	18,225	2
4	Ольга Капранова	18,200	2	18,500	2	16,950	8	18,050	3
5	Алия Юсупова	17,825	5	17,625	6	17,650	4	16,700	7
6	Алия Гараева	17,750	6	18,075	4	17,225	6	16,625	8
7	Наталья Годунько	16,700	8	17,500	7	17,525	5	17,125	5

8	Альмудена Сид Тостадо	17,000	7	17,000	9	17,150	7	16,950	6
9	Ирина Ризенсон	16,350	9	17,025	8	16,850	9	16,550	9
10	Симона Пейчева	15,975	10	16,975	10	16,775	10	15,750	10

	$d_i^2(1,2)$	$d_i^2(1,3)$	$d_i^2(1,4)$	$d_i^2(2,3)$	$d_i^2(2,4)$	$d_i^2(3,4)$
	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	1	1
	1	4	4	9	9	0
	0	36	1	36	1	25
	1	1	4	4	1	9
	4	0	4	4	16	4
	1	9	9	4	4	0
	4	0	1	4	9	1
	1	0	0	1	1	0
	0	0	0	0	0	0
$\sum d_i^2$	12	50	24	62	42	40
r_s	0,93	0,7	0,85	0,62	0,75	0,76

Таким образом, слабее всего связь между выступления спортсменов с обручем и булавой, а сильнее всего – между выступлениями со скакалкой и обручем.

Теперь определим, какая из оценок оказывает более сильное влияние на конечный результат (место) в выступлениях с булавой.

		Сложность		Артистичность		Исполнение				
			R_1		R_2		R_3	d_1^2	d_2^2	d_3^2
1	Евгения Канаева	9,4	1	9,5	1,5	9,5	1	0	0,25	0
2	Анна Бессонова	8,2	5,5	9,5	1,5	9,05	3	12,25	0,25	1

3	Инна Жукова	8,6	2	9	3,5	9,05	3	1	0,25	0
4	Алия Юсупова	8,2	5,5	9	3,5	9,05	3	2,25	0,25	1
5	Наталья Годунько	8,5	3	8,95	5	8,8	6	4	0	1
6	Алия Гараева	7,8	10	8,85	7	8,9	5	16	1	1
7	Альмудена Сид Тостадо	8,1	8	8,9	6	8,65	7	1	1	0
8	Ольга Капранова	8,1	8	8,8	8	8,5	8,5	0	0	0,25
9	Ирина Ризенсон	8,1	8	8,6	10	8,5	8,5	1	1	0,25
10	Симона Пейчева	8,4	4	8,75	9	8,2	10	36	1	0
								73,5	5	4,5
								0,55	0,97	0,97

Самое большее влияние на итоговый результат оказывают оценки за технику и артистизм, т.е. субъективные оценки, которые трудно оспорить.

Распределение сил в соревнованиях на выносливость

Конькобежный спорт. ***Историческая справка.*** *Конькобежный спорт – один из старейших видов спорта. Где зародился конькобежный спорт? Когда люди изобрели коньки? Точного ответа не могут дать ни археологи, ни историки. В британском музее выставлены костяные коньки, на которых катались почти две тысячи лет назад. Коньки эти найдены в прошлом веке. А совсем недавно в 1967 году на берегу Южного Буга и сухого лимана неподалеку от Одессы археологи обнаружили самые древние коньки из всех когда-либо найденных. Эти коньки принадлежали кимерийцам – кочевому племени,* *жившему 3200 лет назад в Северном Причерноморье. Кимерийцы бегали на коньках уже в период бронзового века.*

В международный спорт слово «коньки» пришло из русского языка: коньки, коньки-бегунки, коньки-горбунки. Передняя часть деревянных коньков была украшена конской головой – отсюда и ласковое название, уменьшительное от слова «конь»: коньки.

Первым приклепал коньки к обуви русский император Петр I, который, строя в Голландии корабли, увлекся коньками. Он сразу понял, что коньки и обувь должны составлять единое целое. Четыре столетия деревянная основа конька и полоз изменялись в основном лишь по своей длине и форме.

Появление коньков в Европе и Америке в середине XIX века и создание катков способствовали развитию конькобежного спорта. Катание на коньках приобретает массовый характер. Большое значение сыграли соревнования, проведенные в 1805 году в провинции Фрисляндия, которые по своей организации явились прообразом современных состязаний по скоростному бегу на коньках.

Конькобежный спорт входил в программу всех Белых олимпиад.

Суть конькобежного спорта состоит в том, что спортсмен должен как можно скорее преодолеть определенную дистанцию. Первенство разыгрывается на отдельных дистанциях: 500, 1000, 1500, 5000, 10000 м у мужчин, у женщин - 500, 1000, 1500, 3000, 5000.

Мужской конькобежный спорт был включен в список олимпийских видов спорта еще в 1924 году, а женский – только в 1960. Самым последним новшеством данного вида спорта является командная гонка, которая также стала олимпийским спортом в 2006 году.

Интересные факты. *На заре конькобежного спорта в Шведском королевстве существовал такой негласный порядок: если на дорожке стартовал барон, то судья пускал в ход секундомер лишь спустя 2 секунды. Для графа устанавливалась фора еще солиднее — 4 секунды, а для принца — целых 8 секунд.*

До 1913 года женщины-конькобежцы в России занимались в укороченных юбках, только на официальных соревнованиях им разрешили надеть спортивные костюмы.

Первая организация конькобежцев в России называлась «Общество ржавого конька».

XVIII зимние олимпийские игры в Нагано стали в скоростном беге на коньках новой точкой отсчета скоростей будущего. Конькобежцы в Нагано унеслись за все мыслимые рекорды на «клэпах». Пять новых мировых рекордов. Голландский стайер Джани Ромме промчался 5000 м за 6.22,20. Немки Гунда Ниманн-Штирнеманн и Клаудиа Пехштайн на этой же дистанции показали новые мировые достижения - 6.59,65 и 6.59,6! Впервые в истории женского конькобежного спорта они преодолели семиминутный рубеж. Мировыми рекордсменами на дистанции 1500 м стали М.Тиммер - 1.57,58 (мр), и норвежец Адне Сондрал - 1.47,87.

Пример 23. В беге на длинные дистанции спортсмену надо правильно распределить силы на дистанции. Проанализируем, влияет ли равномерное распределение сил на итоговые результат.

Место	1	2	3	4	5
Спортсмен	Ли Сын Хун	Иван Скобрев	Боб де Йонг	Алексис Контен	Ховард Бёкко
Общее время	12:58.55	13:02.07	13:06.73	13:12.11	13:14.92
400 м	33.89	35.15	34.17	34.17	34.26
800 м	1:04.38	1:05.79	1:05.06	1:04.95	1:04.67
1200 м	1:35.30	1:36.73	1:36.56	1:36.41	1:35.62
1600 м	2:05.79	2:07.95	2:07.60	2:08.02	2:06.63
2000 м	2:36.41	2:39.13	2:38.68	2:39.11	2:37.83
2400 м	3:07.19	3:10.28	3:10.00	3:10.16	3:08.95
2800 м	3:38.00	3:41.41	3:41.49	3:41.38	3:40.55

3200 м	4:08.77	4:12.62	4:13.14	4:12.63	4:12.13
3600 м	4:39.93	4:43.98	4:44.72	4:43.87	4:43.71
4000 м	5:11.09	5:15.25	5:16.10	5:15.14	5:15.34
4400 м	5:42.21	5:46.28	5:47.76	5:46.37	5:46.94
4800 м	6:13.07	6:17.44	6:19.73	6:17.86	6:18.72
5200 м	6:44.25	6:48.54	6:51.73	6:49.19	6:50.53
5600 м	7:15.54	7:19.73	7:23.86	7:20.82	7:22.27
6000 м	7:46.77	7:50.73	7:56.01	7:52.88	7:54.17
6400 м	8:17.93	8:21.80	8:27.82	8:24.93	8:26.01
6800 м	8:49.01	8:53.12	8:59.48	8:57.40	8:57.88
7200 м	9:20.26	9:24.50	9:30.94	9:29.75	9:29.65
7600 м	9:51.77	9:55.68	10:02.10	10:02.06	10:01.60
8000 м	10:23.18	10:27.00	10:32.85	10:34.36	10:32.84
8400 м	10:54.65	10:58.29	11:03.53	11:06.50	11:04.71
8800 м	11:26.05	11:29.42	11:34.33	11:38.17	11:36.99
9200 м	11:57.38	12:00.60	12:05.27	12:09.88	12:09.48
9600 м	12:28.26	12:31.27	12:36.26	12:41.14	12:42.01

Решение

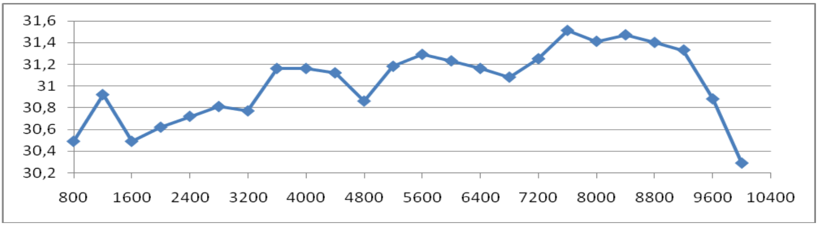
1. Умение правильно распределить силы на дистанции состоит в том, чтобы скорость прохождения каждого участка была примерно одинаковой, т.е. среднее квадратическое отклонение должно быть как можно меньше.
2. Вычислим средние квадратические отклонения для первого спортсмена. Для этого определим чистое время прохождения каждого отрезка.

Ли Сын Хун: 33,89; 30,49; 30,92; 30,49; 30,62; 30,72; 30,81; 30,77; 31,16; 31,16; 31,12; 30,86; 31,18; 31,29; 31,23; 31,16; 31,08; 31,25; 31,51; 31,41; 31,47; 31,4; 31,33; 30,88; 30,29.

Вычислим основные характеристики, не учитывая время прохождения первого круга.

Среднее время: $\overline{x_в} \approx 31,025$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = 0,33$.



Аналогично вычислим средние квадратические отклонения для других спортсменов и найдем коэффициент ранговой корреляции:

Место	**Спортсмен**	**Среднее квадратическое отклонение**	**Ранг (отклонения)**	d_i^2
1	Ли Сын Хун	0,329709	2	1
2	Иван Скобрев	0,192152	1	1
3	Боб де Йонг	0,468025	3	0
4	Алексис Контен	0,479704	4	0
5	Ховард Бёкко	0,531201	5	0
				2

$$r = 1 - 6 \cdot \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} = 1 - 0,1 = 0,9$$

Таким образом, мы получили прямую среднюю связь между средним квадратическим отклонением и результатом. Как видим из таблицы, Иван Скобрев лучше всех сумел рассчитать свои силы на дистанции.

Лыжные гонки

***Лыжные гонки** – вид спорта, в котором спортсменам необходимо как можно быстрее преодолеть соревновательную дистанцию на лыжах (обычно специально подготовленную трассу на пересеченной местности).*

***Историческая справка.** Первые лыжи появились у древних охотников в северных странах. Они были похожи на современные снегоступы. Самые древние письменные свидетельства о при-*

менении скользящих лыж относятся к 6-7 в. н. э. В 1767 году были проведены соревнования по всем видам лыжного спорта (в современной терминологии): биатлону, слалому, скоростному спуску и гонкам. В конце 19 в. соревнования по лыжному спорту стали проводиться во всех странах мира. Олимпийские лыжные гонки проводятся для мужчин с 1924 г., для женщин – с 1952 г.

Интересные факты: На I Зимних Олимпийских играх *в Шамони (Франция, 1924 г) лыжный спорт был представлен лыжными гонками на дистанции 18 и 50 км, прыжками на лыжах с трамплина и северным двоеборьем (прыжки с трамплина и лыжная гонка). Олимпийским чемпионом в лыжных гонках и в лыжном двоеборье стал норвежский лыжник Тарлиф Хауг. В прыжках на лыжах с трамплина он занял III место и первый в мире был удостоен звания «Короля лыж». На 16-ти последующих играх повторить и тем более превзойти рекорд первого в мире «Короля лыж» не смог ни один олимпиец. За свои победы на лыжне Хауг был удостоен 10 Королевских Кубков. В знак необычайных спортивных заслуг суровые и немногословные норвежцы впервые в мире воздвигли Тарлифу на его родине прижизненный памятник.*

По представлению Олимпийского Комитета России первый среди наших соотечественников международный приз Кубертена присужден Раисе Сметаниной — лидеру мировой элиты лыжников. Участница пяти Олимпиад, восьми чемпионатов мира, Раиса Сметанина установила еще один уникальный рекорд спортивного долголетия — на своей 5-й Олимпиаде она была увенчана золотой медалью в 40 лет.

Пример 24. Гонка преследования на 15 километров в лыжных гонках среди женщин состоит из двух этапов: первую половину дистанции после массового старта – 7,5 км – участницы проходят классическим стилем, затем меняют лыжи и палки и проходят вторую половину дистанции свободным стилем. Определите, существует ли связь между временем прохождения дистанции классическим и свободным стилем для спортсменок из первой десятки.

	Спортсмен	Классический стиль	Свободный стиль
1	Марит Бьорген	21:00.8	18:31.5
2	Анна Хааг	21:04.5	18:37.8
3	Юстина Ковальчик	21:02.2	18:42.0
4	Кристин Стойрмер Стейра	21:05.1	18:39.7
5	Айно-Кайса Сааринен	21:00.7	19:18.0
6	Тереза Йохауг	21:06.1	19:17.0
7	Марианна Лонга	21:05.5	19:33.6
8	Шарлотт Калла	21:26.4	19:27.5
9	Арианна Фоллис	21:26.0	19:33.7
10	Сара Реннер	21:28.1	19:44.3

Решение

Проранжируем исходные данные и вычислим коэффициент ранговой корреляции Спирмена для спортсменов из первой десятки. Вычислим квадраты разностей $d_i^2(1)$ между классическим и свободным стилем, $d_i^2(2)$ между итоговым местом и классическим стилем, $d_i^2(3)$ между итоговым местом и свободным стилем.

	Спортсмен	Классический стиль (ранг)	Свободный стиль (ранг)
1	Марит Бьорген	21:00.8 (2)	18:31.5 (1)
2	Анна Хааг	21:04.5 (4)	18:37.8 (2)
3	Юстина Ковальчик	21:02.2 (3)	18:42.0 (4)
4	Кристин Стойрмер Стейра	21:05.1 (5)	18:39.7 (3)
5	Айно-Кайса Сааринен	21:00.7 (1)	19:18.0 (6)
6	Тереза Йохауг	21:06.1 (7)	19:17.0 (5)
7	Марианна Лонга	21:05.5 (6)	19:33.6 (8)
8	Шарлотт Калла	21:26.4 (9)	19:27.5 (7)
9	Арианна Фоллис	21:26.0 (8)	19:33.7 (9)
10	Сара Реннер	21:28.1 (10)	19:44.3 (10)

Место	Ранг (клас. стиль)	Ранг (св. стиль)	$d_i^2\,(1)$	$d_i^2\,(2)$	$d_i^2\,(3)$
1	2	1	1	1	0
2	4	2	4	4	0
3	3	4	1	0	1
4	5	3	4	1	1
5	1	6	25	16	1
6	7	5	4	1	1
7	6	8	4	1	1
8	9	7	4	1	1
9	8	9	1	1	0
10	10	10	0	0	0
			48	26	6

$r\left(к,с\right)=1-6\dfrac{48}{9\cdot10\cdot11}\approx0,71;\quad r\left(м,к\right)=1-6\dfrac{26}{9\cdot10\cdot11}\approx0,84;$

$r\left(м,к\right)=1-6\dfrac{6}{9\cdot10\cdot11}\approx0,96.$

Все ранговые коэффициенты получились больше 0,7, значит, связь между всеми параметрами получилась сильная прямая.

Защита и нападение в хоккее

Хоккей. ***Историческая справка.*** *Сам термин – «хоккей» образовался либо от английского «hockey», либо от старофранцузского «hoquet», означающий «пастуший посох с крюком». Хоккей – это спортивная командная игра с клюшками и шайбой (или мячом), содержание и цель которой – используя индивидуальное ведение и передачи мяча партнёром, забить его наибольшее число раз в ворота соперника.*

Еще до появления хоккея в 16 веке Голландии существовали игры с мячом и клюшками на льду. Затем подобные игры *появились в Англии и Скандинавии, где впоследствии они преобразовались в хоккей с мячом на льду в 19 веке.*

Современный хоккей с шайбой как спортивная игра возник в Канаде. Это страна, климат и природа которой (многочисленные водоемы, замерзающие зимой, и длительные зимы) создавали хорошие условия для распространения этой игры. Сначала играли не шайбой, а тяжелым мячом и по численности команды доходили до 50 и более игроков с каждой стороны.

Первый турнир по ***хоккею с шайбой*** *в рамках* ***Олимпийских игр*** *состоялся на летних Олимпийских играх 1920 года. С 1924 года хоккей с шайбой переехал в программу зимних Олимпийских игр. Турнир по хоккею с шайбой среди женских команд включён в олимпийскую программу с зимних Олимпийских игр 1998 года в Нагано.*

Интересные факты. *А знаете ли вы, что первый в своей истории Олимпийский хоккейный титул сборная Соединенных Штатов Америки завоевала, возможно, благодаря советскому хоккеисту Николаю Сологубову? Дело в том, что на Зимних Олимпийских Играх в Скво-Вэлли в 1960 году команда США, для которой эта олимпиада была домашней, но которая до этого не выигрывала ни одного такого соревнования, неожиданно выиграла финал Игр. В одной из ключевых игр противником американцев стала Чехословакия, которая была в хорошей форме и после 2-х периодов выигрывала у американских хоккеистов со счетом 4-3.*

В перерыве перед третьим периодом Николай Сологубов пришел в раздевалку американцев и жестами (поскольку он не говорил по-английски) объяснил, что американцам надо использовать кислородные баллоны. Американские тренеры, не имея достаточного опыта в выступлении в различных условиях, не учли, что в горах Сьерры-Невады (примерно 1900 м над уровнем моря) воздух был гораздо более разреженным, что пагубно сказывалось на физическом состоянии команды. Американцы воспользовались советом Николая и выиграли матч со счетом 9-4, забив 6 безответных шайб.

Пример 25. Определите, что оказывает большее влияние на результат, защита или нападение.

Решение

Рассмотрим результативность вратарей (% отраженных бросков) и результативность полевых игроков (% результативных бросков по воротам) в групповом этапе.

Группа	Команда	Место в групповом этапе	% отраженных бросков	% результативных бросков
A	США	1	92,96	16,28
	Канада	6	88,52	10,45
	Швейцария	8	89,36	10,53
	Норвегия	10	84,03	10,20
B	Россия	3	92,31	11,50
	Чехия	5	91,67	11,36
	Словакия	7	95,12	8,57
	Латвия	12	84,30	6,78
C	Швеция	2	96,67	10,84
	Финляндия	4	92,65	8,93
	Белоруссия	9	90,24	16,67
	Германия	11	84,42	3,53

Проранжируем исходные данные:

Команда	Место в групповом этапе	% отраженных бросков	Ранг	% результативных бросков	Ранг
США	1	92,96	3	16,28	2
Канада	6	88,52	9	10,45	7
Швейцария	8	89,36	8	10,53	6
Норвегия	10	84,03	12	10,20	8
Россия	3	92,31	5	11,50	3
Чехия	5	91,67	6	11,36	4
Словакия	7	95,12	2	8,57	10

Латвия	12	84,30	11	6,78	11
Швеция	2	96,67	1	10,84	5
Финляндия	4	92,65	4	8,93	9
Белоруссия	9	90,24	7	16,67	1
Германия	11	84,42	10	3,53	12

Построим корреляционную матрицу, отражающую связь между местом в групповом этапе, % отраженных бросков и % результативных бросков.

Команда	Место в групповом этапе R_1	% отраженных бросков R_2	% результативных бросков R_3	$d_{1,2}^2$	$d_{1,3}^2$	$d_{2,3}^2$
США	1	3	2	4	1	1
Канада	6	9	7	9	1	4
Швейцария	8	8	6	0	4	4
Норвегия	10	12	8	4	4	16
Россия	3	5	3	4	0	4
Чехия	5	6	4	1	1	4
Словакия	7	2	10	25	9	64
Латвия	12	11	11	1	1	0
Швеция	2	1	5	1	9	16
Финляндия	4	4	9	0	25	25
Белоруссия	9	7	1	4	64	36
Германия	11	10	12	1	1	4
				54	120	178

$$r_{1,2} = 1 - 6 \cdot \frac{54}{11 \cdot 12 \cdot 13} \approx 0.81$$

$$r_{1,3} = 1 - 6 \cdot \frac{120}{11 \cdot 12 \cdot 13} \approx 0.58$$

$$r_{2,3} = 1 - 6 \cdot \frac{178}{11 \cdot 12 \cdot 13} \approx 0.38$$

$$(r)=\begin{array}{r} \\ \textit{место}\ (1) \\ \%\ \textit{отраж. бросков}\ (2) \\ \%\ \textit{результ. бросков} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \quad 2 & \quad 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0{,}81 & 0{,}58 \\ & 1 & 0{,}38 \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Таким образом, самая сильная связь получилась между «% отраженных бросков» и «местом». Значит, результаты матчей довольно сильно зависят от вратарей команд.

Сколько стоит олимпийская медаль

Кроме медали и мирового признания призеры Олимпийских игр получают неплохое денежное вознаграждение, причем в разных странах размер этого денежного вознаграждения разный.

Государственными деньгами спортсменов заваливают, в основном, развивающиеся страны с нестабильной экономикой, для которых политическая составляющая золотой медали дороже остальных. Так, за «золото» Армении в Пекине платили $768 тыс., в Азербайджане – $750 тыс. Мировой рекорд по объему премиальных побили триумфаторы летней Олимпиады – китайцы. Каждому спортсмену за первое место заплатили по $1 млн.

А вот страны с высоким уровнем жизни своих атлетов в большинстве случаев не балуют. Например, Норвегия, Швеция и Новая Зеландия не платят олимпийцам из государственных фондов ни копейки. Спортсмены сражаются за престиж страны и могут рассчитывать только на памятные значки-грамоты, а также щедрость спонсоров.

Пример 26. Проанализируйте, как связано количество медалей, выигранных спортсменами на Олимпийских играх в Ванкувере, и выплаты призерам (взяты опубликованные данные по выплатам).

	Золотая медаль		Серебряная медаль		Бронзовая медаль	
	Призовые выплаты	кол-во медалей	Призовые выплаты	кол-во медалей	Призовые выплаты	кол-во медалей
Казахстан	181	0	108	1	54	0
Эстония	102	0	70	1	45	0
Россия	100	3	60	5	40	7
Украина	72	0	50	0	36	0
Беларусь	72	1	36	1	21	1
Молдавия	50	0	30	0	15	0
Китай	37	5	29	2	26	4
США	18	9	10	15	7,5	13
Германия	15	10	10	13	7,5	7
Канада	13	14	10	7	7	5

Решение

Золотые медали

	призовые выплаты	ранг	кол-во медалей	ранг	d_i^2
Казахстан	181	1	0	8,5	56,25
Эстония	102	2	0	8,5	42,25
Россия	100	3	3	5	4
Украина	72	4,5	0	8,5	16
Беларусь	72	4,5	1	6	2,25
Молдавия	50	5	0	8,5	12,25
Китай	37	6	5	4	4
США	18	7	9	3	16
Германия	15	8	10	2	36
Канада	13	9	14	1	64
					253

$r_{зол} = 1 - 6 \cdot \frac{253}{9 \cdot 10 \cdot 11} \approx -0,53$ - получилась обратная связь средней силы.

Серебряная медаль

	призовые выплаты	ранг	кол-во медалей	ранг	d_i^2
Казахстан	108	1	1	7	36
Эстония	70	2	1	7	25
Россия	60	3	5	4	1
Украина	50	4	0	9,5	20,25
Беларусь	36	5	1	7	4
Молдавия	30	6	0	9,5	12,25
Китай	29	7	2	5	4
США	10	9	15	1	64
Германия	10	9	13	2	49
Канада	10	9	7	3	36
					251,5

$r_{сер} = 1 - 6 \cdot \frac{251,5}{9 \cdot 10 \cdot 11} \approx -0,52$ - получилась обратная связь средней силы.

Бронзовая медаль

	призовые выплаты	ранг	кол-во медалей	ранг	d_i^2
Казахстан	54	1	0	8,5	56,25
Эстония	45	2	0	8,5	42,25
Россия	40	3	7	2,5	0,25
Украина	36	4	0	8,5	20,25
Беларусь	21	6	1	6	0
Молдавия	15	7	0	8,5	2,25
Китай	26	5	4	5	0
США	7,5	8,5	13	1	56,25
Германия	7,5	8,5	7	2,5	36

Канада	7	10	5	4	36
					249,5

$r_{бр} = 1 - 6 \cdot \dfrac{249,5}{9 \cdot 10 \cdot 11} \approx -0,51$ - получилась обратная связь средней силы.

Таким образом, для каждого вида медалей мы получили **обратную** связь средней силы. Еще в январе 1989 года Г.Каспаров опубликовал в «Огоньке» статью, в которой поставил вопрос: что для страны важнее – пятьдесят золотых олимпийских медалей (в 1988 году мы взяли 52 олимпийских «золота») или новые плавательные бассейны по стране? Во что нужно вкладывать средства – в медали или в массовый спорт? Уже тогда эта проблема стала актуальной.

«Обещаниями дать спортсменам сверхвысокий гонорар нельзя компенсировать отсутствие настоящей подготовки. Призовые по сто тысяч, а винтовки разваливаются в руках биатлонистов! Может быть, правильнее было винтовки нормальные закупить, а не эти фантастические призовые назначать? Почему у нас нет нормальной экипировки? Потому что это неважно, на взгляд наших чиновников». – Г.Каспаров [14].

«И мы, пока не поймем, что основа спортивных успехов не призовые, а здоровье нации, пока не начнем строить в школах хорошие спортплощадки, пока не создадим программу господдержки массового, особенно юношеского спорта, про успехи на Олимпиадах можем забыть».

Сравнение результатов

Нередко, сравнивая «на глазок» результаты «до» и «после» какого либо воздействия (например, изменение программы тренировок), спортсмен и тренер видит изменения – большинство показателей может увеличиваться или, напротив, уменьшаться. Для того чтобы доказать эффективность какого-либо воздействия, необходимо оценить математически достоверность этих изменений.

Для этой цели используют критерии, которые позволяют сравнивать результаты между собой как сами результаты, так и основные характеристики выборок. Если сравниваются результаты, показанные одними и теми же спортсменами, но в разных условиях, то такие выборки называются ***зависимыми***. Если сравниваются результаты соревнований, в которых участвовали разные спортсмены, например, результаты, показанные на разных олимпийских играх, то выборки называются ***независимыми***.

Для сравнения выборок по параметрам используют так называемые параметрические критерии. Самыми простыми из них являются критерий Фишера и Стьюдента.

Для сравнения выборок по значениям используют непараметрические критерии. Самыми простыми критериями, которые позволяют установить наличие различий между зависимыми выборками, являются критерий знаков G (для сравнения двух выборок) и критерий Пейджа (для сравнения трех и более выборок).

Для сравнения независимых выборок используют критерии Розенбаума (для сравнений двух выборок) и критерий Крускалла-Уоллиса (для сравнения трех и более выборок).

Критерий Фишера F

Критерий Фишера предназначен для сравнения дисперсий двух выборок.

Алгоритм применения критерия Фишера.

1. Вычислить дисперсии для каждой из выборок
2. Определить значение критерия, оно равно отношению двух дисперсий (большей к меньшей): $F_{эмп} = \frac{S_{б}^{2}}{S_{м}^{2}}$
3. По таблице определить критическое значение и сделать вывод.

k1 / k2	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	244	249	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48

Понятно, что чем больше величина этого отношения $F_{эмп}$, тем больше отличаются дисперсии. Значит, можно сделать вывод, что если $F_{эмп} > F_{кр}$, то дисперсии отличаются, а в противном случае дисперсии близки между собой.

Пример 27. Сравните, различаются ли между собой дисперсии результатов бега на длинные дистанции для Ивана Скобрева и Ли Сын Хуна, а также Боба де Йонга и Алексиса Контена из примера 21.

Решение

Место	Спортсмен	Среднее квадратическое отклонение
1	Ли Сын Хун	0,330
2	Иван Скобрев	0,192
3	Боб де Йонг	0,468
4	Алексис Контен	0,480

Сравним дисперсии Ли Сын Хуна и Ивана Скобрева. Вычислим $F_{эмп}=\dfrac{s_б^2}{s_м^2}=\dfrac{0,33^2}{0,19^2}=3$. Спортсмены пробегали 24 временных отсечек, значит, $F_{кр}\left(k_1=23; k_2=23\right)=2$. Так как $F_{эмп}=3>2=F_{кр}$, то дисперсии Ли Сын Хуна и Ивана Скобрева различаются существенно.

Сравним дисперсии Боба де Йонга и Алексиса Контена: Вычислим $F_{эмп}=\dfrac{s_б^2}{s_м^2}=\dfrac{0,48^2}{0,468^2}\approx 1$. Так как $F_{эмп}=1<2=F_{кр}$, то дисперсии Боба де Йонга и Алексиса Контена различаются несущественно.

Критерий сравнения выборочных средних

При сравнении средних для независимых выборок эмпирическое значение вычисляется по формуле:

$$t_{эмп}=\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{D[X]}{n_1}-\dfrac{D[Y]}{n_2}}}.$$

Подсчет числа степеней свободы осуществляется по формуле $k=\left(n_1-1\right)+\left(n_2-1\right)=n_1+n_2-2$, где n_1, n_2 соответственно объемы первой и второй выборок. Понятно, что при численном равенстве выборок $k=2\cdot n-2$.

Таблица критических значений

n	$T_{кр}$		n	$T_{кр}$
2	4,3		7	2,4
3	3,2		8-9	2,3
4	2,8		10-14	2,2
5	2,7		15-25	2,1
6	2,5		∞	1,96

Шорт-трек *(англ. Short track speed skating, рус. Скоростной бег на коньках на короткой дорожке).* ***Историческая справка.*** *Поскольку шорт-трек является разновидностью конькобежного спорта, то возник он не так давно - в начале прошлого века. Зачастую погодные условия загоняли спортсменов в хоккейные коробки, на льду которых можно было отработать и резкий поворот, и спринтерское ускорение.*

Когда же стало понятно, что на традиционных беговых коньках (которые затем, естественно, серьезно видоизменились) даже по хоккейной коробке можно кататься довольно успешно, а падения, толчки и непосредственная борьба на льду являются непременными атрибутами подобных гонок, то новый вид спорта начал довольно быстро развиваться.

На Олимпийских Играх 1988 в Калгари шорт-трек был показательным видом спорта. Полностью принят в олимпийскую семью он был лишь в 1992 г. и с тех пор является неотъемлемой частью Белых Олимпиад. В Ванкувере было разыграно 8 комплектов олимпийских медалей по шорт-треку.

Пример 28. Можно ли считать, что среднее время в каждом отборочном забеге в беге на 500 метров в шорт-треке среди мужчин на зимних Олимпийских играх 2010 одинаково?

Отборочные забеги

Место	Спортсмен	Время
1	Сон Си Пак (KOR)	41,889
2	Нилс Керстолт (NED)	42,180
3	Николас Бин (ITA)	42,344
4	Такахиро Фудзимото (JPN)	42,366

Место	Спортсмен	Время
1	Ли Хо Сок (KOR)	41,632
2	Саймон Чо (USA)	41,726
3	Семён Елистратов (RUS)	42,982
4	Сьинки Кнегт (NED)	44,448

Место	Спортсмен	Время
1	Шарль Амлен (CAN)	41,463
2	Джон Или (GBR)	42,081
3	Никола Родигари (ITA)	42,190
4	Руслан Захаров (RUS)	43,207

Решение

Вычислим выборочные средние для каждого забега:

$$\overline{x}_1 = \frac{41.889 + 42.180 + 42.344 + 42.366}{4} \approx 42.195$$

$$\overline{x}_2 = \frac{41.632 + 41.726 + 42.982 + 44.448}{4} \approx 42.697$$

$$\overline{x}_3 = \frac{41.463 + 42.081 + 42.190 + 43.207}{4} \approx 42.235$$

Выборки независимые, т.к. участвуют разные спортсмены.

Вычислим дисперсии: $\overline{d_1} \approx 0,04$; $\overline{d_2} \approx 1,3$; $\overline{d_3} \approx 0.4$.

Найдем эмпирическое значение критерия по формуле $t_{эмп} = \dfrac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{D[X]}{n_1} - \dfrac{D[Y]}{n_2}}}$ и определим по таблице критические значения $t_{кр}\left(k = 2 \cdot 4 - 2\right) = t_{кр}\left(k = 6\right) = 2,45$

Вычислим эмпирические значения критерия для сравнения среднего времени между разными забегами:

$$t\left(2,3\right) = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{s_2^{\ 2}}{n_2}}} = \frac{42,697 - 42,235}{\sqrt{\dfrac{1,3 + 0,4}{4}}} = \frac{0,462}{0,65} \approx 0,7 .$$

$$t\left(1,2\right) = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{s_2^{\ 2}}{n_2}}} = \frac{42,697 - 42,195}{\sqrt{\dfrac{1,3 + 0,04}{4}}} = \frac{0,5}{0,58} \approx 0,86$$

$$t\left(1,3\right) = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{\dfrac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \dfrac{s_2^{\ 2}}{n_2}}} = \frac{42,235 - 42,195}{\sqrt{\dfrac{0,04 + 0,4}{4}}} = \frac{0,04}{0,33} \approx 0,12$$

Все три значения оказались меньше критического, следовательно, среднее время в каждом отборочном забеге примерно одинаково на уровне значимости 0,05.

Критерий Стьюдента для зависимых выборок

Зависимые выборки - это несколько результатов для одной группы испытуемых, следовательно, объемы выборок будут равны. В этом случае вычисление $t_{эмп}$ для критерия Стьюдента осуществляется по формуле: $t_{эмп} = \frac{\overline{d}}{Sd}$, где

$$\overline{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n}, \; Sd = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - \frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n \cdot (n-1)}}$$

Число степеней свободы k определяется по формуле $k = n - 1$.

Стрельба. Историческая справка. *Соревнования по стрельбе на летних Олимпийских играх впервые появились на летних Олимпийских играх 1896 в Афинах и с тех пор включались в программу каждых последующих Игр, кроме Игр 1904 и 1928. Первоначально соревнования проходили среди мужчин, а с летних олимпийских игр 1968 в Мехико женщины могли участвовать во всех дисциплинах наравне с мужчинами. На летних Олимпийских играх 1984 в Лос-Анджелесе часть дисциплин была разделена между мужчинами и женщинами, а полностью стрельба стала раздельным видом спорта только с летних Олимпийских игр 1996 в Атланте.*

Интересные факты. *Самым пожилым человеком, завоевавшим Олимпийскую медаль, был Оскар Сван, занявший второе место в соревнованиях по стрельбе на Олимпиаде 1920 года в Швеции. Тогда ему было 72 года.*

Пример 29. Сравните средние результаты стрельбы из разных положений на летних Олимпийских играх 2008 года.

Место	Спортсмен	Лёжа			Стоя			С колена		
		1	2	Сумма	1	2	Сумма	1	2	Сумма
1	Ду Ли (CHN)	99	97	196	97	97	196	100	99	199
2	Эглис Крус (CUB)	99	100	199	97	96	193	98	98	196
3	Ольга Довгун (KAZ)	100	100	200	97	95	192	98	98	196
4	Лидия Михайлович (SRB)	99	100	199	96	95	191	97	99	196
5	Джеми Бейерли (USA)	98	100	198	93	98	191	99	98	197
6	Катержина Эммонс (CZE)	100	97	197	96	98	194	97	98	195
7	У Люси (CHN)	99	100	199	96	96	192	98	96	194
8	Любовь Галкина (RUS)	97	100	197	96	98	194	99	95	194

Решение

Все вычисления удобнее выполнять в таблице:

	Лежа	Стоя	Разность d_i	d_i^2
1	196	196	0	0
2	199	193	6	36
3	200	192	8	64
4	199	191	8	64
5	198	191	7	49
6	197	194	3	9
7	199	192	7	49
8	197	194	3	9
сумма	1585	1543	42	280

Выборочные средние:

$$\overline{x_в} = \frac{1585}{8} \approx \mathbf{198}; \qquad \overline{y_в} = \frac{1543}{8} \approx \mathbf{193}.$$

Вычислим эмпирическое значение критерия, используя вспомогательные переменные:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{\sum (x_i - y_i)}{n} = \frac{42}{8} \approx 5.25$$

$$Sd=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n\cdot(n-1)}}=\sqrt{\frac{280-\frac{42^2}{8}}{8\cdot(8-1)}}\approx 1$$

$$t_{эмп}=\frac{\overline{d}}{Sd}=\frac{5.25}{1}\approx 5.25$$

$$t_{кр}(8-1)\approx 1{,}9$$

Так как $t_{эмп}=5,25>1.9=t_{кр}$, то можно считать, что средние результаты стрельбы из положения лежа и стоя существенно различаются.

	Лежа	С колена	Разность d_i	d_i^2
1	196	199	-3	9
2	199	196	3	9
3	200	196	4	16
4	199	196	3	9
5	198	197	1	1
6	197	195	2	4
7	199	194	5	25
8	197	194	3	9
сумма	1585	1567	18	82

Выборочные средние:

$$\overline{x_в}=\frac{1585}{8}\approx \mathbf{198}; \qquad \overline{y_в}=\frac{1567}{8}\approx \mathbf{196}.$$

Вычислим эмпирическое значение критерия, используя вспомогательные переменные:

$$\overline{d}=\frac{\sum d_i}{n}=\frac{\sum(x_i-y_i)}{n}=\frac{18}{8}=2.25$$

$$Sd=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n\cdot(n-1)}}=\sqrt{\frac{82-\frac{18^2}{8}}{8\cdot(8-1)}}\approx 0,86$$

$$t_{эмп}=\frac{\overline{d}}{Sd}=\frac{2,25}{0,86}\approx 2,6$$

$$t_{кр}(8-1)\approx 1,9$$

Так как $t_{эмп}=2,6>1.9=t_{кр}$, то можно считать, что средние результаты стрельбы из положения лежа и с колена существенно различаются.

	Стоя	С колена	Разность d_i	d_i^2
1	196	199	3	9
2	193	196	3	9
3	192	196	4	16
4	191	196	5	25
5	191	197	6	36
6	194	195	1	1
7	192	194	2	4
8	194	194	0	0
сумма	1543	1567	24	100

Выборочные средние:

$\overline{x_в}=\frac{1543}{8}\approx\mathbf{193}$; $\overline{y_в}=\frac{1567}{8}\approx\mathbf{196}$.

Вычислим эмпирическое значение критерия, используя вспомогательные переменные:

$$\overline{d}=\frac{\sum d_i}{n}=\frac{\sum(x_i-y_i)}{n}=\frac{24}{8}=3$$

$$Sd=\sqrt{\frac{\sum d_i^2-\frac{\left(\sum d_i\right)^2}{n}}{n\cdot(n-1)}}=\sqrt{\frac{100-\frac{24^2}{8}}{8\cdot(8-1)}}\approx 0,71$$

$$t_{эмп} = \frac{\overline{d}}{Sd} = \frac{3}{0,71} \approx 4,23$$
$$t_{кр}\left(8-1\right) \approx 1,9$$

Так как $t_{эмп} = 4,23 > 1.9 = t_{кр}$, то можно считать, что средние результаты стрельбы из положения стоя и с колена существенно различаются.

Непараметрические критерии

Критерий знаков G

Критерий дает возможность установить, насколько согласованно изменяются значения признака при повторном измерении, причем количество спортсменов должно быть не меньше 11.

Алгоритм (порядок) применения критерия знаков.

1. Для каждого участника (спортсмена) определить, насколько изменился его показатель «сдвиг». «Сдвиг» – это величина разности между показателями одного и того же участника «после» и «до» наступления какого-то события, но не наоборот! Причем для критерия достаточно определить только знак разности.
2. По результатам, полученным в столбце таблицы, обозначенном словом «Сдвиг», подсчитываются количество нулевых, положительных и отрицательных сдвигов. При использовании критерия знаков необходимо учитывать только количество положительных и отрицательных сдвигов, а количество нулевых — отбрасывать.
3. Определить «типичный» сдвиг, т.е. каких разностей больше, «положительных» или «отрицательных».
4. Определить значение критерия, оно равно количеству нетипичных сдвигов, и сравнить его с табличным. Чем меньше нетипичных сдвигов, тем лучше заметны различия между выборками, т.е. если количество «нетипичных» сдвигов оказа-

лось меньше табличного, то различия между выборками существенны.

Таблица критических значений для G критерия

N (количество испытуемых)	Значение критерия $G_{табл}$		*N (количество испытуемых)*	Значение критерия $G_{табл}$
5-7	0		16-17	4
8-10	1		18-20	5
11-12	2		21-22	6
13-15	3		23-25	7

Фристайл. Историческая справка. *Фристайл – молодой вид спорта. Родоначальником фристайла является лыжная акробатика. В европейских странах ее назвали «фристайл», что в переводе с английского означает «свободный, вольный стиль». Точную дату рождения этого вида спорта назвать довольно трудно. Принято считать, что история фристайла в том виде, в котором он существует сейчас, начинается с 1971 г. - года первых официальных соревнований по фристайлу, которые были организованы в Нью-Хемпшире (США).*

В сентябре 1988 г. на сеульской сессии МОК было принято решение о включении фристайла как полноправной олимпийской дисциплины в программу Белой олимпиады-92 в Альбервилле. Первым в олимпийский регламент был допущен могул. ***Могул*** *- спуск на горных лыжах по бугристому склону по максимально точной прямой длиной до 250 м с обязательным исполнением двух прыжков. Француз Эдгар Гроспирон стал первым в истории фристайла олимпийским чемпионом в могуле, у женщин - американка Д.Уайбрехт. Вторую ступеньку олимпийского пьедестала в Альбервилле заняла 18-летняя москвичка Е.Кожевникова. На Зимних играх в Норвегии (Лиллехаммер-94 г.) к могулу присоединилась еще одна дисциплина - акробатические прыжки.* ***Лыжная акробатика*** *– это два прыжка со специального трамплина с выполнением акробатических элементов.*

Во фристайле россияне успели утратить свои позиции. Погибшему в автокатастрофе С.Щуплецову и ушедшей из активного спорта Е.Кожевниковой - мировым лидерам в могуле, достойной смены пока не нашлось.

Интересные факты. *Акробатический стадион состоит из горы разгона, платформы с несколькими различными по размеру трамплинами и крутого склона приземления. На соревнованиях спортсмены выполняют заранее заявленные прыжки, которые могут состоять из сальто, винтов, переворотов и других элементов. Специальная спортивная комиссия оценивает сложность прыжков и выставляет оценки за них. Самый сложный прыжок в лыжной акробатике, разрешённый на официальных соревнованиях, - это тройное сальто с четырьмя пируэтами. Хотя в 2000 г. на одном из коммерческих турниров Эрик Бергуст исполнил четверное сальто с четырьмя пируэтами.*

Пример 28. Проанализируйте, различаются ли результаты в квалификации и в финале для спортсменов, прошедших в финал в соревнованиях по могулу во фристайле среди мужчин и женщин на зимних Олимпийских играх 2010 года в Ванкувере.

Решение

Все вычисления удобнее выполнять в таблице. Рассмотрим результат только тех спортсменов, которые получили оценки в финале (из 20 прошедших квалификацию, 18 человек получили оценки в финале).

№	Спортсмен	квалификация (место)	финал (место)	разность
1	Александр Билодо	2	1	1-2=-1
2	Александр Смышляев	14	10	-4
3	Артту Керамо	12	16	4
4	Брайон Уилсон	3	3	0
5	Венсан Марки	13	4	-9
6	Гильбо Кола	1	6	5

7	Дейл Бегг-Смит	4	2	-2
8	Денис Долгодворов	18	13	-5
9	Дмитрий Рейхерд	9	18	9
10	Йеспер Бьёрнлунд	5	8	3
11	Майкл Моурс	19	15	-4
12	Максим Жингра	6	11	5
13	Микко Ройканен	20	14	-6
14	Нобуюки Ниси	15	9	-6
15	Пьер Ош	17	12	-5
16	Пьер-Александр Руссо	7	5	-2
17	Со Эндо	8	7	-1
18	Юго Цукита	11	17	6

Улучшили свои результаты (отрицательные разности) 11 спортсменов, а шестеро – ухудшили их.

Таким образом, «нетипичный сдвиг» - «ухудшить свои результаты». Эмпирическое значение критерия равно количеству «нетипичных сдвигов» $G_{эмп} = 6$.

Чем меньше «нетипичных сдвигов», тем существеннее различия между результатами. Чтобы определить, насколько мало эмпирическое значение, нужно сравнить его с критическим (табличным).

В данном случае рассматриваются результаты 18 спортсменов, т.е. $G_{табл} = 5$. Так как $G_{эмп} > G_{табл}$, то различия между результатами, показанными в квалификации и в финальных соревнованиях, не существенны, или результаты финала, в основном, «совпадают» с результатами в квалификации.

Проанализируем выступления женщин.

№	Спортсмен	квалификация (место)	финал (место)	разность
1	Аико Уэмура	5	4	-1
2	Ариса Мурата	11	8	-3

3	Дарья Рыбалова	17	14	-3
4	Дарья Серова	18	15	-3
5	Дебора Сканцио	14	10	-4
6	Дженнифер Хейл	2	2	0
7	Екатерина Столярова	10	7	-3
8	Кристи Ричардс	4	20	16
9	Маргарита Марблер	8	6	-2
10	Марина Черкасова	20	13	-7
11	Мики Ито	15	12	-3
12	Мишель Рорк	7	17	10
13	Никола Судова	12	16	4
14	Регина Рахимова	19	9	-10
15	Таэ Сатоя	13	19	6
16	Ханна Кирни	1	1	0
17	Хизер Макфи	3	18	15
18	Хлое Дюфур-Лапуан	9	5	-4
19	Шэннон Барк	6	3	-3
20	Юлия Галышева	16	11	-5

13 спортсменов улучшили свои результаты (отрицательные разности), а 5 – ухудшили (положительные разности), двое остались на своих местах.

Таким образом, «нетипичный сдвиг» - «ухудшить свои результаты». Эмпирическое значение критерия равно количеству «нетипичных сдвигов» $G_{эмп} = 5$.

В данном случае рассматриваются результаты 20 спортсменов, т.е. $G_{табл} = 5$. Так как $G_{эмп} \leq G_{табл}$, то различия между результатами, показанными в квалификации и в финальных соревнованиях, существенны, или результаты финала, в основном, «не совпадают» с результатами в квалификации.

Критерий Манна-Уитни

Этот критерий применяют для оценки различий по уровню выраженности какого-либо признака для двух независимых (несвязных) выборок. При этом выборки могут различаться по числу n_1 и n_2 входящих в них испытуемых. Этот критерий особенно удобен в том случае, когда число испытуемых невелико и в обеих выборках не превышает величину 60.

Алгоритм применения критерия Манна-Уитни

1. Проранжировать все экспериментальные данные вне зависимости от того, к какой выборке они относятся. Всего рангов получится $\left(n_1+n_2\right)$.

2. Подсчитать сумму рангов отдельно по группам и проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной.

3. Определить большую из двух ранговых сумм.

4. Определить значение *U* по формуле:

$$U_{эмп}=\left(n_1\cdot n_2\right)+\frac{n_x\cdot\left(n_x+1\right)}{2}-T_x,$$

где T_x – большая из двух ранговых сумм;

n_x – количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.

5. Определить табличное значения *U*. Чем меньше значение $U_{эмп}$, тем достоверность различий выше. Если $U_{эмп}\leq U_{табл}$, то различия достоверны.

Таблица критических значений критерия Манна-Уитни $U_{кр}$

n_1 / n_2	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
3	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
4	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14
5	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20
6		5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27
7			8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
8				13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41
9					17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48
10						23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55

11							30	33	37	40	44	47	51	55	58	62
12								37	41	45	49	53	57	61	65	69
13									45	50	54	59	63	67	72	76
14										55	59	64	67	74	78	83
15											64	70	75	80	85	90
16												75	81	86	92	98
17													87	93	99	105
18														99	106	112
19															113	119
20																127

Академическая гребля. Историческая справка. *Спортсмены находятся в лодках и гребут веслами, используя мышцы спины, рук и ног, проходя дистанцию спиной вперед, в отличие от гребли на байдарках и каноэ.*

Академическая гребля включена в программу Олимпийских игр с 1896 года (у женщин с 1976 года).

На древнеегипетском каменном барельефе, созданном между 3300 и 3000 годами до нашей эры, изображены гонки на гребных судах. Это один из первых доказанных фактов использования гребли не только для торговли, перевозок или военных действий, но и как спортивной забавы.

На протяжении истории развития гребли конструкция гоночных судов кардинально изменилась. Изменился и дизайн и конструкция весел. Современные гоночные суда - это продукт высоких технологий, применяемых в самолетостроении и космонавтике.

Однако гребля не стала предметом занятий избранных, гребля была и остается массовым видом спорта и включена в обязательную программу физического воспитания ведущих колледжей и университетов всего мира. Наиболее известной регатой современности является ежегодная гонка между университетами Оксфорда и Кембриджа. Первый рекорд в этой гонке был установлен в 1829 году. А наиболее престижной является *всемирно известная Хенлейская Королевская Регата, основанная в 1839 г. и получившая королевский статус в 1851 г.*

Для основателя современного Олимпийского движения барона Пьера де Кубертена гребля являлась любимейшим видом спорта. П. де Кубертен являлся тренером и судьей по гребле и отводил гребле лидирующую роль в системе физического воспитания на основании того, что при гребле одновременно работают до 80% мышц, а сами занятия проходят в естественной природной среде, не нарушая ее.

Академическая гребля впервые появилась на Олимпийских играх в Париже в 1900 году. Гребля была в программе и первых Игр современности в Афинах в 1896 году, но из-за плохой погоды соревнования были отменены.

Первые женские состязания по гребле были введены в программу Олимпийских игр в 1976 году в Монреале. Соревнования в легком весе (с ограничением экипажей по весу) были впервые представлены в 1996 году в Атланте. В настоящее время на Олимпийских играх в соревнованиях по гребле разыгрываются 14 комплектов наград.

Интересные факты: *самому юному чемпиону по академической гребле было всего 10 лет. Его посадили на место заболевшего рулевого. Экипаж, в составе которого он находился, стал победителем. Это случилось в 1900 году. Англичанин Стив Редгрейв – самый выдающийся спортсмен в академической гребле – он побеждал на протяжении двух десятков лет во всех чемпионатах мира и Олимпиадах. Перед Играми 1992 года в Барселоне врачи обнаружили у Стива сахарный диабет, но он все равно выступил и выиграл пятое олимпийское «золото», после чего завершил карьеру.*

Пример 30. Определите, различаются ли результаты по академической гребле в двойках (женщины) на летних Олимпийских играх 2008 года.

Соревнования проводятся в несколько этапов. Сначала проходят отборочные гонки, спортсмены, занявшие 1 места, проходят в финал А, остальные в дополнительные гонки. По результатам дополнительных гонок спортсмены, занявшие 1-2 места, проходят в финал A, остальные в финал B. Проанализируем, различаются ли по силе группы спортсменов в отборочных гонках, в дополнительных гонках и в финалах.

Отборочные гонки:

Место	Спортсмены	Результат
1	Румыния Джорджета Андруначе, Вьюрика Сусану	7:22,69
2	Германия Ленка Вех, Марлен Дерлин	7:28,66
3	Великобритания Луиса Рив, Оливия Уитлам	7:29,88
4	США Портия Мак-Ги, Энн Камминс	7:29,95
5	Франция Инен Паскаль-Претр, Стефани Дешан	7:42,92

Место	Спортсмены	Результат
1	Белоруссия Юлия Бичик, Наталья Гелах	7:24,47
2	Новая Зеландия Джульетта Хэй, Никола Коулс	7:31,45
3	Китай Ву Ю, Гао Юлань	7:32,50
4	Австралия Ким Край, Сара Кук	7:44,04
5	Канада Зоу Хоскинс, Сабрина Колкер	*Лодка с низким весом*

Дополнительные гонки:

Место	Спортсмены	Результат
1	Новая Зеландия Джульетта Хэй, Никола Коулс	7:32,64
2	Великобритания Луиса Рив, Оливия Уитлам	7:34,54
3	Австралия Ким Край, Сара Кук	7:38,48
4	Франция Инен Паскаль-Претр, Стефани Дешан	7:41,87

Место	Спортсмены	Результат
1	Китай Ву Ю, Гао Юлань	7:23,71
2	Германия Ленка Вех, Марлен Дерлин	7:27,02
3	США Портия Мак-Ги, Энн Камминс	7:32,26
4	Канада Зоу Хоскинс, Сабрина Колкер	7:40,22

Финалы:

Финал B

Место	Спортсмены	Результат
1	США Портия Мак-Ги, Энн Камминс	7:33,17
2	Франция Инен Паскаль-Претр, Стефани Дешан	7:36,25
3	Канада Зоу Хоскинс, Сабрина Колкер	7:37,27
4	Австралия Ким Край, Сара Кук	7:40,93

Финал A

Место	Спортсмены	Результат
1	Румыния Джорджета Андруначе, Вьюрика Сусану	7:20,60
2	Китай Ву Ю, Гао Юлань	7:22,28
3	Белоруссия Юлия Бичик, Наталья Гелах	7:22,91
4	Германия Ленка Вех, Марлен Дерлин	7:25,73
5	Новая Зеландия Джульетта Хэй, Никола Коулс	7:28,80
6	Великобритания Луиса Рив, Оливия Уитлам	7:33,61

Решение

Сравним результаты отборочных гонок:

№	Результаты спортсменов 1 группы	Ранг	Результаты спортсменов 2 группы	Ранг
1	7:22,69	1	7:24,47	2
2	7:28,66	3	7:31,45	6
3	7:29,88	4	7:32,50	7
4	7:29,95	5	7:44,04	9
5	7:42,92	8	-	
Сумма рангов		21		24

Найдем $U_{эмп}$, для нашего случая $T_x = 24; n_x = 4$.

$$U_{эмп} = \left(n_1 \cdot n_2\right) + \frac{n_x \cdot \left(n_x + 1\right)}{2} - T_x = \left(5 \cdot 4\right) + \frac{4 \cdot \left(4 + 1\right)}{2} - 24 = 20 + 10 - 24 = 6.$$

По таблице критических значений для критерия Манна-Уитни определим: $U_{кр}\left(n_1 = 5; n_2 = 4\right) = 1$. Тогда $U_{кр} = 1 < 6 = U_{эмп}$ и различия во времени прохождения трассы в отборочных гонках не существенны, т.е. группы спортсменов не различаются по силе.

Аналогично выполним анализ дополнительных гонок:

№	Результаты спортсменов 1 группы	Ранг	Результаты спортсменов 2 группы	Ранг
1	7:32,64	4	7:23,71	1
2	7:34,54	5	7:27,02	2
3	7:38,48	6	7:32,26	3
4	7:41,87	8	7:40,22	7
Сумма рангов		23		13

$T_x = 23; n_x = 4$.

$$U_{эмп} = \left(4 \cdot 4\right) + \frac{4 \cdot \left(4 + 1\right)}{2} - 23 = 16 + 10 - 23 = 3 > 0 = U_{кр}\left(n_1 = 4; n_2 = 4\right)$$

и различия во времени прохождения трассы в дополнительных гонках не существенны, т.е. группы спортсменов не различаются по силе.

Теперь сравним по силе спортсменов, отобранных в финал А и в финал В:

№	Результаты спортсменов 1 группы	Ранг	Результаты спортсменов 2 группы	Ранг
1	7:33,17	6	7:20,60	1
2	7:36,25	8	7:22,28	2
3	7:37,27	9	7:22,91	3
4	7:40,93	10	7:25,73	4
5			7:28,80	5
6			7:33,61	7
Сумма рангов		33		22

Найдем $U_{эмп}$, для нашего случая $T_x = 33; n_x = 4$.

$$U_{эмп} = (6 \cdot 4) + \frac{4 \cdot (4+1)}{2} - 33 = 24 + 10 - 33 = 1 < 2 = U_{кр}\ (n_1 = 6; n_2 = 4).$$

В этом случае различия во времени прохождения трассы в финальных гонках существенны, т.е. группы спортсменов различаются по силе.

Пример 31. Определите, существенно ли различаются результаты спортсменов в тяжелой атлетике в рывке и толчке для весовых категорий спортсменов до 105 кг и от 105 кг, а также до 85 кг и до 105 кг.

Решение

Вычисления оформим в виде таблицы:

	Рывок				**Толчок**			
	до 105		**от 105**		**до 105**		**от 105**	
	вес	**ранг**	**вес**	**ранг**	**вес**	**ранг**	**вес**	**ранг**
1	200	6	203	4	236	4	258	1
2	193	9	210	1	230	9	250	2
3	190	10	206	3	230	9	242	3
4	195	8	207	2	228	11	235	5
5	185	12,5	201	5	225	13,5	232	7
6	182	15	196	7	227	12	230	9
7	181	16	185	12,5	220	18	234	6

8	184	14	188	11	221	16	225	13,5
9	176	19	165	25	221	16	221	16
10	180	17	170	22,5	210	22	210	22
11	177	18	171	21	213	20	195	25,5
12	170	22,5	155	27	216	19	195	25,5
13	175	20	140	30	210	22	173	30
14	166	24			207	24		
15	163	26			187	27		
16	150	28,5			186	28		
17	150	28,5			180	29		
Сумма рангов		**294**		**171**		**299,5**		**165,5**

$$U_{эмп}\left(рывок\right)=\left(17\cdot 13\right)+\frac{17\cdot\left(17+1\right)}{2}-294=374-294=80$$

$$U_{эмп}\left(толчок\right)=\left(17\cdot 13\right)+\frac{17\cdot\left(17+1\right)}{2}-299,5=374-299,5=74,5$$

Так как $U_{эмп}\left(рывок\right)=80>63=U_{кр}\left(n_1=17;\, n_2=13\right)$ $U_{эмп}\left(толчок\right)=74,5>63=U_{кр}\left(n_1=17;\, n_2=13\right)$, то различия в результатах спортсменов весовых категорий до 105 и от 105 кг не существенны.

Теперь сравним результаты спортсменов других весовых категорий до 105 кг и до 85 кг.

	Рывок				**Толчок**			
	до 105		**до 85**		**до 105**		**до 85**	
	вес	**ранг**	**вес**	**ранг**	**вес**	**ранг**	**вес**	**ранг**
1	200	1	180	11	236	1	214	11
2	193	3	185	5,5	230	2,5	209	15
3	190	4	177	13,5	230	2,5	203	18,5
4	195	2	180	11	228	4	200	23
5	185	5,5	169	18	225	6	203	18,5
6	182	8	162	23	227	5	205	17

7	181	9	165	21	220	9	202	20,5
8	184	7	160	24	221	7,5	202	20,5
9	176	15	166	19,5	221	7,5	195	24
10	180	11	155	25	210	13,5	201	22
11	177	13,5	152	27	213	12	194	25
12	170	17	150	29	216	10	193	26
13	175	16	148	31	210	13,5	191	27
14	166	19,5	153	26	207	16	180	30,5
15	163	22	135	32	187	28	178	32
16	150	29	115	33	186	29	140	33
17	150	29			180	30,5		
		211,5		**349,5**		**197,5**		**363,5**

$$U_{эмп}\left(рывок\right)=\left(17\cdot 16\right)+\frac{16\cdot\left(16+1\right)}{2}-349,5=408-349,5=58,5$$

$$U_{эмп}\left(толчок\right)=\left(17\cdot 16\right)+\frac{16\cdot\left(16+1\right)}{2}-363,5=408-363,5=44,5$$

$U_{табл}\left(n_1=17;n_2=16\right)=81$.

Так как $U_{эмп}\left(рывок\right)=58,5<81=U_{кр}\left(n_1=17;n_2=16\right)$ и $U_{эмп}\left(толчок\right)=44,5<81=U_{кр}\left(n_1=17;n_2=16\right)$, то различия в результатах спортсменов весовых категорий до 105 и до 85 кг существенны, что достаточно очевидно можно было предположить и до вычислений.

Критерий Пейджа

Критерий Пейджа предназначен для сопоставления показателей, измеренных в трех и более условиях на одной и той же выборке испытуемых. Однако этот критерий не только позволяет выявить различия, но и указывает на направление в изменении величин признака. К сожалению, применение этого достаточно мощного критерия ограничено объемом выборки – число испытуемых не может быть больше 12, и числом измерений признака – оно не может быть больше 6.

Алгоритм применения критерия Пейджа

1. Проранжировать экспериментальные данные **по строкам** таблицы, т.е. по всем показателям для одного испытуемого.
2. Вычислить сумму рангов по каждому столбцу. Проверить правильность ранжирования.
3. Упорядочить итоговые суммы рангов по возрастанию и вычислить значение критерия Пейджа $L_{эмп} = \sum_{i=1}^{c} R_i \cdot i$, где R_i – сумма рангов i-того столбца в упорядоченной таблице; c – число измерений.
4. Сравнить найденное значение $L_{эмп}$ с табличным. Если оно оказалось больше табличного, то различия в показателях существенны.

Таблица критических значений $L_{кр}$ для n показателей $(n \le 12)$ и c измерений $(3 \le c \le 6)$.

n	С (количество условий)			
	3	4	5	6
2	28	58	103	166
3	41	84	150	244
4	54	111	197	321
5	66	137	244	397
6	79	163	291	474
7	91	189	338	550
8	104	214	384	625
9	116	240	431	701
10	128	266	477	777
11	141	292	523	852
12	153	317	570	928

Прыжки в воду

Одним из водных видов спорта являются прыжки в воду. На соревнованиях выполняются прыжки с трамплина (1 и 3 метра) и вышки (5, 7.5 и 10 метров). Во время прыжка спортсмены выполняют ряд акробатических действий (обороты, винты, вращения). Судьями оценивается как качество выполнения акробатических элементов в полётной фазе, так и чистота входа в воду. На соревнованиях по синхронным прыжкам оценивается также синхронность исполнения элементов двумя участниками.

Историческая справка

Сохранились исторические документы, свидетельствующие, что прыжки в воду (ногами и головой вперед) со скал, рифов, кораблей и пр. практиковались еще в древности. В основном на это отваживались рыбаки, ныряльщики и воины, причем у древних римлян воины нередко прыгали в полном боевом снаряжении.

Не менее популярно было подобное развлечение и в более поздние времена. Известно, например, что прыжками в воду увлекались в Германии в средние века.

Согласно некоторым документам, первые в истории соревнования по прыжкам в воду состоялись еще в XVII веке, – разумеется, на естественных водоемах.

Во второй половине XIX века прыжки в воду, – или, как их называли одно время, «причудливое ныряние», – получили большое распространение во многих странах. Этому способствовало строительство специальных водноспортивных сооружений и невероятная популярность гимнастики (являющейся, по сути, основой техники прыжков в воду). Гимнастические упражнения «проникли» на летние пляжи и со временем их стали проделывать не только на суше, но и над водой. В Германии большей популярностью пользовались прыжки с трамплина, а в Швеции – с вышки.

В 1904 прыжки в воду были впервые включены в программу Олимпийских игр. Мужчины соревновались в прыжках с вышки и в прыжках на дальность. В 1908 в программу были добавлены прыжки с трамплина. Соревнования по прыжкам на дальность больше не проводились, зато в программу Игр 1912, 1920 и 1924 наряду с привычными для нас прыжками входили и так называемые «простые прыжки». В этой дисциплине не было равных шведам.

Женщины дебютировали на Олимпиаде в 1912 – в прыжках с вышки. С 1920 они соревнуются также в прыжках с трамплина.

Долгое время в официальную программу Олимпиад входили только индивидуальные прыжки с 3-метрового трамплина и 10-метровой вышки. На Играх 2000 года спортсмены впервые соревновались в синхронных прыжках.

Синхронные прыжки. *Синхронные прыжки впервые были продемонстрированы в начале 1970-х на показательных выступлениях. Инициаторами «парных прыжков» выступили советские спортсмены.*

Немало специалистов скептически отнеслись к новшеству. Синхронные прыжки, по определению, требуют не только высокого индивидуального мастерства, но и полной слаженности в действиях спортсменов. Скептикам казалось, что добиться этого невозможно, а успехи отдельных пар поначалу объясняли исключительно везением. Но немецкие прыгуны, уверенно одерживавшие победу за победой на неофициальных соревнованиях, доказали, что синхронность в прыжках в воду вполне достижима.

В отличие от «обычных» прыжков, в «синхроне» победитель определяется только по результатам финальной части турнира.

Пример 32. Определите, различаются ли оценки за синхронные прыжки с трамплина на Олимпийских играх 2008 года.

Синхронные прыжки с трамплина:

Место	Спортсмен	1	2	3	4	5	Всего очков
1	У Минься, Го Цзинцзин	52.80	57.60	75.60	81.90	75.60	343.50
2	Юлия Пахалина, Анастасия Позднякова	52.80	51.00	69.30	77.43	73.08	323.61
3	Дитте Котциан, Хайке Фишер	51.00	51.60	68.40	70.20	76.50	318.90
4	Ариэль Риттенхаус, Келси Мэри Брайант	52.80	51.00	69.30	69.30	72.00	314.40
5	Шарлин Стрэттон, Брайони Коул	52.20	51.60	68.40	67.14	72.00	311.34
6	Наоми Батки, Франческа Даллапе	48.00	51.60	68.40	70.20	58.50	296.70
7	Мария Волощенко, Анна Письменская	49.80	48.00	63.80	65.70	65.70	293.10
8	Хэйли Сэйдж, Тэнди Джерард	46.80	48.60	53.70	65.29	63.84	278.25

Решение

Проранжируем оценки за прыжки для каждого спортсмена:

	1 прыжок		**2 прыжок**		**3 прыжок**		**4 прыжок**		**5 прыжок**	
1	52,8	1	57,6	2	75,6	3,5	81,9	5	75,6	3,5
2	52,8	2	51	1	69,3	3	77,43	5	73,08	4
3	51	1	51,6	2	68,4	3	70,2	4	76,5	5
4	52,8	2	51	1	69,3	3,5	69,3	3,5	72	5
5	52,2	2	51,6	1	68,4	4	67,14	3	72	5
6	48	1	51,6	2	68,4	4	70,2	5	58,5	3
7	49,8	2	48	1	63,8	3	65,7	4,5	65,7	4,5
8	46,8	1	48	2	53,7	3	65,29	5	63,84	4
Сумма рангов		**12**		**12**		**27**		**35**		**34**

Упорядочим значения ранговых сумм: 12, 12, 27, 34, 35.

Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$L_{эмп} = \sum_{i=1}^{c} R_i \cdot i = 12\cdot 1 + 12\cdot 2 + 27\cdot 3 + 34\cdot 4 + 35\cdot 5 = 428$$

Определим табличное значение: $L_{табл}\left(n=8; c=5\right)=384;$

Так как $L_{эмп}=428>393=L_{табл}$, то подтверждается гипотеза о том, что за первые прыжки спортсмены получили меньше баллов, чем за последние.

Пример 33. Определите, различаются ли результаты в пятиборье для 10 лучших спортсменов.

Место	Спортсмен	Стрельба		Фехтование		Плавание		Конкур		Бег		Всего
		Счёт	Очки	Побед	Очки	Время	Очки	Штраф	Очки	Время	Очки	
1	Андрей Моисеев	186	1168	26	1024	2.02,55	1332	140	1060	9.48,75	1048	**5632**
2	Эдвинас Крунголцас	185	1156	21	904	2.07,63	1272	56	1144	9.42,65	1072	**5548**
3	Андреюс Заднепровскис	182	1120	15	760	2.02,27	1336	32	1168	9.25,00	1140	**5524**
4	Цянь Чжэньхуа	189	1204	26	1024	2.07,46	1272	168	1032	10.04,40	984	**5516**
5	Штефан Гебхардт	183	1132	18	832	2.06,84	1280	72	1128	9.33,97	1108	**5480**
6	Михал Михалик	188	1192	16	784	2.08,37	1260	28	1172	9.47,25	1052	**5460**
7	Павел Тимощенко	185	1156	22	908	2.09,20	1252	152	1048	9.42,61	1072	**5436**
8	Оскар Сото	171	988	20	880	2.10,60	1236	40	1160	9.21,95	1156	**5420**
9	Дмитрий Кирпулянский	184	1144	20	880	2.04,37	1308	112	1088	10.01,57	996	**5416**
10	Самуэль Уил	177	1060	18	832	2.02,87	1328	164	1036	9.21,18	1156	**5412**

Решение

Проранжируем результаты спортсменов в пяти видах соревнований.

№	Стрельба		Фехтование		Плавание		Конкур		Бег	
1	1168	2	1024	5	1332	1	1060	3	1048	4
2	1156	2	904	5	1272	1	1144	3	1072	4
3	1120	4	760	5	1336	1	1168	2	1140	3
4	1204	2	1024	4	1272	1	1032	3	984	5
5	1132	2	832	5	1280	1	1128	3	1108	4
6	1192	2	784	5	1260	1	1172	3	1052	4
7	1156	2	908	5	1252	1	1048	4	1072	3
8	988	4	880	5	1236	1	1160	2	1156	3
9	1144	2	880	5	1308	1	1088	3	996	4

10	1060	3	832	5	1328	1	1036	4	1156	2
		25		49		10		30		36

Упорядочим ранговые суммы: больше всего очков принесли результаты по плаванию (сумма рангов наименьшая 10), затем по стрельбе (25), конкур (30), бег (36) и фехтование (49). Определим, существенны ли различия в набранных очках в разных видах пятиборья:

Вычислим эмпирическое значение критерия:

$$L_{эмп} = \sum_{i=1}^{c} R_i \cdot i = 10 \cdot 1 + 25 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 36 \cdot 4 + 49 \cdot 5 = 539$$

По таблице 3 определим значение:

$$L_{табл}\left(n = 10; c = 5\right) = 477;$$

Так как $L_{эмп} = 539 > 477 = L_{табл}$, то подтверждается гипотеза о том, что набранные очки за разные виды пятиборья различаются существенно.

Критерий Крускалла-Уоллиса

Критерий предназначен для оценки различий одновременно между тремя, четырьмя и т.д. выборками по уровню какого-либо признака. В данном случае анализируются результаты разных испытуемых. Критерий позволяет установить изменение уровня признака при переходе от группы к группе, но не указывает на направление этих изменений.

Алгоритм применения критерия

1. Проранжировать все показатели, не считаясь с тем, к какой группе они относятся, приписывая меньшему значению меньший ранг. Общее количество рангов будет равняться количеству испытуемых в объединенной выборке.
2. Подсчитать суммы рангов отдельно по каждой группе. Проверить совпадение общей суммы рангов с расчетной.
3. Подсчитать эмпирическое значение критерия $H_{эмп}$ по формуле

$$H_{эмп} = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j} \right] - 3(N+1),$$

где N – общее количество испытуемых в объединенной выборке;

c – количество групп;

n_j – количество испытуемых в каждой группе;

T_j – суммы рангов по каждой группе.

4. Определить табличное значение критерия $H_{кр}$ по таблице.

Кол-во групп	3	4	5	6
Значение критерия $H_{табл}$	4,6	6,3	7,8	9,2

Если $H_{эмп} \geq H_{табл}$, то различия между выборками существенны, т.е. результаты одной выборки будут отличаться от другой.

Пример 34. Определите, различаются ли результаты биатлонисток сборных России, Франции и Германии, занявших призовые места в эстафете на Олимпиаде 2010 года.

Решение

Проранжируем все 12 показателей трех сборных на четырех этапах.

	Россия		Франция		Германия	
этап	Время	Ранг	Время	Ранг	Время	Ранг
1	15:46,0	11	15:26,7	7	15:20,1	5
2	15:12,7	2	15:24,7	6	15:27,7	9
3	15:37,5	10	15:26,9	8	16:08,3	12
4	15:17,5	4	14:47,2	1	15:16,6	3
Сумма рангов		**27**		**22**		**29**

Вычислим эмпирическое значение критерия
$H_{эмп} = \left[\frac{12}{N(N+1)} \cdot \sum_{j=1}^{c} \frac{T_j^2}{n_j} \right] - 3(N+1)$. В нашем случае: $N = 3 \cdot 4 = 12$ – общее количество испытуемых в объединенной выборке; $c = 3$ – количество групп; $n_j = 4$ – количество испытуемых в каждой группе; $T_1 = 27,\ T_2 = 22,\ T_3 = 29$ – суммы рангов по каждой группе.

Тогда $H_{эмп} = \left[\frac{12}{12 \cdot (12+1)} \cdot \left(\frac{27^2}{4} + \frac{22^2}{4} + \frac{29^2}{4} \right) \right] - 3 \cdot (12+1) = 0,5$

Для трех групп $(c = 3)$ $H_{кр} = 4,6$.

Так как $H_{эмп} < H_{кр}$, то различия во времени прохождения трассы для спортсменок разных сборных отличаются не существенно.

Пример 35. Определите, различаются ли результаты биатлонисток сборных России, Франции и Германии, бежавших разные этапы в эстафете.

Решение

Проранжируем следующие 12 показателей:

	1 этап		2 этап		3 этап		4 этап	
Страна	время	ранг	время	ранг	время	ранг	время	ранг
Россия	15:46,0	11	15:12,7	2	15:37,5	10	15:17,5	4
Франция	15:26,7	7	15:24,7	6	15:26,9	8	14:47,2	1
Германия	15:20,1	5	15:27,7	9	16:08,3	12	15:16,6	3
Сумма рангов		**23**		**17**		**30**		**8**

Вычислим эмпирическое значение критерия $H_{эмп}$ для общего количества испытуемых в объединенной выборке $N = 3 \cdot 4 = 12$, четыре группы по три испытуемых в каждой.

Определив суммы рангов по каждой группе $T_1 = 23,\ T_2 = 17,\ T_3 = 30,\ T_4 = 8$, найдем

$$H_{эмп} = \left[\frac{12}{12(12+1)} \cdot \left(\frac{23^2}{3} + \frac{17^2}{3} + \frac{30^2}{3} + \frac{8^2}{3} \right) \right] - 3(12+1) \approx 6,7 .$$

В данном примере выборок уже 4, значит, табличное значение $H_{табл} = 6,3$.

Так как $H_{эмп} > H_{табл}$, то различия во времени прохождения трассы для спортсменок, выступающих на разных этапах, существенны.

Библиографический список

1. Афанасьев, В.В. Введение в теорию вероятностей с помощью графов / В.В. Афанасьев // Математика. – 1999. – №35. – С.8-12. – (Приложение к газете «Первое сентября».)

2. Афанасьев, В.В. Теория вероятностей в примерах и задачах: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1994.– 123 с.

3. Афанасьев, В.В. Вероятностные игры // Математика. – 2005. - №14. – С.35-38. – (Приложение к газете «Первое сентября».)

4. Афанасьев, В.В., Непряев, И.Н. Математическая статистика в спорте // Ярославский педагогический вестник. – 2005. - №2. – С. 108-113.

5. Афанасьев, В.В., Непряев, И.Н. Бюджеты клубов и их спортивные достижения // Ярославский педагогический вестник. – 2005. - №3. – С. 10-17.

6. Афанасьев, В.В., Непряев, И.Н. Линии регрессии и прогнозы в спорте // Ярославский педагогический вестник. – 2006. - №1. – С. 81-90.

7. Афанасьев, В.В., Непряев, И.Н. Математическая статистика в командных видах спорта. - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – 120 с.

8. Афанасьев, В.В., Суворова, М.А. Школьникам о вероятности в играх. Введение в теорию вероятностей для учащихся 8-11 классов. - Ярославль: Академия развития, 2006. – 192 с.

9. Афанасьев, В.В. Теория вероятностей: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальности «Математика». – М.: Изд-во ВЛАДОС, 2007. – 351 с.

10. Афанасьев, В.В., Непряев, И.Н. Математическая статистика в командных видах спорта. 2-е изд., перераб. и доп. - Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – 168 с.

11. Афанасьев, В.В., Муравьев, А.В., Осетров, И.А. Основы отбора, прогноза и контроля в спорте. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – 278 с.

12. Афанасьев, В.В., Муравьев, А.В., Осетров, И.А., Михайлов, П.В. Спортивная метрология: учебное пособие. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 242 с.

13. Афанасьев, В.В., Суворова, М.А., Осетров, И.А. Статистика в спорте: монография. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – 255 с.

14. Велехов, Л. «Призовые по сто тысяч, а винтовки разваливаются в руках биатлонистов» - Режим доступа: http://www.sovsekretno.ru/magazines/article/2456

15. Гаськов, А.П. Введение в математическую статистику. – Режим доступа: http://www.esag.biz/index.files/matinfo/statbegin/statbegin.htm

16. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1998. – 479 с.

17. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1998. – 400 с.

18. Годфруа, Ж. Что такое психология? Т.2. - М, 1992. - С. 277

19. Зациорский, В.М. Основы спортивной метрологии. - М.: Физкультура и спорт, 1979. - 152 с.

20. Кун, Н.А. Легенды и мифы Древней Греции. - СПб, 2001.

21. Суворова, М.А., Осетров, И.А. Слагаемые успеха в биатлоне // Ярославский педагогический вестник. – 2009. - №2. - С. 128-133.

22. Суворова, М.А., Осетров, И.А. Вероятность на вариациях одной задачи из биатлона // Ярославский педагогический вестник. - 2011. - №2. - С. 139-145.

23. Суворова, М.А., Осетров, И.А. Случайные величины в биатлоне // Ярославский педагогический вестник. – 2011. - №4. - С. 144-152.

24. Ховард, Р.А. Динамическое программирование и марковские процессы. – М.: Изд-во «Советское радио», 1964.

25. Чесноков, Н.Н. Олимпийские игры Древней Греции и зарождение современного олимпийского движения /

Н.Н.Чесноков, Н.Ю. Мельникова // Спорт, духовные ценности, культура. - М., 1997. - Вып. 1. - С. 20-30.
26. Википедия. Свободная энциклопедия. – Режим доступа: http://ru.wikipedia.org
27. Олимпийская энциклопедия. - М.: Советская энциклопедия, 1980. - 416 с.
28. Олимпийские игры Древней Греции. Энциклопедия Кругосвет. Универсальная научно-популярная онлайн-энциклопедия. – Режим доступа: http://www.krugosvet.ru/enc/sport/OLIMPISKIE_IGRI_DREVNE_GRETSII.html?page=0,0
29. – Режим доступа: http://www.sportaim.ru
30. – Режим доступа: http://www.olympic-history.ru
31. Послание директора МБМВ по случаю Всемирного Дня Метрологии в 2008 году «Олимпийские игры невозможны без измерений» // Ж. «ЗиПМ». - 2009. - № 3.

Учебное издание

Владимир Васильевич Афанасьев
Мария Александровна Суворова

Школьникам
о статистике в играх

Редактор Л.К. Шереметьева
Компьютерная верстка – Ю.В. Яковлева

Подписано в печать 19.07.12
Формат $60x90_{1/16}$.
Объем 9,75 п. л., 3,9 уч.-изд.л. Тираж 500 экз. Заказ 59

Редакционно-издательский отдел
Ярославского государственного педагогического
университета им. К. Д. Ушинского
150000, г. Ярославль, Республиканская ул., 108

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного оригинала
на оборудовании ИПК «Индиго»
Россия, 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

Для заметок

Для заметок